

**ДЕКРЕМЕНТЫ ЗАТУХАНИЯ КОЛЕБАНИЙ  
И ЭФФЕКТИВНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ТЕПЛООБМЕНА  
ПУЗЫРЬКОВ, РАДИАЛЬНО ПУЛЬСИРУЮЩИХ В ЖИДКОСТИ**

**Р. И. НИГМАТУЛИН, Н. С. ХАБЕЕВ**

(Москва)

Рассматриваются паровые (газовые) пузырьки, совершающие свободные радиальные колебания в жидкости. Получены выражения для частоты и декремента затухания малых свободных колебаний пузырьков. Определены эффективные коэффициенты теплообмена радиально пульсирующих пузырьков с жидкостью.

В литературе, посвященной динамике и тепломассообмену паровых и газовых пузырьков (см., например, [1, 2] и библиографию в них), в основном исследуется влияние процессов тепло- и массообмена на динамику пузырьков. Представляют интерес, однако, и обратные задачи, а именно, как влияет динамика, в частности радиальные пульсации, на интенсификацию процессов тепло- и массообмена пузырьков с жидкостью. В [3] показано, что тепловые эффекты играют определяющую роль в формировании структуры волны в жидкости с пузырьками газа. В то же время расчет двухфазных течений, особенно нестационарных, с учетом неоднородностей распределения температуры в фазах представляет очень трудоемкую задачу и требует большого количества машинного времени (пример такого расчета приведен в [4]). Поэтому при расчете течений парожидкостных смесей с пузырьковой структурой основная проблема состоит в задании коэффициентов межфазного взаимодействия, в частности теплового, в рамках двухтемпературной модели и справедливых для некоторого класса процессов.

1. Система основных уравнений, описывающих процессы тепломассообмена и динамику сферического гомобаричного парового (газового) пузырька в жидкости, приведена в [1, 2]. Уравнения притока тепла, неравновесности и состояния для фаз в сферических эйлеровых координатах  $r, t$  имеют вид

$$\rho_v \left( \frac{\partial u_v}{\partial t} + v_v \frac{\partial u_v}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_v r^2 \frac{\partial T_v}{\partial r} \right) + \frac{p_v}{\rho_v} \frac{d\rho_v}{dt}$$

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho_v v_v) = 0, \quad p_v(t) = B \rho_v(r, t) T_v(r, t)$$

$$(1.1) \quad \rho_l \left( \frac{\partial u_l}{\partial t} + v_l \frac{\partial u_l}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_l r^2 \frac{\partial T_l}{\partial r} \right)$$

$$v_l = w_l R^2 / r^2, \quad u_v = c_v T_v, \quad u_l = c_l T_l, \quad \rho_l = \text{const}$$

где  $\rho$  — плотность,  $T$  — температура,  $p$  — давление,  $v$  — скорость,  $u$  — удельная внутренняя энергия,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $R$  — радиус пузырька,  $w_l$  — массовая скорость жидкости на поверхности пузырька,  $B$  — газовая постоянная,  $c_v$  — удельная теплоемкость пара при постоянном объеме. Индексы  $l$  и  $v$  относятся соответственно к параметрам жидкости и пара, индекс 0 — к параметрам в невозмущенном состоянии.

Граничные условия для уравнений притока тепла имеют вид [5]

$$r=0: \frac{\partial T_v}{\partial r} = 0; \quad r=\infty: T_l = T_0$$

$$(1.2) \quad r=R(t): \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial r} - \lambda_v \frac{\partial T_v}{\partial r} = j l, \quad T_v = T_l = T_s(p_v)$$

где  $T_s(p_v)$  — температура насыщения,  $j$  — скорость фазового перехода с единицы поверхности,  $l$  — удельная теплота испарения.

Скорость поверхности пузырька и массовые скорости фаз на этой поверхности связаны соотношениями

$$(1.3) \quad \dot{R} = \omega_l + j/\rho_l, \quad \dot{R} = w_v + j/\rho_v(R)$$

Уравнение пульсации пузырька при наличии фазовых переходов запишем в виде

$$(1.4) \quad R \dot{w}_l + \frac{3}{2} w_l^2 + 2 w_l \frac{j}{\rho_l} = \frac{p_v - p_\infty - 2\sigma/R}{\rho_l}$$

где  $p_\infty$  — давление жидкости вдали от пузырька,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения.

При выполнении условия гомобаричности, когда размер пузырька значительно меньше длины звуковой волны в паре, имеет место интеграл уравнения притока тепла для паровой фазы

$$(1.5) \quad \frac{dp_v}{dt} = \frac{3(\gamma-1)}{R} \left( \lambda_v \frac{\partial T_v}{\partial r} \right)_R - \frac{3\gamma p_v}{R} w_v, \quad \gamma = \frac{c_v + B}{c_v}$$

Условие гомобаричности позволяет также путем интегрирования уравнения неразрывности паровой фазы определить профиль скорости в пузырьке

$$(1.6) \quad v_v(r, t) = \frac{r}{R} w_v + \frac{\gamma-1}{\gamma p_v} \left[ \lambda_v \frac{\partial T_v}{\partial r} \Big|_r - \frac{r}{R} \lambda_v \frac{\partial T_v}{\partial r} \Big|_R \right]$$

2. В [1, 2] приведенная выше система уравнений решалась численно для различных режимов радиального движения пузырьков (колебания, рост, схлопывание) и показано, что из-за возникновения при пульсациях пузырей температурных «ям» и «горбов» в прилегающих к поверхности пузыря слоях газа и жидкости возможны ситуации, когда в некоторые промежутки времени тепловой поток направлен внутрь пузырька, хотя средняя температура газа в пузыре  $\langle T \rangle$  при этом выше температуры жидкости. Поэтому формальное определение числа Нуссельта по формуле

$$(2.1) \quad Nu = \frac{2Rq_R}{\lambda(\langle T \rangle - T_\sigma)}, \quad q_R = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_R$$

приводит в некоторые промежутки времени к отрицательным мгновенным значениям чисел Нуссельта, и встает вопрос о способе их осреднения. В зависимости (2.1)  $R$  — радиус пузыря,  $T_\sigma$  — температура его поверхности,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности газа. Представляется естественным эффективные коэффициенты теплообмена выбирать из условия, чтобы они обеспечивали такую же тепловую диссипацию (затухание колебаний пузырька), что и в точном решении.

В [6] рассмотрены малые свободные колебания парового пузыря, когда радиус его может быть описан действительной частью выражения

$$(2.2) \quad R = R_0(1 + \delta \exp(ht)), \quad |\delta| \ll 1$$

Там же получено характеристическое уравнение как условие существования нетривиального решения системы линейных уравнений. Для квази-

равновесных пузырьков в идеальной жидкости при состояниях, далеких от критических, оно имеет вид

$$(2.3) \quad H + \frac{3\gamma NH}{H^2 - NS} + M = 0$$

$$H = \frac{hR_0^2}{a_v}, \quad N = \frac{p_0 R_0^2}{\rho_l a_v^2}, \quad S = \frac{2\sigma}{R_0 p_0}, \quad E = \sqrt{\frac{a_v}{a_l}}$$

$$M = k(1 + E\sqrt{H}) + LB_1, \quad B_1 = \sqrt{H} \operatorname{cth} \sqrt{H} - 1$$

$$k = 3(\gamma - 1)\kappa^2 \frac{\lambda_l}{\lambda_v}, \quad L = 3(\gamma - 1)(1 - \kappa)^2, \quad \kappa = \frac{c_p T_0}{l}$$

$$a_l = \frac{\lambda_l}{\rho_l c_l}, \quad a_v = \frac{\lambda_v}{\rho_v c_p}, \quad c_p = c_v + B, \quad T_0 = T_s(p_0)$$

В случае достаточно крупных паровых пузырьков, когда влияние процессов тепло- и массообмена на динамику пузырьков мало, можно получить асимптотическое решение уравнения (2.3). В этом случае можно пренебречь капиллярными эффектами, а решение искать в виде [7]

$$(2.4) \quad \begin{aligned} H &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad r = \sqrt{3\gamma N}(1 + \varepsilon) \\ \sin \varphi &\approx 1, \quad \cos \varphi < 0, \quad |\cos \varphi| \ll 1, \quad |\varepsilon| \ll 1 \end{aligned}$$

Подставив (2.4) в уравнение (2.3), получим

$$(2.5) \quad \begin{aligned} r \cos \varphi + \frac{3\gamma N}{r} \cos \varphi + k \left( 1 + E\sqrt{r} \cos \frac{\varphi}{2} \right) + L \operatorname{Re}(B_1) &= 0 \\ r \sin \varphi - \frac{3\gamma N}{r} \sin \varphi + kE\sqrt{r} \sin \frac{\varphi}{2} + L \operatorname{Im}(B_1) &= 0 \end{aligned}$$

Из (2.4) следует, что  $\varphi \approx \pi/2$  и для  $\sqrt{H}$  справедливо представление

$$(2.6) \quad \sqrt{H} = \frac{b}{2}(1 + i), \quad b = (12\gamma N)^{1/4}$$

Подставив (2.6) в (2.5), с учетом (2.4) получим

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \cos \varphi &= -\frac{L \operatorname{Re}(B_1) + k(1 + 1/2 Eb)}{b^2} \\ \varepsilon &= -\frac{L \operatorname{Im}(B_1) + 1/2 kEb}{b^2} \\ \operatorname{Re}(B_1) &= \frac{b}{2} \frac{\operatorname{sh} b + \sin b}{\operatorname{ch} b - \cos b} - 1 \\ \operatorname{Im}(B_1) &= \frac{b}{2} \frac{\operatorname{sh} b - \sin b}{\operatorname{ch} b - \cos b} \end{aligned}$$

Для собственной частоты парового пузырька и логарифмического декремента затухания его колебаний, вызванного тепло- и массообменом, получим следующие выражения:

$$\omega = \frac{v_0}{R_0} \left[ 1 - \frac{L \operatorname{Im}(B_1)}{b^2} - \frac{kE}{2b} \right]$$

$$(2.8) \quad \Lambda = -2\pi \frac{\operatorname{Re}(h)}{|\operatorname{Im}(h)|} = \frac{2\pi L}{b^2} \operatorname{Re}(B_1) + k\pi \frac{bE+2}{b^2}, \quad b \gg kE$$

Если выполнено условие  $\operatorname{Re}_V \gg 1$ , то формулы (2.8) упрощаются

$$(2.9) \quad \omega = \frac{v_0}{R_0} \left[ 1 - \frac{L}{2\sqrt{\operatorname{Re}_V}} - \frac{kE^2}{2\sqrt{\operatorname{Re}_l}} \right], \quad \sqrt{\operatorname{Re}_l} \gg kE^2$$

$$\Lambda = \frac{\pi L}{\operatorname{Re}_V} (\sqrt{\operatorname{Re}_V} - 2) + \frac{\pi kE^2}{\operatorname{Re}_l} (\sqrt{\operatorname{Re}_l} + 2)$$

$$v_0 = \omega_0 R_0 = \sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\rho_l}}$$

Здесь  $\operatorname{Re}_i = 2R_0 v_0 / a_i$  ( $i=l, V$ ) — числа Пекле, в которых в качестве скорости выбрана характерная радиальная скорость малых свободных адиабатических колебаний пузырька [7].

В выражениях для декремента затухания колебаний пузырька (2.8), (2.9) первое слагаемое вызвано тепловым сопротивлением пара в пузырьке, а второе — тепловым сопротивлением жидкости. Видно, что при  $\kappa \rightarrow 1$  первая составляющая декремента затухания стремится к нулю. Это связано с тем, что в квазиравновесном приближении при  $\kappa \approx 1$  температура пара в пузырьке практически однородна и равна температуре насыщения [8]. Следует отметить, что для паровых пузырьков при состояниях, далеких от критических, первая составляющая декремента затухания значительно меньше, чем вторая.

При отсутствии фазовых переходов ( $l = \infty$ ) формула (2.9) дает следующее выражение для декремента затухания колебаний газового пузырька, обусловленного тепловой диссипацией:

$$(2.10) \quad \Lambda = \frac{6(\gamma-1)\pi}{b^2} \left( \frac{b \operatorname{sh} b + \sin b}{2 \operatorname{ch} b - \cos b} - 1 \right)$$

При  $\operatorname{Re}_g \gg 1$  формула (2.10) упрощается

$$(2.11) \quad \Lambda = \frac{3(\gamma-1)\pi}{\operatorname{Re}_g} (\sqrt{\operatorname{Re}_g} - 2), \quad \operatorname{Re}_g = \frac{2R_0 v_0}{a_g}$$

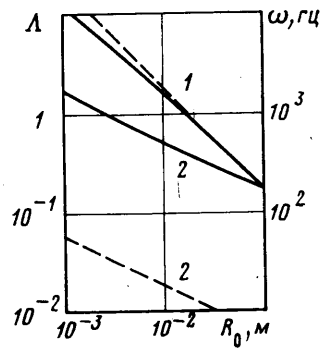
Аналогично можно получить решение уравнения (2.3) в другом предельном случае достаточно мелких газовых пузырьков, колебания которых происходят в режиме, близком к изотермическому, с частотой

$$\omega = |\operatorname{Im}(h)| = \sqrt{3p_0/\rho_l} R_0^{-1}$$

В этом случае выражение для декремента затухания колебаний пузырька имеет вид

$$(2.12) \quad \Lambda = \frac{(\gamma-1)\pi}{30\gamma} \operatorname{Re}, \quad \operatorname{Re} = \frac{2R_0}{a_g} \sqrt{\frac{3p_0}{\rho_l}} \ll 1$$

На фигуре приведены кривые зависимости собственной частоты  $\omega$  и логарифмического декремента затухания  $\Lambda$  (соответственно кривые 1



и 2) колебаний парового пузырька в воде при атмосферном давлении от радиуса, полученные путем численного решения уравнения (2.3). Пунктирные кривые — соответствующие характеристики пузырька при отсутствии фазовых превращений ( $l = \infty$ ). Результаты расчетов хорошо согласуются с аналитическими зависимостями (2.9), (2.11). Так как собственные частоты адиабатического и изотермического пузырьков близки между собой (отличаются в  $\sqrt{\gamma}$ ), формула (2.10) достаточно хорошо приближенно описывает поведение всей кривой декремента теплового затухания колебаний газовых пузырьков в целом [9]. Как показывают результаты численного решения задачи о нелинейных колебаниях пузырьков [4, 2], полученные аналитические формулы для декрементов затухания малых колебаний пузырьков, вызванного тепломассообменом, достаточно хорошо описывают и затухание нелинейных радиальных колебаний пузырьков.

3. Используя полученные выражения для декремента затухания колебаний пузырьков, обусловленного тепломассообменом, можно определить эффективные коэффициенты вязкости жидкости для адиабатического пузырька, вызывающей такое же затухание колебаний, как и процессы тепломассообмена. Рассмотрение теплообмена как диссипативного процесса с некоторым фиктивным коэффициентом вязкости проводилось в [10]. Логарифмический декремент затухания колебаний пузырька, вызванного вязкой диссипацией, имеет вид [9]

$$(3.1) \quad \Lambda = 4\pi \frac{\nu}{R_0 v_0}$$

Приравняв выражения (3.1) и (2.9), получим следующее выражение для эффективного кинематического коэффициента вязкости жидкости, вызывающей то же затухание при пульсациях крупных паровых пузырей, что и тепломассообмен:

$$(3.2) \quad \nu = \frac{1}{8} [a_l k E^2 (\sqrt{\text{Pe}_l} + 2) + a_v L (\sqrt{\text{Pe}_v} - 2)]$$

Аналогично определенные эквивалентные коэффициенты вязкости для пульсаций крупных и достаточно мелких газовых пузырьков имеют соответственно вид

$$(3.3) \quad \nu = \frac{3(\gamma-1)}{8} a_g (\sqrt{\text{Pe}_g} - 2), \quad \text{Pe}_g \gg 1$$

$$\nu = \frac{(\gamma-1)}{20\gamma} \frac{p_0 R_0^2}{\rho_l a_g}, \quad \text{Pe} \ll 1$$

4. В рамках трехтемпературной модели (пузырек — межфазная поверхность — жидкость) основные уравнения, описывающие динамику, состояние, тепло- и массообмен, при малых колебаниях парового пузырька имеют вид [2]

$$\dot{R} = w_i + \frac{j}{\rho_i} \quad (i=l, V); \quad \rho_l R \dot{w}_l = p_v - p_\infty - \frac{2\sigma}{R}$$

$$\rho_v c_p \dot{T} = \dot{p}_v - \frac{3\beta_v}{R} (T_v - T_s)$$

$$\dot{p}_v = -\frac{3(\gamma-1)}{R} \beta_v (T_v - T_s) - \frac{3\gamma p_v}{R} w_v$$

$$(4.1) \quad \frac{dT_s}{dp_v} = \frac{T_s}{l} \left( \frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l} \right)$$

$$j\dot{l} = \beta_v (T_v - T_s) + \beta_l (T_l - T_s)$$

Здесь  $\beta_l$  и  $\beta_v$  — коэффициенты теплоотдачи от поверхности пузырька соответственно к жидкости и пару.

Будем искать решение системы (4.1) в виде

$$R=R_0(1+\delta e^{ht}), \quad p_v=p_0(1+P_v e^{ht}), \quad T=T_0(1+\theta e^{ht})$$

$$w=\frac{a_v}{R_0} W e^{ht}, \quad j=\frac{a_v \rho_{v0}}{R_0} I e^{ht}$$

При этом систему (4.1), используя введенные ранее обозначения, запишем в виде

$$W_l=\delta H-I \frac{\rho_{v0}}{\rho_l}, \quad W_v=\delta H-I, \quad P_v=\frac{HW_l}{N}-S\delta$$

$$H\theta=\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)HP_v-\frac{3}{2}Nu_v(\theta-\theta_s)$$

$$HP_v=H\theta-3(\delta H-I), \quad \theta_s=\frac{p_0}{l}\left(\frac{1}{\rho_{v0}}-\frac{1}{\rho_l}\right)P_v$$

$$\frac{2}{\kappa}I=Nu_v(\theta-\theta_s)-Nu_l\frac{\lambda_l}{\lambda_v}\theta_s$$

$$(4.2) \quad Nu_l=\frac{2R\beta_l}{\lambda_l} \quad (l=l, v)$$

Рассмотрим случай достаточно крупных пузырьков, когда влияние процессов тепломассообмена на динамику пузырьков мало, а условия в системе достаточно далеки от критических ( $\rho_v \ll \rho_l$ ). Условие существования нетривиального решения системы (4.2) приводит к кубическому уравнению относительно  $H$ :

$$(4.3) \quad H^3 + \frac{1}{2}[(L+3)Nu_v + kNu_l]H^2 + (3\gamma N + \frac{3}{4}kNu_vNu_l)H + \frac{3}{2}\gamma N Nu_v = 0$$

Отыскивая решение уравнения (4.3) в форме (2.4), получим

$$(4.4) \quad \cos 3\varphi + [(L+3)Nu_v + kNu_l] \frac{\cos 2\varphi}{2\sqrt{3}\gamma N} + \left(1 + \frac{kNu_vNu_l}{4\gamma N}\right) \cos \varphi + \frac{3Nu_v}{2\sqrt{3}\gamma N} = 0$$

Условия (2.4) указывают на возможность представления  $\varphi = \pi/2 + \beta$ ,  $\beta > 0$ ,  $\beta \ll 1$ . Тогда в (4.4) тригонометрические функции можно заменить следующими их приближенными значениями:

$$\cos \varphi \approx -\beta, \quad \sin \varphi \approx 1, \quad \cos 2\varphi \approx -1$$

$$\cos 3\varphi \approx 3\beta, \quad \sin 3\varphi \approx -1$$

В результате получим

$$(4.5) \quad 3\beta - \frac{(L+3)Nu_v + kNu_l}{2\sqrt{3}\gamma N} - \left(1 + \frac{kNu_vNu_l}{4\gamma N}\right)\beta + \frac{3Nu_v}{2\sqrt{3}\gamma N} = 0$$

Если выполнено условие

$$(4.6) \quad kNu_vNu_l \ll 4\gamma N$$

то из (4.5) следует

$$(4.7) \quad \beta = \frac{L Nu_v + k Nu_l}{4\sqrt{3}\gamma N}$$

Это решение получено в предположении, что  $\beta \ll 1$ . Из (4.7) видно, что для этого должны быть выполнены условия

$$(4.8) \quad L Nu_v \ll 4\sqrt{3}\gamma N, \quad k Nu_l \ll 4\sqrt{3}\gamma N$$

Из (4.8) следует, что условие (4.6) при этом выполняется, т. е. пренебрежение перекрестным эффектом (произведением чисел Нуссельта) при решении уравнения (4.5) допустимо.

Для логарифмического декремента затухания колебаний парового пузырька, обусловленного теплообменом, получим следующее выражение:

$$(4.9) \quad \Lambda = 2\pi\beta = \frac{\pi}{Re_v} [L Nu_v + k Nu_l]$$

Приравняв составляющие декремента затухания малых колебаний парового пузырька (4.9) к соответствующим выражениям (2.9), полученным из точных уравнений, получим следующие формулы для эффективных коэффициентов теплообмена радиально пульсирующего парового пузырька с жидкостью:

$$(4.10) \quad Nu_v = \sqrt{Pe_v} - 2, \quad Pe_v \gg 1 \\ Nu_l = \sqrt{Pe_l} + 2, \quad \sqrt{Pe_l} \gg kE^2$$

В случае, когда  $Pe_l \ll 1$ , влияние динамики колебаний на теплообмен мало и формула (4.10) дает  $Nu_l = 2$  — известное стационарное решение для неподвижной сферы [11].

Аналогично полученное выражение для эффективного коэффициента теплообмена пульсирующего газового пузырька с жидкостью имеет вид

$$(4.11) \quad Nu = \sqrt{Pe_g} - 2, \quad Pe_g \gg 1$$

Выражение для декремента затухания колебаний достаточно мелких газовых пузырьков в рамках двухтемпературной модели имеет вид

$$(4.12) \quad \Lambda = \frac{(\gamma-1)\pi Pe}{3\gamma Nu}, \quad Pe \ll 1$$

Приравняв выражения (2.12) и (4.12), получим, что при пульсациях газового пузырька в режиме, близком к изотермическому,  $Nu = 10$ . Такое же значение для числа Нуссельта в этих условиях было получено ранее в [12], где исследовалось поведение пузырьков в размытой волне сжатия, когда радиус пузырька уменьшается по экспоненциальному закону.

Как показывают результаты численного решения задачи о нелинейных колебаниях пузырьков [1, 2], формулы (4.10), (4.11) достаточно хорошо описывают поведение пузырьков и при нелинейных режимах, например в ударных волнах умеренной интенсивности [3, 4].

Отметим, что эти формулы справедливы и для экспоненциального сжатия пузырьков, соответствующего поведению их в начале размытой волны, когда изменение радиуса пузырька описывается формулой

$$(4.13) \quad R = R_0(1 - \delta e^{\alpha t}), \quad \alpha > 0$$

В этом случае в качестве характерной скорости в числе Пекле следует брать  $2R_0\alpha$ , т. е.  $Pe=4R_0^2\alpha/a$ .

Для газовых пузырьков это показано в [12]. В случае парового пузырька по определению чисел Нуссельта можно записать цепочку равенств

$$(4.14) \quad \begin{aligned} Nu_l &= \frac{2R\beta_l}{\lambda_l} = \frac{2R}{T_l - T_\sigma} \left( \frac{\partial T_l}{\partial r} \right)_R \\ Nu_V &= \frac{2R}{T_\sigma - \langle T_V \rangle} \left( \frac{\partial T_V}{\partial r} \right)_R \end{aligned}$$

Подставив в (4.14) решения, описывающие распределение температуры [6], получим

$$(4.15) \quad \begin{aligned} Nu_l &= 2(1 + E\sqrt{H}) = 2 + \sqrt{Pe_l} \\ Nu_V &= \frac{2HB_1}{H - 3B_1}, \quad H = \frac{\alpha R_0^2}{a_V}, \quad Pe_i = \frac{4R_0^2\alpha}{a_i} \quad (i=l, V) \end{aligned}$$

При  $Pe_V \gg 1$  выражение для внутреннего числа Нуссельта упрощается:  $Nu_V = \sqrt{Pe_V}$ , что совпадает с главным членом формулы (4.10).

Поступила 3 VII 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С. Теплообмен газового пузырька с жидкостью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 5.
2. Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С. Динамика паровых пузырьков. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 3.
3. Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С., Шаганов В. Ш. Об ударных волнах в жидкости с пузырьками газа. Докл. АН СССР, 1974, т. 214, № 4.
4. Айдагулов Р. Р., Хабеев Н. С., Шаганов В. Ш. Структура ударной волны в жидкости с пузырьками газа с учетом нестационарного межфазного теплообмена. ПМТФ, 1977, № 3.
5. Лабунцов Д. А., Мурагова Т. М. Физические и методические основы формулировки задач тепло- и массообмена при фазовых превращениях. В кн. Тепло- и массообмен, т. 2, ч. 1. Минск, 1972.
6. Хабеев Н. С. Эффекты теплообмена и фазовых переходов при колебаниях паровых пузырьков. Акуст. ж., 1975, т. 21, № 5.
7. Minnaert M. On musical air-bubbles and the sounds of running water. Phil. Mag., Ser. 7, 1933, vol. 16, No. 104.
8. Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С. Динамика и тепломассообмен парогазовых пузырьков с жидкостью. В сб.: Некоторые вопросы механики сплошной среды. М., Изд-во МГУ, 1978.
9. Charman R. B., Plesset M. S. Thermal effects in the free oscillation of gas bubbles. J. Basic Engr. Trans. ASME, Ser. D, 1971, vol. 93, No. 3.
10. Prosperetti A. Thermal effects and damping mechanisms in the forced radial oscillations of gas bubbles in liquids. J. Acoust. Soc. Amer., 1977, vol. 61, No. 1.
11. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964.
12. Хабеев Н. С. Об одном аналитическом решении задачи теплообмена газового пузырька с жидкостью. Вестн. МГУ, Матем. мех., 1976, № 5.