

## К ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ПЛОТОВ В РУСЛОВОМ ПОТОКЕ И КОНТЕЙНЕРОВ В НАПОРНОМ ТРУБОПРОВОДЕ. ПАРАДОКС ПРАНДТЛЯ

А. С. ГИНЕВСКИЙ, А. В. КОЛЕСНИКОВ

(Москва)

Излагается метод расчета движения плотов, плавающих на поверхности руслового потока, и длинных контейнеров внутри напорных трубопроводов. Проведенное исследование дает количественную оценку качественных выводов Л. Прандтля о том, что плавающие удобообтекаемые тела могут опережать течение реки (при турбулентном режиме течения). Расчеты показали и эксперимент подтверждает, что скорость движения плота или баржи примерно в полтора раза превышает скорость течения на поверхности реки. Аналогичные выводы получены и в отношении движения длинных контейнеров нейтральной плавучести при турбулентном напорном течении жидкости в трубопроводе. В случае ламинарного режима течения жидкости имеют место эффекты противоположного характера.

**1. Постановка задачи.** Движение плотов, плоскодонных барж, больших льдин и других твердых тел на поверхности воды в открытом канале отличается рядом особенностей. Еще Прандтль [1] отмечал интересное явление, которое состоит в том, что «баржа, плывущая по реке, всегда опережает течение, притом настолько, что ею возможно управлять при помощи руля», расположенного в кормовой части. Прандтль объясняет это превышение скорости баржи над скоростью окружающей жидкости ослаблением турбулентного перемешивания в окрестности непроницаемой поверхности твердого тела по сравнению со случаем, когда погруженная в воду часть баржи заменена жидкостью.

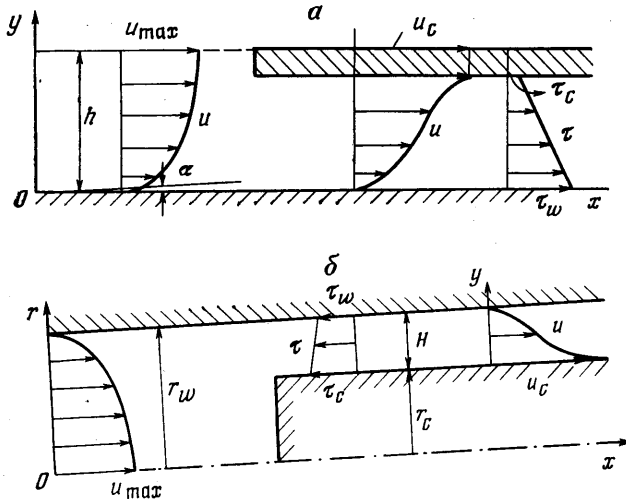
В несколько иной форме указанное явление проявляется в системах контейнерного трубопроводного транспорта [2]. Здесь заключение объемов жидкости в твердые контейнеры при некоторых условиях может приводить к повышению суммарного расхода жидкости при заданном перепаде давления или к снижению перепада давления, необходимого для прокачивания заданного суммарного расхода жидкости.

Данное Прандтлем объяснение парадоксального, на первый взгляд, явления становится особенно наглядным при параллельном рассмотрении движения плота или цилиндрического контейнера в трубопроводе при турбулентном и ламинарном режимах течения жидкости в русле или трубопроводе. В этом последнем случае, как показано в работе, затвердевшие объемы жидкости уже не обгоняют, а, наоборот, отстают от несущего потока. Для выяснения обстоятельств, при которых может быть получен отмеченный Прандтлем выигрыш в скорости и количественной оценки этого выигрыша следует разработать теорию движения идеального плота при равномерном движении жидкости в открытом канале и движения контейнера в напорном трубопроводе.

Рассмотрим плоскую задачу об однородном по длине русловом течении жидкости, когда глубина  $h$  воды (фиг. 1, а) и продольная скорость  $u$  не меняются вдоль координаты  $x$  и постоянны по ширине канала. Обозначим

через  $y$  поперечную координату, отсчитываемую от дна русла, через  $\alpha$  — угол наклона водной поверхности (или дна, в силу постоянства глубины). Заметим, что однородное по длине течение жидкости со свободной поверхностью соответствует малым числам Фруда  $U/(gh)^{1/2} \ll 1$ , где  $g$  — ускорение силы тяжести,  $U$  — некоторая характерная скорость потока.

Внешней границей течения служит либо открытая водная поверхность, либо нижняя поверхность плота. Для упрощения задачи плот, частично погруженный в воду, будем моделировать плоским твердым телом с глад-



Фиг. 1

кой или шероховатой нижней поверхностью, которое имеет постоянную (вдоль потока и по ширине канала) толщину  $\Delta h$ , равную размеру погруженной части реального тела. Таким образом, плотность фиктивного плота будет равна плотности воды, а его верхняя поверхность будет совпадать со свободной поверхностью открытого руслового потока. Толщина слоя воды под плотом составит  $h - \Delta h$ .

При исследовании движения плота будем считать, так же как в случае открытого русла, что параметры потока не зависят от продольной координаты  $x$ . Это предположение оправдывается, когда длина плота велика по сравнению с глубиной руслового потока и когда влиянием эффектов, обусловленных передней и задней кромками плота, можно пренебречь. Такая схематизация явления позволяет рассчитать параметры потока в канале с открытой водной поверхностью, скорость движения плота, исследовать влияние шероховатости границ потока и т. п.

Перейдем к составлению основных уравнений руслового потока. Уравнение равномерного по длине плоскопараллельного движения несжимаемой вязкой жидкости при малых числах Фруда можно записать в следующем виде:

$$(1.1) \quad \partial\tau/\partial y = -\rho g \sin \alpha$$

где  $\tau$  — касательное напряжение,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\alpha$  — угол наклона руслового потока. Важно отметить, что это уравнение аналогично соответствующему уравнению для плоского стабилизированного течения в трубе и для напорного течения Куэтта:  $\partial\tau/\partial y = dp/dx$ . При этом проекция гравитационной силы на ось  $x$  (правая часть уравнения (1.1)) здесь выполняет ту же роль, что и градиент давления  $dp/dx$  при течении в канале.

Из уравнения (1.1) получаем линейный закон распределения касательного напряжения по глубине потока. При этом постоянная интегрирования определяется из условия равенства нулю касательного напряжения на свободной поверхности  $y=h$  (для открытого руслового потока) либо на основании уравнения равновесия сил, приложенных к плоту

$$(1.2) \quad \tau_1 + \Delta h \rho g \sin \alpha = \tau_c$$

Здесь  $\tau_1$  — касательное напряжение, обусловленное тягой буксира или воздействием ветрового потока на верхнюю поверхность плота (эта величина считается заданной),  $\tau_c$  — касательное напряжение на нижней поверхности плота,  $\Delta h \rho g \sin \alpha$  — составляющая силы тяжести элемента плота в направлении движения. Таким образом,

$$(1.3) \quad \tau = (h-y) \rho g \sin \alpha + \tau_1$$

Для свободно плывущего плота при отсутствии ветра  $\tau_1$  равно нулю, и формула (1.3) известна в гидротехнике как уравнение Лоренца [3]. Ниже для простоты будет рассматриваться этот последний случай. Исследование более общей задачи ( $\tau_1 \neq 0$ ) может быть выполнено аналогичным путем.

Отметим, что распределение касательного напряжения по глубине потока одинаково в открытом русловом потоке и в случае потока под бесконечным плотом. При этом касательное напряжение на поверхности дна ( $y=0$ ) определяется глубиной потока и углом уклона поверхности ( $\tau_w = g \rho h \sin \alpha$ ) и не зависит от режима течения, размеров шероховатости, наличия плота. Касательное напряжение на нижней поверхности плота ( $y=h-\Delta h$ ) определяется углом уклона  $\alpha$  и толщиной плота ( $\tau_c = \rho g \Delta h \sin \alpha$ ).

Учитывая инвариантность поверхностного трения  $\tau_w$  к изменению условий течения, при нормировании параметров удобно в качестве масштаба скорости использовать динамическую скорость  $u_\tau = (\tau_w / \rho)^{1/2} = (g h \sin \alpha)^{1/2}$ , а в качестве масштаба длины — глубину потока  $h$ . В безразмерных переменных уравнение Лоренца (1.3) имеет вид

$$(1.4) \quad \tau^\circ = \frac{\tau}{\rho u_\tau^2} = 1 - y^\circ, \quad \tau^\circ = \frac{\tau}{\tau_w}, \quad y^\circ = \frac{y}{h}$$

а безразмерное трение на поверхности плота будет равно  $\tau_c^\circ = \Delta h / h = \Delta h^\circ$ .

Расчет руслового потока сводится к определению профиля скорости, значений максимальной и средней скорости, а также скорости движения плота по заданному распределению касательного напряжения (1.4) и соответствующих формул, связывающих ламинарное или турбулентное касательное напряжение с поперечным градиентом скорости.

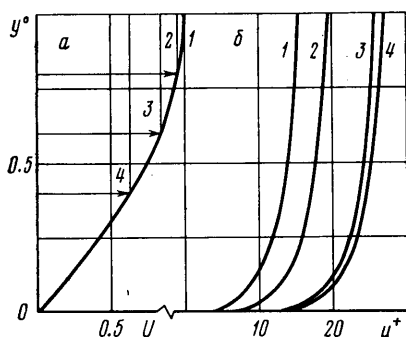
**2. Ламинарное русловое течение жидкости.** При ламинарном движении жидкости связь между молекулярным трением и поперечным градиентом скорости определяется формулой Ньютона  $\tau = \mu du/dy$ , где  $\mu$  — динамический коэффициент вязкости. Переходя в этой формуле к безразмерным переменным, получим дифференциальное уравнение для определения скорости потока по заданному профилю касательного напряжения

$$(2.1) \quad \partial u^+ / \partial y^\circ = h^+ (1 - y^\circ), \quad u^+ = u / u_\tau$$

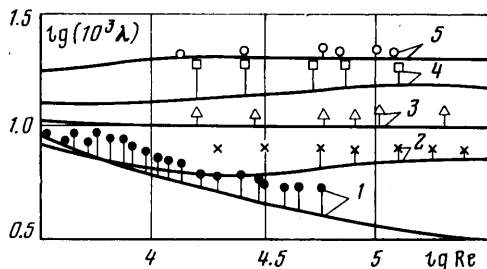
где  $h^+ = h u_\tau / \nu$  — число Рейнольдса. Его решением, удовлетворяющим условию прилипания при  $y=0$ , будет функция  $u^+ = h^+ (y^\circ - 0.5y^{\circ 2})$ .

Максимальная скорость на свободной границе открытого руслового потока равна  $u_{\max} = 0.5h^+$ , а скорость движения плота, определяемая по значению  $u^+$  при  $y^\circ = 1 - \Delta h^\circ$ :  $u_c^+ = 0.5h^+ (1 - \Delta h^{\circ 2})$ , всегда будет меньше максимальной скорости потока  $u_{\max}^+$  и равна скорости течения жидкости в открытом русловом потоке на расстоянии от дна, соответствующем нижней поверхности плота.

Распределение скорости  $U=u/u_{\max}$  по глубине ламинарного руслового потока приведено на фиг. 2, а. Там же указаны скорости движения плотов разной относительной толщины  $\Delta h^\circ$  (1 —  $\Delta h^\circ=0$ , 2 — 0.2, 3 — 0.4, 4 —  $\Delta h^\circ=0.6$ ). Отсюда следует, что при ламинарном режиме течения жидкости бесконечный плот будет отставать от течения реки, притом тем сильнее, чем больше размер его погруженной части. Полученный вывод представ-



Фиг. 2



Фиг. 3

ляется вполне естественным вследствие линейности уравнений ламинарного движения жидкости.

**3. Турбулентное русловое течение жидкости.** При турбулентном движении жидкости полное касательное напряжение представляет собой сумму молекулярного и турбулентного напряжений  $\tau = \tau_l + \tau_t$ . Молекулярное напряжение будем определять по формуле Ньютона, а для расчета турбулентного напряжения  $\tau_t$  воспользуемся прандтлевской формулой пути смешения

$$(3.1) \quad \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \rho l^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

где  $l$  — длина пути смешения, зависящая от координаты  $y$ .

Переходя к безразмерным переменным и разрешая это уравнение относительно  $\partial u^+ / \partial y^\circ$ , с учетом (2.1) получим

$$(3.2) \quad \frac{\partial u^+}{\partial y^\circ} = \frac{2(1-y^\circ)}{\psi}, \quad \psi = (h^+)^{-1} + [(h^+)^{-2} + 4l^{*2}(1-y^\circ)]^{1/2}$$

Интегрируя уравнение (3.2) по  $y^\circ$  и удовлетворяя условию прилипания на границе  $y^\circ=0$ , получим распределение скоростей в турбулентном русловом потоке. При исследовании открытого руслового потока длину пути смешения будем определять по формуле Прандтля — Никурадзе

$$(3.3) \quad l_*^\circ = 0.14 - 0.08(1-y^\circ)^2 - 0.06(1-y^\circ)^4$$

которая получена на основании обработки результатов исследования течения в гладких и шероховатых трубах. Эта формула удовлетворяет следующим условиям: вблизи твердой поверхности она дает длину пути смешения, пропорциональную поперечной координате  $l_* = 0.4y$ , а вблизи свободной границы —  $l_* = 0.14h$ .

В русловом потоке, ограниченном сверху бесконечным плотом, длина пути смешения, так же как в турбулентном напорном течении Куэтта [2], должна обращаться в нуль на обеих твердых границах [ $l = 0.4y$  при  $y \rightarrow 0$  и  $l = 0.4(h - \Delta h - y)$  при  $y \rightarrow h - \Delta h$ ] и принимать максимальное значение, равное  $0.14(h - \Delta h)/2$  в центральной части потока. Этим условиям удов-

летворяет функция

$$(3.4) \quad l_*^\circ = (1 - \Delta h^\circ) (0.07 - 0.16\eta^2 - 0.48\eta^4); \\ \eta = [y^\circ - 0.5(1 - \Delta h^\circ)](1 - \Delta h^\circ)^{-1}$$

Для того чтобы учесть демпфирование турбулентных пульсаций силами вязкости в непосредственной близости от дна реки и поверхности плота, воспользуемся модифицированной моделью турбулентной вязкости, предложенной Ю. Ротта (см. [5]). Поправки вводятся в длину пути смешения посредством сдвига начала отсчета поперечной координаты  $y$  на величину  $L_-^\circ$ , зависящую от числа Рейнольдса и шероховатости поверхности

$$(3.5) \quad l^\circ = F(l_*^\circ - L_-^\circ), \quad l^\circ = l/h$$

где  $F$  — ступенчатая функция, равная нулю в вязком подслое вблизи твердых границ и единице в остальной части течения.

Поправочная функция  $L_-^\circ$  получена на основании обработки опытных данных Никурадзе по исследованию сопротивления шероховатых труб

$$(3.6) \quad L_-^\circ = 2.68\varphi \quad (k^\circ < 4\varphi) \\ L_-^\circ = 0.001582\beta\varphi \left(40 - \frac{k^\circ}{\varphi}\right)^2 + 0.0175 \left(40 - \frac{k^\circ}{\varphi}\right) \varphi \quad (k^\circ \geq 4\varphi)$$

Здесь  $k^\circ = k/h$ ,  $k$  — высота элементов шероховатости,  $\beta$  — коэффициент, равный единице при  $k^\circ < 4\varphi$  и нулю при  $k^\circ \geq 4\varphi$  на режиме развитой шероховатости,  $\varphi = \varphi_w = 1/h^+$  — для дна реки ( $y^\circ = 0$ ) и  $\varphi = \varphi_c = [h^+(\Delta h^\circ + 2.5L_-^\circ)]^{-1}$  — для поверхности плота. При этом коэффициент  $F$  в окрестности дна реки (индекс  $w$ ) и плота (индекс  $c$ ) в формуле (3.5) определяется следующими формулами:

$$F = 0 \text{ при } y^\circ < 2.5\beta(L_-^\circ)_w, \quad 1 - \Delta h^\circ - y^\circ < 2.5\beta(L_-^\circ)_c \\ F = 1 \text{ при } y^\circ \geq 2.5\beta(L_-^\circ)_w, \quad 1 - \Delta h^\circ - y^\circ \geq 2.5\beta(L_-^\circ)_c$$

При расчете руслового потока, ограниченного плотом, при вычислении  $L_-^\circ$  на участке  $y^\circ$  от нуля до  $(1 - \Delta h^\circ)/2$  использовались значения, соответствующие  $\varphi = \varphi_w$ , а на остальном участке —  $\varphi = \varphi_c$ .

В результате численного интегрирования уравнения (3.2) с учетом описанного выше алгоритма вычисления длины пути смешения было получено распределение скоростей в открытом русловом потоке с гладким и шероховатым дном. На фиг. 2, б представлены профили скорости в открытом русловом потоке при разных значениях относительной шероховатости  $k_w^\circ = k_w/h$  и числе Рейнольдса  $h^+ = 3.5 \cdot 10^3$ . Здесь 1 —  $k_w^\circ = 1/15$ , 2 —  $1/60$ , 3 —  $1/507$ , 4 —  $k_w^\circ = 0$ . Видно, что во всех случаях скорость монотонно возрастает по мере приближения к свободной поверхности и достигает в случае гладкого дна  $u_{\max} = 26.8u_\tau$ . При увеличении шероховатости дна происходит существенное снижение скоростей потока. Так, при  $k_w^\circ = 1/15$  максимальная скорость ( $u_{\max} = 15.6u_\tau$ ) уменьшается почти в два раза.

Аналогичные профили скорости получаются и при других числах Рейнольдса. С изменением  $h^+$  меняется коэффициент  $C$  в формуле  $u_{\max} = Cu_\tau$ . Так, например, для руслового потока при гладком дне  $C = 32.4$  при  $h^+ = 3.5 \cdot 10^4$ ,  $C = 26.8$  при  $h^+ = 3.5 \cdot 10^3$  и  $C = 17.5$  при  $h^+ = 0.7 \cdot 10^2$ . Таким образом, хотя, как отмечалось, касательные напряжения в потоке не зависят от шероховатости, повышение шероховатости сопровождается ростом коэффициентов сопротивления  $\lambda = 2\tau_w/\rho u_m^2$ , рассчитанных по средней скорости потока  $u_m$ . На фиг. 3 представлено сравнение коэффициентов сопротивления  $\lambda$  в функции числа Рейнольдса  $Re = 2hu_m/\nu$  с опытными данными для открытых русловых потоков с гладким и шероховатым дном [3]. Здесь 1 соответствует  $k^\circ = 0$ ; 2 —  $k^\circ = 1/71$ ; 3 —  $k^\circ = 1/23.5$ ; 4 —  $k^\circ = 1/8.6$ ; 5 —  $k^\circ = 1/4.7$ . Расчетные кривые согласуются с экспериментальными точками.

Задача о русловом потоке легко решается также с использованием более сложных, чем прандтлевская, моделей турбулентности [6].

**4. Турбулентное напорное течение Куэтта в концентричных кольцевых трубах.** Рассмотрим стабилизированное турбулентное течение жидкости в круглой трубе радиуса  $r_w$  и предположим, что в трубе расположен достаточно длинный цилиндрический контейнер радиуса  $r_c$ , ось которого совпадает с осью трубы (фиг. 1, б). Пусть движение контейнера происходит под действием перепада давления на его торцах и силы трения на его боковой поверхности.

Для расчета параметров течения вдали от торцов контейнера рассмотрим задачу о напорном течении Куэтта в кольцевой щели при продольном движении внутренней цилиндрической поверхности. Указанная осесимметричная задача может быть решена по той же схеме, что и рассмотренная выше задача о плоском движении плота, с использованием той же модели турбулентной вязкости.

В этом случае параметры потока не зависят от продольной координаты  $x$ , и уравнения движения и постоянства расхода записываются в виде

$$(4.1) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\tau) = \frac{dp}{dx}, \quad 2\pi \int_0^H u(r_c+y) dy = Q_H$$

где  $r$  — радиус,  $y$  — расстояние вдоль радиуса, измеренное от поверхности внутреннего цилиндра ( $y=r-r_c$ ),  $H=r_w-r_c$ ,  $p$  — давление и  $Q_H$  — объемный расход жидкости через поперечное сечение кольцевого зазора. Интегрируя первое уравнение (4.1) по  $r$  и переходя к безразмерным переменным, получим распределение касательного напряжения вдоль радиуса

$$(4.2) \quad \tau^\circ = \tau_c^\circ \frac{\theta}{\theta + (1-\theta)y^\circ} - \frac{1}{2} \lambda \frac{2\theta + (1-\theta)y^\circ}{\theta + (1-\theta)y^\circ} y^\circ$$

$$\theta = \frac{r_c}{r_w}, \quad y^\circ = \frac{y}{H}, \quad \lambda = -\frac{dp^\circ}{dx^\circ}$$

$$\tau_c^\circ = \frac{2\tau}{\rho u_m^2}, \quad p^\circ = \frac{2p}{\rho u_m^2}, \quad u_m = \frac{Q_H}{\pi(r_w^2 - r_c^2)}$$

причем  $u_m$  — средняя скорость течения жидкости в кольцевой щели.

Так же как и в рассмотренном выше случае, с помощью формул (3.1) и (4.2) получим выражение для профиля скорости, удовлетворяющее граничному условию  $u=u_c$  при  $y=0$

$$(4.3) \quad u^\circ = u_c^\circ + \int_0^{y^\circ} \frac{\tau^\circ}{\psi} dy^\circ, \quad \psi = \text{Re}_m^{-1} + [\text{Re}_m^{-2} + 2l^{\circ 2} |\tau^\circ|]^{1/2}$$

где  $u_c^\circ = u_c/u_m$  и  $\text{Re}_m = Hu_m/\nu$ . При этом длина пути смещения определяется по тем же формулам, что и для плоского плота; в этих формулах следует только характерный размер  $h$  заменить на  $H$  — ширину кольцевой щели. Граничное условие на неподвижной поверхности ( $y=0$  при  $y=H$ ) приводит к соотношению

$$(4.4) \quad u_c^\circ + \int_0^1 \frac{\tau^\circ}{\psi} dy^\circ = 0$$

Подстановка выражения для профиля скорости (4.3) во второе уравнение (4.1) дает интегральное уравнение, которое с учетом (4.4) после

простых преобразований приводится к виду

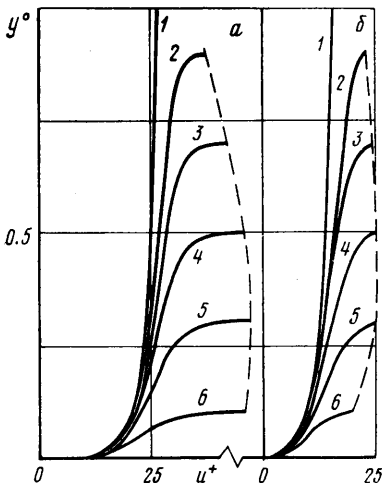
$$(4.5) \quad \frac{1-\theta}{1+\theta} \int_0^1 \frac{\tau^\circ}{\psi} \left( \frac{2\theta}{1-\theta} + y^\circ \right) y^\circ dy^\circ + 1 = 0$$

Для замыкания задачи используем уравнение баланса сил давления и трения, которое в безразмерных параметрах имеет вид

$$(4.6) \quad \theta\lambda + 2(1-\theta)\tau_c^\circ = 0$$

Система трех уравнений (4.4)–(4.6) при заданных значениях  $\theta$ ,  $Re_m$  позволяет определить три параметра:  $\lambda$ ,  $\tau_c^\circ$  и  $u_c^\circ$  [2]. Это решение существенно упрощается для ламинарного режима течения жидкости. Здесь  $l=0$ ,  $\psi=2/Re_m$  и решение задачи может быть получено в квадратурах.

**5. Результаты расчета.** Рассмотрим вначале профили скорости в русловом потоке с плотами разной относительной толщины  $\Delta h^\circ$  при различной шероховатости поверхностей дна и плота. На фиг. 4 такие профили



Фиг. 4

представлены при числе Рейнольдса  $h^+ = 3.5 \cdot 10^3$  для случаев гладких поверхностей дна и плота (а) и значений относительной шероховатости дна и плота  $k_v^\circ = k_c^\circ = 1/15$  (б), а также для соответствующих русловых потоков при отсутствии плота. Здесь 1 – открытый русловый поток, 2 –  $\Delta h^\circ = 0.1$ , 3 – 0.3, 4 – 0.5, 5 – 0.7, 6 –  $\Delta h^\circ = 0.9$ .

В окрестности дна при не очень толстых плотях скорости жидкости при наличии плота во всех случаях изменяются примерно одинаково, почти так же, как в открытом русловом потоке. Однако, начиная с некоторого расстояния от дна, скорость жидкости при наличии плота увеличивается значительно быстрее, чем в открытом русловом потоке. Вследствие этого во всех случаях скорость идеального плота примерно в полтора раза превышает максимальную скорость жидкости в открытом русловом потоке.

Расчеты показали, что скорость движения тонкого плота ( $\Delta h^\circ \leq 0.1$ ) зависит только от степени шероховатости дна и не зависит от шероховатости самого плота.

В принципе изложенный метод расчета может быть обобщен на случай движения плота конечной длины. При этом помимо сопротивления трения нижней его поверхности следует учесть дополнительное волновое и вязкостное сопротивление, обусловленное концевыми эффектами.

Аналогичные по существу выводы получаются при расчете движения длинного цилиндрического контейнера внутри напорного трубопровода. Соответствующие результаты расчета представлены ниже для одного числа Рейнольдса  $Re_0 = u_0 2r_w / \nu = 10^8$  при различных значениях относительного радиуса контейнера  $\theta$ . Здесь  $u_0$  – средняя скорость потока в трубопроводе вдали от контейнера.

$\theta$	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
$Re_m \cdot 10^{-4}$	7.59	5.83	4.20	2.70	1.30
$\lambda \cdot 10^4$	0.91	0.97	1.06	1.24	1.66
$u_c^\circ$	2.15	2.12	2.09	2.05	2.02
$u_c/u_0$	1.31	1.24	1.17	1.11	1.05
$u_c/u_{max}$	1.13	1.07	1.01	0.96	0.92

Отсюда следует, что с уменьшением относительного радиуса контейнера  $\theta$  возрастает отношение скорости движения контейнера  $u_c$  к средней скорости жидкости в трубопроводе  $u_0$  и к ее максимальному значению  $u_{\max}$ . При этом замечательно то, что при  $\theta < 0.85$  скорость движения контейнера заметно превышает не только среднюю скорость жидкости в трубопроводе, но и ее максимальное значение. Это и не удивительно, поскольку задача о движении длинного контейнера в транспортном трубопроводе является осесимметричным аналогом плоской задачи о движении плавающего плота, и механизм явления в обоих случаях одинаков.

Наглядное представление о существенном различии движения контейнера в трубопроводе при ламинарном и турбулентном режимах течения жидкости можно получить сравнением течения жидкости в трубопроводе без контейнеров и течения жидкости в трубопроводе такого же диаметра с длинными невесомыми контейнерами, заполненными той же жидкостью.

Суммарный расход жидкости через поперечное сечение трубопровода с контейнерами (включая жидкость внутри контейнеров) и градиент давления вдоль трубопровода будут определяться выражениями

$$(5.1) \quad Q = \pi r_w^2 u_m [1 + \theta^2 (u_c^\circ - 1)] = \pi H \nu \operatorname{Re}_m \frac{1 + \theta^2 (u_c^\circ - 1)}{1 - \theta^2}$$

$$(5.2) \quad -\frac{dp}{dx} = \frac{\rho \lambda}{2H} u_m^2 = \frac{\rho \lambda Q^2}{2\pi^2 H r_w^4 [1 + \theta^2 (u_c^\circ - 1)]^2}$$

Аналогичные зависимости для течения той же жидкости в трубе того же диаметра без контейнеров имеют вид

$$(5.3) \quad Q_0 = \pi r_w^2 u_0 = \frac{\pi r_w \nu}{2} \operatorname{Re}_0$$

$$(5.4) \quad -\frac{dp}{dx} = \frac{\rho}{2} \frac{\lambda_0}{2r_w} u_0^2 = \frac{\rho \lambda_0}{2} \frac{Q_0}{2\pi^2 r_w^5}$$

где при определении  $\lambda_0$  и  $\operatorname{Re}_0$  в качестве характерного размера принят диаметр трубопровода.

Теперь рассмотрим два случая. В первом случае будем считать одинаковыми расходы жидкости в трубе без контейнеров и при наличии контейнеров  $Q = Q_0$ . При этом отношение продольных градиентов давления в обоих случаях будет выражаться формулой

$$(5.5) \quad \xi_p = \frac{dp/dx}{(dp/dx)_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{2}{1 - \theta} [1 + \theta^2 (u_c^\circ - 1)]^{-2}$$

Во втором случае будем принимать равными перепады давления при тении жидкости в трубе с контейнерами и без них  $dp/dx = (dp/dx)_0$ . Тогда отношение расходов будет определяться выражением

$$(5.6) \quad \xi_Q = \frac{Q}{Q_0} = \frac{r}{r_0} (1 - \theta) \frac{\lambda_0}{2\lambda} \left[ 1 + \theta^2 (u_c^\circ - 1) \right]^{1/2}$$

Из формул для суммарного расхода находим связь между числами Рейнольдса  $\operatorname{Re}_0$  и  $\operatorname{Re}_m$

$$(5.7) \quad \operatorname{Re}_0 = \operatorname{Re}_m 2 \frac{Q}{Q_0} \frac{1 + \theta^2 (u_c^\circ - 1)}{1 - \theta}$$

Результаты расчета параметров  $\xi_p$  и  $\xi_Q$  при  $\theta = 0.9$  и разных значениях  $\operatorname{Re}_m$  для ламинарного и турбулентного режимов представлены ниже



Режим	$Re_m$	$\xi_p$	$Q$
Ламинарный	$10^3$	7.23	0.14
Турбулентный	$10^4$	0.36	1.64
Турбулентный	$10^5$	0.38	1.76

Аналогичные результаты получаются и в случае шероховатых поверхностей контейнера и трубопровода.

Отсюда следует принципиальное различие эффективности транспортировки жидкости в контейнерах в случае ламинарного и турбулентного режимов. В последнем случае перемещение жидкости в невесомых длинных контейнерах при фиксированном расходе может происходить при меньших перепадах давления ( $\xi_p < 1$ ), чем в обычной трубе, а при фиксированном градиенте давления — с большим суммарным расходом ( $\xi_q > 1$ ).

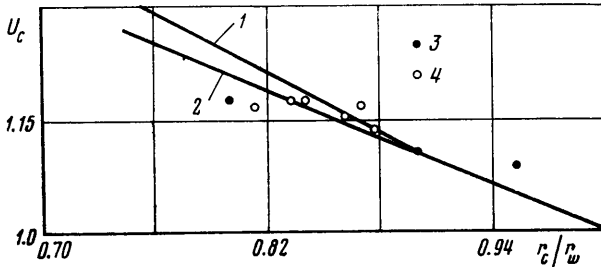
**6. Сравнение расчета и эксперимента.** То обстоятельство, что изложенная теория находится в весьма удовлетворительном соответствии с данными эксперимента для турбулентного руслового потока на гладком и шероховатом дне и для напорного течения жидкости в гладком и шероховатом трубопроводе, позволяет надеяться, что результаты расчета будут подтверждаться экспериментом и в более сложных случаях движения плотов в русловом потоке или контейнеров в трубопроводе. Вместе с тем выводы, касающиеся количественной стороны описанных эффектов, нуждаются в экспериментальном подтверждении вследствие принятой в расчете идеализации (плот и контейнер очень большой длины, бесконечный размах плота).

В книге [7] приводятся данные экспериментальных исследований по свободному сплаву, выполненные с судами 15 типов водоизмещением от  $D=265$  до  $2206$  т при течении в реке, скорость которого колебалась при различных опытах от  $4.8$  до  $7.76$  км/час, а уклон свободной поверхности  $\alpha$  — от  $0.173 \cdot 10^{-3}$  до  $0.198 \cdot 10^{-3}$ . Ниже приведены заимствованные из книги [7] результаты измерения превышения скорости судов  $\Delta u$  над скоростью воды для судов различного водоизмещения. К сожалению, величина  $\Delta h/h$  в [7] не указана.

Приведенные данные показывают, что и в реальных условиях натурального эксперимента скорость судна при свободном сплаве на реке примерно в полтора раза превышает скорость течения в реке на ее поверхности. Таким образом, получено опытное подтверждение результатов расчета для идеального плота.

$D, T$	$\alpha \cdot 10^3$	$u_{\max}$ , км/час	$\Delta u$ , км/час
2206	0.1763	<b>6.84</b>	3.82
2151	0.1757	6.00	3.73
1917	0.1729	6.80	3.57
1420	0.1813	4.80	3.51
1300	0.1760	6.63	3.27
1220	0.1760	6.26	3.21
1055	0.1758	6.12	3.32
1012	0.1768	7.45	3.15
976	0.1760	6.26	3.21
979	0.1840	6.20	3.30
968	0.1760	7.76	3.14
892	0.1760	6.60	3.40
—	0.1775	5.44	3.31
869	0.1980	5.90	3.47
—	0.1790	6.58	3.44
729	0.1814	6.05	3.53
265	0.1800	6.10	2.45

Экспериментальные исследования стационарного движения контейнеров сравнительно небольшой длины  $L_c/d_c \approx 2.4$  при  $\theta = 0.80-0.95$  в трубопроводе показали [8, 9], что по мере увеличения скорости потока в трубопроводе, когда уменьшается влияние механического трения колесного шасси или трения скольжения контейнера о трубопровод, скорость контейнера все более возрастает и по достижении некоторой пороговой скорости начинает превосходить среднюю скорость жидкости в трубопроводе



Фиг. 5

(примерно на 8–9%). Результаты эксперимента удовлетворительно согласуются с расчетом, в котором учтено влияние концевых эффектов.

В работе [10] проведено подробное экспериментальное исследование гидродинамических характеристик длинных контейнеров нейтральной плавучести, движущихся в потоке воды. Длина контейнеров превышала 19 диаметров трубопровода, их средняя массовая плотность была близка к плотности несущей среды, а диаметр варьировался в пределах 0.7–0.95 от диаметра трубопровода. Оказалось, что в этом случае концевые эффекты незначительны, и скорость движения контейнера сохраняется постоянной при изменении его длины.

На фиг. 5 показана зависимость отношения скоростей  $U_c = u_c/u_0$  от величины относительного радиуса контейнеров  $R_c = \theta/r_w$ . Здесь 1 — результаты расчетов для  $Re_0 = 10^6$ , которые обсуждались выше, 2 — результаты аналогичных расчетов для  $Re_m = 10^4$ , 3 — экспериментальные данные для контейнеров диаметром  $2r_c = 37$  мм при числах Рейнольдса  $Re_0 = (0.16-1.24) \cdot 10^5$ , 4 — экспериментальные данные для контейнеров диаметром  $2r_c = 125$  мм в диапазоне чисел Рейнольдса  $Re_0 = (0.55-4.16) \cdot 10^5$ .

Результаты этих экспериментов достаточно удовлетворительно согласуются с предложенной теорией. Скорость движения контейнеров нейтральной плавучести существенно превышает среднюю скорость жидкости, а при  $r_c = 0.7 r_w$  — даже максимальную скорость жидкости в трубе при тех же числах Рейнольдса.

В недавно вышедшей работе Кроненберга [11] приводятся результаты экспериментального исследования движения очень длинных (2.64 м) контейнеров нейтральной плавучести в трубе диаметром 0.07 м при трех значениях относительного радиуса  $\theta = 0.85, 0.8$  и  $0.9$ . Испытания выполнены при числах  $Re_0$  в диапазоне  $5 \cdot 10^4 - 1.65 \cdot 10^5$ . Полученные данные хорошо согласуются с расчетом и практически совпадают с результатами В. П. Бермана и В. Ф. Очеретько [10].

Описанное явление, которое можно назвать парадоксом Праудтля, реализуется в тех случаях, когда при турбулентном течении жидкости в реке или трубопроводе плот или контейнер представляют собой тела, в балансе сопротивления которых преобладающая роль принадлежит сопротивлению трения. В самом деле, наблюдения показывают, что плаваю-

щий в вертикальном положении глубоко погруженный цилиндр движется почти со скоростью течения реки, в то время как судно с хорошими обводами в тех же условиях опережает его [7].

Поступила 4 VII 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
2. *Гиневский А. С., Колесников А. В., Подольный И. Н.* К аэродинамическому расчету капсульных трубопроводных транспортных систем. Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1975, № 6.
3. *Гончаров В. Н.* Основы динамики русловых потоков. Л., Гидрометеиздат, 1954.
4. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч. 2. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
5. *Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В.* Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л., «Судостроение», 1973.
6. *Игнатова Г. Ш., Квон В. И.* О гидродинамической схеме скольжения при турбулентном течении. Метеорология и гидрология, 1978, № 7.
7. *Павленко Г. Е.* Сопротивление воды движению судов. М., «Морской транспорт», 1956.
8. *Jokogawa A., Suzuki M., Yoshii N., Tojo Ch.* Flow characteristics of capsules in hydraulic capsule pipelines. Hitachi zosen. Techn. Rev., 1977, vol. 38, No. 2.
9. *Krujer J.* Low pressure gradients in capsule pipelines. Hydrotransport 2. Second Internat. Conference on the Hidraulic Transport of Solids in Pipes, 1972.
10. *Берман В. П., Очеретъко В. Ф.* Экспериментальные исследования гидротранспорта контейнеров нейтральной плавучести. Вып. 39. Киев, «Гидромеханика», 1979.
11. *Kroonenberg H. H.* A mathematical model for concentric horisontal capsule transport. The Canadian Journal of Chem. Eng., 1978, vol. 56, No. 5.