МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1980

УДК 532.529

ОБ ОСРЕДНЕННОМ ОПИСАНИИ ЖИДКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПУЗЫРЬКИ ГАЗА

А. Л. БЕРДИЧЕВСКИЙ

(Москва)

В работе выведено осредненное уравнение, описывающее потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости, вызванное расширением и поступательным движением пузырьков, расположенных в узлах периодической решетки. Вычисление коэффициентов осредненного уравнения сводится к решению некоторой задачи на ячейке периодов. Точное решение этой задачи строится в виде ряда по периодическим гармоническим функциям. Выписывается бесконечная система уравнений для коэффициентов ряда и дается ее асимптотический анализ при малых объемных концентрациях пузырьков c.

Постановка задачи. Рассмотрим в некоторый момент времени трехмерную область V и в ней пузырьки газа A_α, расположенные в узлах x_α периодической решетки с периодами $b\tau_1$, $b\tau_2$, $b\tau_3$ (b — максимальный шаг решетки, x_α — декартовы координаты α-го узла, α — целочисленный вектор). Пузырьки A_α являются сферами радиуса a_α, двигающимися поступательно со скоростью u_α и расширяющимися со скоростью $\dot a_\alpha$, причем a_α, $\dot a_\alpha$ и u_α — мало меняющиеся функции номера α.

Потенциал течения $\Phi(x)$ идеальной несжимаемой жидкости доставляет минимум функционалу

$$I(\Phi)=\int\limits_{V-\sum\limits_\alpha A_\alpha}\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}d^3x+\sum_\alpha\int\limits_{\partial A_\alpha}\Phi(x)(\dot a_\alpha+u_\alpha{}^i\nu_i)\,d^2x-\int\limits_{\partial V}\Phi(x)h(x)\,d^2x \tag{1}$$

Здесь d^3x и d^2x — элементы объема и площади соответственно, ν_i — единичная нормаль на поверхности ∂A_α пузыря A_α, внешняя к области A_α, $h(x)$ — нормальная компонента скорости жидкости на границе ∂V в области V, латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3 и по повторяющимся верхнему и нижнему индексам производится суммирование.

Отыскание потенциала течения $\Phi(x)$ ввиду сложной геометрии области $V-\sum\limits_\alpha A_\alpha$ оказывается практически невыполнимым. Для построения приближенного решения проведем осреднение.

Осреднение функционала (1) в отсутствие расширения пузырьков было рассмотрено в [1]. Для расширяющихся пузырьков осреднение выполняется аналогично.

Осреднение. Разобьем область V на одинаковые ячейки B_α (B_α — параллелепипед, натянутый на векторы $b\tau_1$, $b\tau_2$, $b\tau_3$, с центром в центре области A_α) и рассмотрим область $B-A$, где B — параллелепипед с центром в начале координат и образующими векторами τ_1, τ_2, τ_3, а область A – сфера радиуса a $(a\equiv a_\alpha/b)$ с центром также в начале координат. Объемы областей B_α, B, A и т. д. будем обозначать $|B_\alpha|$, $|B|$, $|A|$ и т. д. соответственно.

Как известно [2], решение $\Phi(x)$ задачи о минимуме функционала (1) с точностью до малых порядка $o(b/l)$ (l – характерный размер области V) можно представить в виде

$$\Phi(x)=\varphi(x)+b\psi(y,x),\qquad y\equiv x/b \tag{2}$$

Здесь $\varphi(x)$ и $\psi(y, x)$ – мало меняющиеся функции x, определенные по x во всей области V, $\psi(y, x)$ – периодическая по y (y пробегает значения внутри области $B-A$).

Будем считать, что среднее значение ψ по области $B-A$ равно нулю:

$$\langle\psi\rangle_{B-A}\equiv\frac{1}{|B-A|}\int\limits_{B-A}\psi\, d^3y=0 \tag{3}$$

Отметим, что выполнения ограничения (3) можно добиться подходящим переопределением функций $\varphi(x)$ и $\psi(y, x)$.

Представим интеграл по $V-\sum\limits_\alpha A_\alpha$ в формуле (1) в виде суммы интегралов по областям $B_\alpha-A_\alpha$. Перегруппировав члены и воспользовавшись тем, что $\varphi(x)$ и $\varphi_{,i}\equiv\partial\varphi/\partial x^i$ с точностью до малых порядка b постоянны внутри каждой ячейки, получим

$$I=\sum_\alpha\left\{J_\alpha+cu_\alpha{}^i\varphi_{,i}+\varphi\dot a_\alpha\frac{4\pi a_\alpha{}^2}{|B_\alpha|}\right\}|B_\alpha|-\int\limits_{\partial V}\varphi h\, d^2x \tag{4}$$

$$c(x_\alpha)\equiv|A_\alpha|/|B_\alpha|$$

$$J\equiv\frac{1}{2|B|}\int\limits_{B-A}(\varphi_{,i}+\psi_{|i})(\varphi^{,i}+\psi^{|i})\,d^3y+\frac{1}{|B|}\int\limits_{\partial A}\psi(\dot a+u^i\nu_i)\,d^2y \tag{5}$$

$$\psi_{|i}\equiv\psi^{|i}\equiv\partial\psi/\partial y^i,\qquad \varphi_{,i}\equiv\varphi^{,i}$$

Номер α в формуле (5) опущен, так как она имеет один и тот же вид во всех ячейках, а зависимость функционала J от координат x_α осуществляется только через зафиксированные, постоянные внутри ячейки B величины $\varphi_{,i}(x_\alpha)$, a_α, $\dot a_\alpha$, u_α.

При $b\to0$ сумма в (4) становится интегральной и функционал I принимает вид

$$I=\int\limits_V(J+cu^i\varphi_{,i}+\varphi\dot c)\,d^3x-\int\limits_{\partial V}\varphi h\, d^2x \tag{6}$$

Здесь $u^i(x)$, $c(x)$, $a(x)$, $\dot c(x)$ – гладкая интерполяция функций $u_\alpha{}^i$, $c(x_\alpha)$, a_α/b, $\dot a_\alpha 4\pi a_\alpha{}^2/|B_\alpha|$ соответственно [3].

Минимум функционала I будем искать следующим образом. Найдем сначала минимум функционала J по всем периодическим функциям ψ, удовлетворяющим ограничениям (3). Очевидно при этом, что минимальное значение J^* функционала J является квадратичной формой по u^i, $\varphi_{,i}$ и $\dot a$. Подставляя ее выражение в формулу (6), получим осредненный функционал $\langle I\rangle$, минимизация которого при заданных $u_i(x)$, $\dot a(x)$ и $a(x)$ позволит найти средний потенциал $\varphi(x)$.

Таким образом, задача осреднения сводится к нахождению минимального значения функционала J.

Осредненные уравнения. Представим функцию ψ в виде суммы четной ψ_2 и нечетной ψ_1 частей: $\psi=\psi_1+\psi_2$. Тогда функционал J разделится на сумму двух: J_1 и J_2, один из которых зависит только от ψ_1, а второй только от ψ_2:

$$J_1=\frac{1}{2|B|}\int\limits_{B-A}(\varphi_{,i}+\psi_{1|i})(\varphi^{,i}+\psi_1{}^{|i})\,d^3y+\frac{1}{|B|}\int\limits_{\partial A}\psi_1 u^i\nu_i\, d^2y \tag{7}$$

$$J_2=\frac{1}{2|B|}\int\limits_{B-A}\psi_{2|i}\,\psi_2{}^{|i}\,d^3y+\frac{1}{|B|}\int\limits_{\partial A}\psi_2\dot a\, d^2y$$

Функционалы J_1 и J_2 можно минимизировать независимо. Минимальное значение J_2^* функционала J_2 является функцией только $\dot a$. Поэтому оно играет роль аддитивной постоянной и при построении уравнения для среднего потенциала может быть опущено.

Минимизирующий элемент $\psi_1(y, x)$ функционала J_1 найден в работе [4], при этом минимальное значение J_1^* можно представить в виде

$$J_1^* = \frac{1-c}{2}\varphi_{,i}\varphi^{,i} + \frac{1}{2}(\lambda^{ij}-(1-c)\delta^{ij})(u_i-\varphi_{,i})(u_j-\varphi_{,j})$$

где λ^{ij} — тензор эффективной теплопроводности ячейки B, если истинные теплопроводности областей $B-A$ и A есть 1 и 0 соответственно.

Уравнения для определения среднего потенциала $\varphi(x)$ получаются варьированием функционала $\langle I\rangle$ и имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x^i}((1-c)v^i+cu^i)=\dot{c} \text{ в } V \tag{8}$$

$$((1-c)v^i+cu^i)\nu_i=h \text{ на } \partial V$$

Здесь средняя скорость жидкости v^i связана с градиентом среднего потенциала равенством

$$v^i \equiv \langle\varphi^{,i}+\psi_1{}^{|i}\rangle_{B-A} = \varphi^{,i} + \frac{1}{(1-c)}(\lambda^{ij}-(1-c)\delta^{ij})(\varphi_{,j}-u_j)$$

Отметим, что средняя скорость, вообще говоря, не является потенциальным вектором даже когда $u_j=0$, $\dot{a}=0$ и a не зависит от x.

Уравнение для $\varphi(x)$ в области V имеет форму уравнения неразрывности с источником. Если поступательная скорость пузырьков u не превосходит скорости расширения $\dot{a}$, то слагаемые в левой части первого уравнения (8), содержащие u, имеют порядок u/l и пренебрежимо малы по сравнению с интенсивностью источника. Отбрасывая эти слагаемые, придем к уравнению в V, которое имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\lambda^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\varphi=\dot{c} \tag{9}$$

Из уравнения (9) видно, что φ имеет порядок $\dot{c}l^2$. Поэтому слагаемые, содержащие скорость u, можно опустить также и в краевом условии.

Получим на $\lambda^{ij}\varphi_{,j}\nu_i=h$ на ∂V.

Задача на ячейке о расширении сферы. Несмотря на то что функционал J_2 не дает вклада в осредненные уравнения, вычисление его минимального значения представляет интерес в связи с определением кинетической энергии K (и, следовательно, инерциальных свойств) движения жидкости, вызванного пульсационным и поступательным движением пузырьков. Кинетическая энергия является функцией от v^i, u^i, $\dot{a}$, a.

Как известно [5], обобщенное уравнение Рэлея — Ламба, описывающее колебание системы пузырей, восстанавливается по известной кинетической энергии $K(v^i, u^i, \dot{a}, a)$ следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial K}{\partial \dot{a}} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(u^i\frac{\partial K}{\partial \dot{a}}\right) = \frac{3c}{a}\left(p_{\text{г}}-p-\frac{2\sigma}{a}\right)+\frac{3c}{a}\frac{\partial K^*}{\partial c}$$

Здесь $p_{\text{г}}$ и p — давление в пузырьках и в жидкости соответственно, σ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность жидкости, K^* — кинетическая энергия относительного движения жидкости $K^* \equiv K-\rho(1-c)v^iv_i/2$.

Для определения кинетической энергии K найдем функцию ψ_2, минимизирующую функционал J_2.

Варьирование функционала J_2 при ограничении (3) дает следующую задачу на ячейке для определения ψ_2:

$$\begin{aligned}&\Delta\psi_2=\varkappa \text{ в } B-A;\ \langle\psi_2\rangle_{B-A}=0\\ (10)\qquad &[\psi_2]_s\equiv\psi_2(y+\tau_s)-\psi_2(y)=0\\ &[\psi_{2|i}]\nu^i=0;\ \psi_{2|i}\nu^i=\dot a \text{ на } \partial A\end{aligned}$$

Здесь $\varkappa$ — множитель Лагранжа для ограничения (3). Интегрируя первое уравнение в (10) по области $B-A$ и используя краевые условия на ∂A и ∂B, найдем $\varkappa$:

$$\varkappa=-4\pi a^2\dot a/|B-A|$$

Представим ψ_2 в виде ряда по четным периодическим функциям $Q(y)$:

$$\psi_2=\sum_{n=0}^{\infty}L^{i_1\ldots i_{2n}}(Q_{|i_1\ldots i_{2n}}-\langle Q_{|i_1\ldots i_{2n}}\rangle_{B-A}) \tag{11}$$

Периодическая (с периодами τ_1, τ_2, τ_3) функция $Q(y)$ является решением уравнения

$$\Delta Q=4\pi/|B|+\sum_\alpha \delta(y-y_\alpha);\quad \langle Q\rangle_B=0$$

где $\delta(y)$ — δ-функция Дирака, суммирование распространяется по всем узлам y_α периодической решетки.

При помощи формулы

$$Q(y)=P(y)-\gamma_{ij}y^iy^j/2+Q_0$$

функция $Q(y)$ связана с гармонической функцией $P(y)$ и постоянным тензором γ_{ij}, зависящим только от геометрии решетки, которые определены в работе [1]. Значение постоянной Q_0 с точностью до знака совпадает с энергией Маделунга ионного кристалла.

В формуле (11) все члены ряда, за исключением первого $L(Q-\langle Q\rangle_{B-A})$, являются гармоническими функциями. Подстановка (11) в уравнение $\Delta\psi_2=\varkappa$ позволяет найти коэффициент

$$L=-a^2\dot a/(1-c) \tag{12}$$

Теперь функции (11) удовлетворяют всем уравнениям (10), за исключением краевого условия на ∂A. Это условие служит для вычисления коэффициентов $L^{i_1\ldots i_{2n}}$ $(n>0)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}L^{i_1\ldots i_{2n}}\nu^iQ_{|i_1\ldots i_{2n}i}+L\nu^iQ_{|i}=\dot a \text{ на } \partial A \tag{13}$$

Перепишем уравнение (13), выделив регулярную часть периодических функций в нуле ($Q'\equiv Q-1/|y|$; $|y|\equiv\sqrt{y^iy_i}$; $P'\equiv P-1/|y|$).

Используя формулу

$$y^i\left(\frac{1}{|y|}\right)_{|i_1\ldots i_m i}=-(m+1)\left(\frac{1}{|y|}\right)_{|i_1\ldots i_m} \tag{14}$$

и учитывая, что L имеет значение (12), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} L^{i_1\dots i_{2n}}\left(\nu^i P'_{|i_1\dots i_{2n}i} - \frac{4n+1}{a}\left(\frac{1}{|y|}\right)_{|i_1\dots i_{2n}}\right) + L\nu^i P_{|i}' = \tag{15}$$
$$= -\dot{a}(c+a\gamma_{ij}y^iy^j)/(1-c)$$

Формула (14) справедлива в силу теоремы Эйлера об однородных функциях.

Умножим уравнение (15) на сферическую гармонику $(1/|y|)_{|j_1\dots j_{2m}}$ и проинтегрируем до ∂A. Привлекая формулы

$$\int\limits_{\partial A} \left(\frac{1}{|y|}\right)_{|i_1\dots i_n} \left(\frac{1}{|y|}\right)^{|j_1\dots j_m} d^2y = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ a^{-2m} D^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_m} & m = n \end{cases} \tag{16}$$

$$\int\limits_{\partial A} \nu^j Q'_{|i_1\dots i_n j} \left(\frac{1}{|y|}\right)^{|j_1\dots j_m} d^2y = \tag{17}$$
$$= \frac{(-1)^m}{(2m-1)!!\,(m-1)!} Q'^{k_1\dots k_m}_{i_1\dots i_n} D^{j_1\dots j_m}_{k_1\dots k_m}$$

найдем

$$\frac{(4m+1)!!\,(2m-1)!}{a^{4m+1}} L^{i_1\dots i_{2m}} = LP'^{i_1\dots i_{2m}} + \tag{18}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} P'^{i_1\dots i_{2m}}_{j_1\dots j_{2n}} L^{j_1\dots j_{2n}} - \frac{L}{3}\begin{cases} (\gamma_{ij} + \delta_{ij}4\pi/3|B|) & m=1 \\ 0 & m>1 \end{cases}$$

Здесь $Q'_{i_1\dots i_n}$ и $P'_{i_1\dots i_n}$ – значения в нуле функций $Q'_{|i_1\dots i_n}$ и $P'_{|i_1\dots i_n}$, $(2m-1)!!\equiv 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2m-1)$.

Формула (16) выражает свойство ортогональности сферических гармоник, $D^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_n}$ – компоненты некоторого тензора, симметричного по перестановке любых двух верхних или двух нижних индексов. Значения этого тензора при выводе уравнений (18) несущественны. Для вывода формулы (17) функции $Q'_{|i_1\dots i_n}$ следует представить в окрестности нуля рядом Тейлора

$$Q_{|i_1\dots i_n} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} Q'_{i_1\dots i_n k_1\dots k_r} y^{k_1}\dots y^{k_r}$$

Отсюда видно, что

$$\nu^j Q_{|i_1\dots i_n j} = \frac{1}{a}\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r-1)!} Q_{i_1\dots i_n k_1\dots k_r} y^{k_1}\dots y^{k_r}$$

и остается заметить, что разложение произведения $y^{k_1}\dots y^{k_r}$ по сферическим гармоникам начинается со слагаемого $(-1)^r|y|^{2r+1}(1/|y|)_{|i_1\dots i_r}/(2r-1)!!$, а каждое последующее слагаемое содержит метрический тензор и его свертка с $Q'_{i_1\dots i_n k_1\dots k_r}$ дает ноль.

Из определения функций $Q'(y)$ и $P'(y)$ следует, что $Q'_{i_1\dots i_{2n+1}} = P'_{i_1\dots i_{2n+1}} = 0$;

$Q'_{i_1\ldots i_{2n}}=P'_{i_1\ldots i_{2n}}$, $n>1$; $Q_{ij}'=-\gamma_{ij}$, $P_{ij}'=0$; $P'(0)=0$. Поэтому при $m=1$ в первом приближении по a

$$L^{ij}=-\frac{a^5}{45}L\left(\gamma^{ij}+\frac{4\pi}{3|B|}\delta^{ij}\right)+\frac{a^5}{15}L^{l_1l_2l_3l_4}P'^{ij}_{l_1l_2l_3l_4}$$

Подстановка этого выражения в (18) при $m\geqslant 2$ показывает, что в первом приближении по a

$$L^{i_1\ldots i_{2m}}=-\frac{\dot{a}a^{4m+3}}{(1-c)(4m+1)!!(2m-1)!}P'^{i_1\ldots i_{2m}}$$

Если решетка обладает кубической симметрией, то [1] $\gamma_{ij}=-4\pi\delta_{ij}/3|B|$ и поэтому $L^{ij}=\dot{a}O(a^{16})$.

Решение уравнения (18) можно искать методом рекуррентных приближений по радиусу пузырей a.

Кинетическая энергия. Вычислим кинетическую энергию движения жидкости в ячейке, отнесенную к плотности жидкости. По определению

$$K=\frac{1}{2|B|}\int\limits_{B-A}\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}d^3y=\frac{1}{2|B|}\int\limits_{B-A}(\varphi_{,i}+\psi_{1|i})\times$$

$$\times(\varphi^{,i}+\psi_1{}^{|i})d^3y+\frac{1}{2|B|}\int\limits_{B-A}\psi_{2|i}\psi_2{}^{|i}\,d^3y\equiv K_1+K_2$$

Воспользовавшись формулой

$$v^i\equiv\langle\varphi^{,i}+\psi_1{}^{|i}\rangle_{B-A}=\varphi^{,i}-\frac{1}{|B-A|}\int\limits_{\partial A}\psi_1\nu^i\,d^2y=$$

$$=u^i+\frac{1}{(1-c)}\lambda^{ij}(\varphi_{,j}-u_j)$$

для K_1 можно получить

$$K_1=\frac{(1-c)}{2}v_iv^i+\frac{(1-c)}{2}(\Lambda_{ij}-\delta_{ij})(v^i-u^i)(v^j-u^j)$$

Здесь Λ_{ij} — матрица, обратная к матрице $\|\lambda^{ij}/(1-c)\|$.

Выражение для кинетической энергии K_2 при помощи уравнений (10) и (11) можно записать в виде

$$K_2=-\frac{\dot{a}}{2|B|}\int\limits_{\partial A}\psi_2\,d^2y=-\frac{\dot{a}}{2|B|}\sum_{n=0}^{\infty}L^{i_1\ldots i_{2n}}\times \tag{19}$$

$$\times\int\limits_{\partial A}(Q_{|i_1\ldots i_{2n}}-\langle Q_{|i_1\ldots i_{2n}}\rangle_{B-A})d^2y$$

Найдем интегралы по сфере, входящие в правую часть равенства (19). При $n=0$

$$\int\limits_{\partial A}(Q-\langle Q\rangle_{B-A})d^2y=4\pi a^2\left(\frac{1}{a}+\frac{c}{2a}+Q_0-\langle Q\rangle_{B-A}\right)$$

Здесь использованы теорема о среднем по сфере для гармонических функций условие, что $P'(0)=0$, а также определение функции $Q(y)$. Величина $\langle Q\rangle_{B-A}$ легко определится из условия $\langle Q\rangle_B=0$:

$$\langle Q\rangle_{B-A}=-\frac{c}{a(1-c)}\left(aQ_0+\frac{3c}{10}+\frac{3}{2}\right)$$

При $n=1$

$$\int\limits_{\partial A}(Q_{|ij}-\langle Q_{|ij}\rangle_{B-A})\,d^2y=-\frac{4\pi a^2}{(1-c)}\left(\gamma_{ij}+\frac{4\pi}{3|B|}\delta_{ij}\right)$$

При $n>1$

$$\int\limits_{\partial A}(Q_{|i_1\ldots i_{2n}}-\langle Q_{|i_1\ldots i_{2n}}\rangle_{B-A})\,d^2y=\frac{4\pi a^2}{(1-c)}P'_{i_1\ldots i_{2n}}$$

Таким образом

$$K_2=\frac{3\dot a^2c}{2(1-c)^2}\left(1+aQ_0+c-\frac{c^2}{5}\right)-\frac{\dot a\,4\pi a^2}{2|B|(1-c)}\times$$

$$\times L^{ij}\left(\gamma_{ij}+\frac{4\pi}{3|B|}\delta_{ij}\right)-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\pi a^2\dot a}{|B|(1-c)}L^{i_1\ldots i_{2n}}P'_{i_1\ldots i_{2n}}$$

Следовательно, с точностью до поправок порядка a^{18} кинетическая энергия K_2 задается формулой

$$K_2=\frac{3c\dot a^2}{2(1-c)^2}\left\{\left(1+aQ_0+c-\frac{c^2}{5}\right)-\right.\tag{20}$$

$$\left.-\frac{1}{45}(a^6\gamma_{ij}\gamma^{ij}-3c^2)+\frac{a^{10}}{5670}P'_{ijklmn}P'^{\,ijklmn}\right\}$$

Перепишем формулу (20) в случае, когда решетка обладает кубической симметрией. Из общей теории тензорных функций [6] можно получить, что инвариантные тензоры четвертого и шестого рангов, симметричные и обращающиеся в ноль при свертке по любым двум индексам, имеют только одну существенную компоненту:

$$P'_{ijkl}=p\left\{O_{ijkl}-\frac{1}{5}\delta_{(ij}\delta_{kl)}\right\}$$

$$P'_{ijklmn}=q\left\{\frac{77}{2}O_{ijkr}O^{r}_{lmn}-\frac{7}{2}\delta_{(ij}O_{klmn)}+\delta_{(ij}\delta_{kl}\delta_{mn)}\right\}$$

$$p=p'\left(\frac{4\pi}{3|B|}\right)^{5/3},\qquad q=q'\left(\frac{4\pi}{3|B|}\right)^{7/3}$$

Здесь круглыми скобками в индексах обозначается операция симметризации, в частности $\delta_{(ij}\delta_{kl)}\equiv\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}$.

Численные значения постоянных p', q', $Q_0'\equiv Q_0(4\pi/3|B|)^{-1/3}$ для трех типов кубических решеток – простой, объемоцентрированной и гранецентрированной – получены при помощи рядов, просуммированных в работе Борна и Мисра [7], и представлены в таблице [1].

Для решеток с кубической симметрией формула (20) принимает вид

$$K_2=\frac{3c\dot a^2}{2(1-c)^2}\left\{\left(1+c^{1/3}Q_0'+c-\frac{c^2}{5}\right)+\frac{c^{10/3}p'^2}{4725}+\frac{c^{14/3}q'^2}{140400}\right\}\tag{21}$$

Из (21) при максимальных значениях концентрации c для простой кубической решетки получим

---

[1] В работе [4] в формуле для тензора эффективных теплопроводностей на стр. 1366 допущена опечатка. Вместо постоянных p и q следует читать p' и q' соответственно.

$$c_{\max}\approx 0.523;\quad K_2'\equiv K_2\left\{\frac{3c\dot{a}^2}{2(1-c)^2}\left(1+c^{1/3}Q_0'+c-\frac{c^2}{15}\right)\right\}^{-1}=$$

$$=1+0.142+0.01$$

для объемоцентрированной решетки

$$c_{\max}\approx 0.68;\quad K_2'=1+0.135+0.07$$

для гранецентрированной решетки

$$c_{\max}\approx 0.74;\quad K_2'=1+0.08+0.12$$

При $c=0.3$ для простой кубической решетки

$$K_2=0.1905(1+0.0258+0.0009)\dot{a}^2/2$$

Из приведенных расчетов видно, что при больших значениях объемной концентрации пузырей следует учитывать обе поправки порядка $c^{10/3}$

	Простая кубическая решетка	Объемоцентрированная решетка	Гранецентрированная решетка
Q_0'	−1.7601	−1.791	−1.791
p'	17.132381	−5.3944281	−3.3023663
q'	37.97845	27.668955	−26.695776

и $c^{14/3}$ в формулах (21). При малых концентрациях ($c<0.3$) хорошее приближение для кинетической энергии жидкости дает формула

$$K_2=\frac{\dot{a}^2}{2}\frac{3c}{(1-c)^2}\left(1+c^{1/3}Q_0'+c-\frac{c^2}{5}\right)$$

Отметим, что поправки в кинетической энергии порядка $c^{1/3}$ в ячеечной модели жидкости с пузырьками ранее была получена в [8]. При этом значение коэффициента при $c^{1/3}$ равнялось −1.1.

Поступила 8 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бердичевский А. Л., Бердичевский В. Л.* Обтекание идеальной жидкостью периодической системы тел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 6.
2. *Бахвалов Н. С.* Осредненные характеристики тел с периодической структурой. Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 5.
3. *Бердичевский В. Л.* Об осреднении периодических структур. ПММ, 1977, т. 41, вып. 6.
4. *Бердичевский А. Л.* Об эффективной теплопроводности сред с периодически расположенными включениями. Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 6.
5. *Бердичевский В. Л.* Уравнения механики жидкости с частицами. Научн. тр. Ин-та механ. МГУ, 1980.
6. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1973.
7. *Born M., Misra R. D.* On the stability of cristal lattices, 4. Proc. Camb. Phil. Soc., 1940, vol. 36, No. 4.
8. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М., «Наука», 1978.