

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРИСОЕДИНЕНИЯ ПОТОКА ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. И. РУБАН

(Москва)

Исследуется двумерное ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в окрестности точки присоединения потока к твердой поверхности. Рассмотрен случай больших чисел Рейнольдса. Считается, что размеры срывной зоны по порядку величины совпадают с характерным размером обтекаемого тела. Асимптотическая теория такого течения строится на основе метода сращиваемых асимптотических разложений, примененного к анализу уравнений Навье — Стокса. Показано, что в окрестности точки присоединения течения является локально-невязким и описывается полной системой уравнений Эйлера. Решение соответствующей краевой задачи построено численно.

1. Постановка задачи. Структура течения в области присоединения потока к твердой поверхности имеет первостепенное значение для формирования всей срывной зоны. Это фундаментальное свойство отрывных течений было установлено еще в работах [1, 2]. На основании многочисленных экспериментальных данных авторы этих работ сформулировали приближенную модель сверхзвукового течения, содержащего стационарную зону отрыва. Согласно этой модели, течение газа в замкнутой срывной зоне считается (при больших числах Рейнольдса) медленным, так что давление остается постоянным вдоль всей границы зоны отрыва. Поэтому внешняя граница срывной зоны в сверхзвуковом потоке должна быть прямолинейной. В частности, если зона отрыва образуется за торцом обращенной вниз по потоку ступени (аналогичная картина течения реализуется за донным срезом твердого тела при симметричном обтекании его верхней и нижней поверхностей), тогда поток газа, движущийся вдоль верхней поверхности ступени, сначала разгоняется в течение расширения Прандтля — Майера около вершины ступени, а затем обтекает срывную зону вдоль ее прямолинейной границы. Наконец, около точки присоединения образуется косой скачок уплотнения, посредством которого внешний поток разворачивается в направлении, параллельном нижней поверхности ступени.

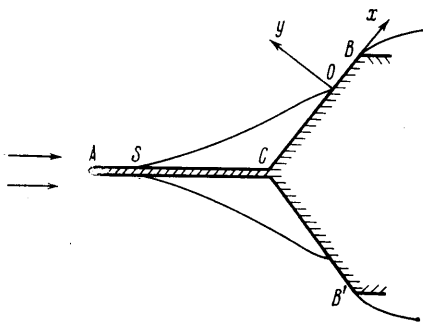
Очевидно, что до тех пор, пока не принимается во внимание вязкость потока, за каждой ступенью (или донным срезом тела) может быть построено целое семейство зон отрыва указанного типа. Параметром этого семейства может служить, например, угол между границей срывной зоны и нижней поверхностью ступени.

В действительности же, каким бы большим ни было число Рейнольдса, вдоль границы застойной области всегда образуется слой смешения, в котором вязкие силы играют существенную роль. Действие этих сил приводит к тому, что часть жидкости из застойной области вовлекается в поступательное движение вдоль слоя смешения в направлении к расположенной вниз по потоку поверхности. Следовательно, падение слоя смешения на стенку должно происходить таким образом, чтобы газ, вовлеченный в слой смешения из застойной зоны, был отброшен назад в эту зону.

Скорость газа в слое смешения монотонно возрастает от ее значения в срывной области до значения во внешнем потенциальном потоке. Поэтому рост давления вдоль слоя смешения в окрестности точки присоединения будет приводить к отбрасыванию в застойную область тех струек тока, скорость которых недостаточна для проникновения в зону повышенного давления. Согласно критерию Чепмена — Корста, перепад давления около точки присоединения должен быть как раз таким, чтобы скорость на разделительной линии тока обратилась в нуль в конце процесса торможения (торможение считается полностью невязким). Это условие и позволяет выбрать единственную конфигурацию застойной зоны.

Известно, однако, что модель Чепмена — Корста весьма грубо описывает явление присоединения потока и дает заметное расхождение с результатами эксперимента (см. [3]). В связи с этим в работе [4] явление присоединения сверхзвукового потока к твердой поверхности исследуется на основе строго асимптотического анализа со-

ответствующего решения уравнений Навье — Стокса при больших числах Рейнольдса. Применение метода сращиваемых асимптотических разложений (см., например, [5]) к этим уравнениям позволило установить, что в окрестности точки присоединения с характерными размерами порядка толщины слоя смещения течение является локально-невязким и описывается полной системой уравнений Эйлера (общие свойства таких течений рассмотрены в работе [6]). Исследование этой системы показывает, что в области локально-невязкого течения разделительная линия тока нигде (в масштабе этой области) не достигает поверхности тела, а лишь асимптотически стремится к этой поверхности при удалении вдоль нее вниз по потоку. Вслед за локально-невязкой областью расположена область свободного взаимодействия, где и происходит присоединение потока. Существенную роль в этом процессе играют силы вязкости. Интересно отметить, что полуэмпирический критерий Чемпена — Корста выполняется при $R \rightarrow \infty$ (R — число Рейнольдса), но уже первая поправка к значению давления достаточно велика и имеет порядок $R^{-1/4}$.



Фиг. 1

В настоящей работе асимптотический анализ уравнений Навье — Стокса применяется для исследования присоединения к твердой поверхности потока несжимаемой жидкости.

Изложенные ниже рассуждения являются достаточно общими. Однако для простоты изложения мы рассмотрим здесь конкретное течение, изображенное на фиг. 1 (экспериментальные наблюдения течений этого типа представлены, например, в работе [7]).

В предположении струйной теории такие течения исследовались в работе [8]. Оказалось, что уравнения Эйлера с условием непротекания на поверхности тела и

условием постоянства давления вдоль границы застойной зоны SO допускают для каждого тела BCB' (без пластины AC) целое семейство отрывных решений. Однако если положение точки отрыва S по отношению к обтекаемому телу задано, то все остальные характеристики течения определены единственным образом. Наличие перед телом пластины AC , очевидно, не влияет на эти «невязкие» решения.

Вопросу об определении положения точки отрыва в данном течении посвящена работа [9]. В этой работе проведен асимптотический анализ решений уравнений Навье — Стокса при больших числах Рейнольдса в окрестности точки отрыва потока S . В результате установлено, что положение точки отрыва является вполне определенным, и расстояние от точки отрыва до передней кромки пластины стремится к нулю с ростом числа Рейнольдса (R) по закону $R^{-1/2}$.

Рассмотрим теперь течение в окрестности точки присоединения потока O . Пусть L — длина пластины AC . Через U_0 обозначим невязкий предел ($R \rightarrow \infty$) скорости на свободной линии тока SO . Соответствующий предел для давления обозначим через P_0 . Введем декартову систему координат Lx, Ly , начало которой совпадает с точкой присоединения потока O (фиг. 1). Компоненты вектора скорости в этой системе координат обозначим через $U_0 u, U_0 v$, а приращение давления по сравнению с его значением на свободной линии тока — через $\rho U_0^2 p$. Плотность жидкости ρ и коэффициент кинематической вязкости ν будем считать постоянными. Для анализа этого течения при $R = U_0 L / \nu \rightarrow \infty$ воспользуемся методом сращиваемых асимптотических разложений, примененным к уравнениям Навье — Стокса.

2. Область внешнего потенциального течения. Рассмотрим сначала область внешнего потенциального течения (область 1), в которой $x \sim y \sim 1$. Асимптотическое представление решения в этой области при $R \rightarrow \infty$ будем искать в виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u(x, y, R) &= u_1(x, y) + \dots, & v(x, y, R) &= v_1(x, y) + \dots \\ p(x, y, R) &= p_1(x, y) + \dots, & g(x, R) &= g_1(x) + \dots \end{aligned}$$

Посредством $y = g(x, R)$ здесь обозначена форма нулевой линии тока SO . Подставляя (2.1) в уравнения Навье — Стокса, получим обычную систему уравнений для поля скоростей и уравнение Бернулли для давления

$$(2.2) \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad p_1 = \frac{1}{2}(1 - u_1^2 - v_1^2)$$

Кроме того, имеют место условие непротекания на поверхности тела и условие постоянства давления вдоль нулевой линии тока

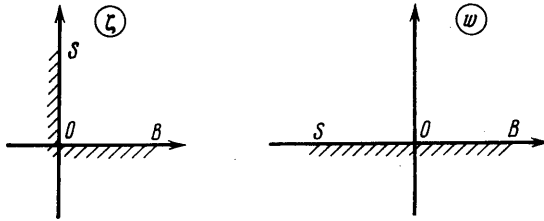
$$(2.3) \quad v_1(x, 0) = 0, \quad x > 0; \quad p_1(x, g_1) = 0, \quad x < 0$$

Введем комплексный потенциал скорости $w(z)$, такой, что

$$(2.4) \quad dw/dz = u_1 - iv_1, \quad z = x + iy$$

и функцию Жуковского $\zeta = \ln(dw/dz)$.

Согласно соотношениям (2.2), функции w и ζ являются аналитическими в поле течения. Области изменения этих функций в окрестности точки



Фиг. 2

присоединения представлены на фиг. 2. Нетрудно заметить (см. [10, 11]), что конформное преобразование плоскости w в плоскость ζ может быть представлено в виде

$$(2.5) \quad \zeta = w^{1/2}(2k_0 + 2k_1w + \dots), \quad w \rightarrow 0$$

где k_i — действительные постоянные, значения которых определяются глобальной схемой течения; $k_0 > 0$.

Из соотношения (2.5) и выражения для функции Жуковского следует, что в окрестности точки присоединения

$$w = z + \frac{4}{3}k_0z^{3/2} + \frac{5}{3}k_0^2z^2 + O(z^{5/2}), \quad z \rightarrow 0$$

Приравнявая нулю мнимую часть этого выражения, получим форму нулевой линии тока

$$(2.6) \quad g_1 = \frac{4}{3}k_0(-x)^{3/2} + O(-x)^{5/2}, \quad x \rightarrow -0$$

Компоненты вектора скорости могут быть получены с помощью соотношения (2.4), а давление определяется из уравнения Бернулли (2.2). При $z \rightarrow 0$

$$(2.7) \quad u_1 = 1 + 2k_0 \operatorname{Re}(z^{3/2}) + \dots, \quad v_1 = -2k_0 \operatorname{Im}(z^{3/2}) + \dots \\ p_1 = -2k_0 \operatorname{Re}(z^{3/2}) + \dots$$

Заметим, что приведенные выше рассуждения используют условие постоянства давления вдоль нулевой линии тока (2.3) лишь в окрестности точки присоединения. Последнее, очевидно, выполняется для любого стационарного течения. Дело в том, что точка присоединения является точ-

кой торможения потока в срывной области SOC , и производная давления вдоль нулевой линии тока обращается здесь в нуль.

Таким образом, полученные выражения являются универсальными и не зависят от предполагаемой схемы глобального течения.

3. Область внутреннего потенциального течения. Явление присоединения потока, как отмечалось выше, состоит в том, что часть жидкости из слоя смешения после взаимодействия со стенкой отбрасывается назад в застойную зону. Для этого давление в области присоединения (где $x \sim y \sim R^{-1/2}$) должно возрастать на величину порядка единицы. Заметим, однако, что решение для области 1 не обеспечивает такой особенности в поведении давления: согласно выражению (2.7), перепад давления в окрестности точки присоединения стремится к нулю с уменьшением размеров этой окрестности. Следовательно, между областью 1 и областью присоединения должна располагаться промежуточная область (область 2), в которой давление имеет требуемую особенность около точки присоединения.

Характерный размер области 2 обозначим через $\varepsilon(R)$, полагая $\varepsilon(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. Тогда, согласно условию срачивания с решениями (2.6), (2.7) для области 1, решение в области 2 представляется в виде следующих асимптотических разложений:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u(x, y, R) &= 1 + \varepsilon^{1/2} u_2(x_2, y_2) + \dots, & v(x, y, R) &= \varepsilon^{1/2} v_2(x_2, y_2) + \dots \\ p(x, y, R) &= \varepsilon^{1/2} p_2(x_2, y_2) + \dots, & g(x, R) &= \varepsilon^{3/2} g_2(x_2) + \dots \\ x &= \varepsilon x_2, & y &= \varepsilon y_2 \end{aligned}$$

В результате подстановки этих разложений в уравнения Навье – Стокса получим

$$(3.2) \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_2}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} = 0$$

Внешние краевые условия могут быть получены в результате срачивания разложений (3.1) с решениями для области 1. При $z_2 = x_2 + iy_2 \rightarrow \infty$

$$(3.3) \quad \begin{aligned} u_2 &= 2k_0 \operatorname{Re}(z_2^{1/2}) + \dots, & v_2 &= -2k_0 \operatorname{Im}(z_2^{1/2}) + \dots \\ p_2 &= -2k_0 \operatorname{Re}(z_2^{1/2}) + \dots \end{aligned}$$

Необходимо, кроме того, поставить краевое условие непротекания на поверхности тела за точкой присоединения и краевое условие постоянства давления вдоль нулевой линии тока перед точкой присоединения

$$(3.4) \quad v_2(x_2, 0) = 0, \quad x_2 > x_{20}; \quad p_2(x_2, 0) = 0, \quad x_2 < x_{20}$$

Здесь через x_{20} обозначена абсцисса точки присоединения (начало системы координат (x, y) мы будем полагать совпадающим с точкой присоединения, как ее определяет задача нулевого приближения для области 1).

Выпишем теперь уравнение для формы нулевой линии тока

$$(3.5) \quad dg_2/dx_2 = v_2(x_2, 0), \quad x_2 < x_{20}$$

Первое уравнение системы (3.2) и краевые условия (3.3) позволяют установить, что $p_2 = -u_2$. Подставляя это соотношение во второе уравнение системы (3.2), получим условия Коши – Римана для функции $u_2 - iv_2$. Следовательно, функция

$$(3.6) \quad f_2(z_2) = u_2 - iv_2, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

является аналитической в верхней полуплоскости переменного z_2 .

Согласно соотношениям (3.3), (3.4), эта функция удовлетворяет краевому условию во внешнем потоке и на действительной оси ($y_2=0$)

$$(3.7) \quad f_2(z_2) = 2k_0 z_2^{1/2} + o(z_2^{-1/2}), \quad z_2 \rightarrow \infty$$

$$(3.8) \quad \operatorname{Re}(f_2) = 0, \quad x_2 < x_{20}; \quad \operatorname{Im}(f_2) = 0, \quad x_2 > x_{20}$$

Система (3.6) – (3.8) представляет собой задачу Келдыша – Седова (см., например, [11]) для функции $f_2(z_2)$. Ее решение в данном случае имеет вид

$$(3.9) \quad f_2(z_2) = 2k_0(z_2 - x_{20})^{1/2} - k(z_2 - x_{20})^{-1/2}$$

где k – произвольная действительная постоянная (значение этой постоянной будет получено ниже при рассмотрении области присоединения потока). В самом деле, функция (3.9) является аналитической в верхней полуплоскости и удовлетворяет условиям (3.8). Что касается условия (3.7), то оно удовлетворяется, если $x_{20} = -k/k_0$.

Решение рассмотренной задачи Келдыша – Седова является единственным (см. [11]) при дополнительном требовании

$$f_2(z_2) = o(z_2 - x_{20})^{-1/2}, \quad z_2 \rightarrow x_{20}$$

Нарушение этого требования означало бы, согласно (3.5), бесконечное удаление нулевой линии тока от стенки в окрестности точки присоединения потока.

Итак, решение для области 2 имеет вид

$$(3.10) \quad \begin{aligned} u_2 &= 2k_0 \operatorname{Re} \{(z_2 - x_{20})^{1/2}\} - k \operatorname{Re} \{(z_2 - x_{20})^{-1/2}\} \\ v_2 &= -2k_0 \operatorname{Im} \{(z_2 - x_{20})^{1/2}\} + k \operatorname{Im} \{(z_2 - x_{20})^{-1/2}\} \\ p_2 &= -2k_0 \operatorname{Re} \{(z_2 - x_{20})^{1/2}\} + k \operatorname{Re} \{(z_2 - x_{20})^{-1/2}\} \\ g_2 &= \frac{4}{3} k_0 [-(x_2 - x_{20})]^{3/2} + 2k [-(x_2 - x_{20})]^{1/2}. \end{aligned}$$

Из соотношений (3.1), (3.10) следует, что $p = O(\varepsilon^{1/2} |z_2 - x_{20}|^{-1/2})$ при $z_2 \rightarrow x_{20}$. В области присоединения потока, где $|z - \varepsilon x_{20}| = O(R^{-1/2})$, давление должно меняться на величину порядка единицы. Ясно, что это требование выполняется только при $\varepsilon(R) = R^{-1/2}$.

4. Вязкий слой смешения. Как обычно, для рассмотрения вязкого слоя смешения (область 3) введем ортогональную систему координат s, n , ось s которой отсчитывается от передней кромки пластины вдоль нулевой линии тока AO (фиг. 1). Компоненты вектора скорости в этой системе координат обозначим через U, V . Используя метод срачиваемых асимптотических разложений, решение в области 3 представим в виде

$$\begin{aligned} U(s, n, R) &= U_3(s, n_3) + \dots, \quad V(s, n, R) = R^{-1/2} V_3(s, n_3) + \dots \\ p(s, n, R) &= p_3(s, n_3) + \dots, \quad n = R^{-1/2} n_3 \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнения Навье – Стокса, получим уравнения пограничного слоя Прандтля

$$(4.1) \quad U_3 \frac{\partial U_3}{\partial s} + V_3 \frac{\partial U_3}{\partial n_3} + \frac{dp_3}{ds} = \frac{\partial^2 U_3}{\partial n_3^2}, \quad \frac{\partial U_3}{\partial s} + \frac{\partial V_3}{\partial n_3} = 0$$

В частности, если использовать предположение о постоянстве давления вдоль границы застойной зоны SO , то решение системы (4.1) оказывается

автомодельным

$$(4.2) \quad U_3(s, n_3) = f'(\eta), \quad V_3(s, n_3) = s^{-1/2} \left(\frac{1}{2} \eta f' - \frac{1}{2} f \right), \quad \eta = n_3 s^{-1/2}$$

Функция $f(\eta)$, входящая в эти выражения, удовлетворяет уравнению Блазиуса

$$\frac{1}{2} f f'' + f''' = 0, \quad f'(+\infty) = 1, \quad f(0) = f'(-\infty) = 0$$

5. Область присоединения потока. Рассмотрим, наконец, область присоединения потока (область 4), в которой $x \infty y \infty R^{-1/2}$. Решение для этой области, очевидно, следует искать в виде

$$(5.1) \quad \begin{aligned} x &= R^{-1/2} x_{20} + R^{-1/2} x_i, \quad y = R^{-1/2} y_i \\ u(x, y, R) &= u_i(x_i, y_i) + \dots, \quad v(x, y, R) = v_i(x_i, y_i) + \dots \\ p(x, y, R) &= p_i(x_i, y_i) + \dots, \quad g(x, R) = R^{-1/2} g_i(x_i) + \dots \end{aligned}$$

Подстановка соотношений (5.1) в уравнения Навье — Стокса приводит (после предельного перехода: $R \rightarrow \infty$) к полной системе уравнений Эйлера

$$(5.2) \quad \begin{aligned} u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y_i} &= - \frac{\partial p_i}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial y_i} = 0 \\ u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial y_i} &= - \frac{\partial p_i}{\partial y_i} \end{aligned}$$

Решение этой системы должно удовлетворять условию непротекания на поверхности тела

$$(5.3) \quad v_i(x_i, 0) = 0$$

и условиям срачивания с областями 2 и 3.

Первое из этих условий, согласно соотношениям (3.10), имеет вид

$$(5.4) \quad \left. \begin{aligned} u_i &= 1 - k \operatorname{Re}(z_i^{-1/2}) + \dots \\ v_i &= k \operatorname{Im}(z_i^{-1/2}) + \dots \\ p_i &= k \operatorname{Re}(z_i^{-1/2}) + \dots \\ g_i &= 2k(-x_i)^{1/2} + \dots, \quad x_i \rightarrow -\infty \end{aligned} \right\} z_i = x_i + iy_i \rightarrow \infty$$

Срачивание с областью 3 удобно произвести в системе координат s, n . Затем полученный результат может быть преобразован к декартовой системе координат x, y . Эта процедура позволяет установить, что при $x_i \rightarrow -\infty$

$$(5.5) \quad \begin{aligned} u_i &= U_3(l, n_i) \left\{ 1 - \frac{1}{2} k^2 (-x_i)^{-1} + \dots \right\} \\ v_i &= U_3(l, n_i) \{-k(-x_i)^{-1/2} + \dots\} \\ n_i &= \{y_i - g_i(x_i)\} \left\{ 1 - \frac{1}{2} k^2 (-x_i)^{-1} + \dots \right\} \end{aligned}$$

Здесь n_i является величиной порядка единицы, функция $U_3(l, n_i)$ представляет собой профиль скорости в слое смешения непосредственно перед точкой присоединения O ; через l обозначена безразмерная длина слоя смешения.

Система уравнений Эйлера (5.2) с краевыми условиями (5.3) — (5.5) представляет собой задачу для области присоединения. Решение этой зада-

чи должно быть таковым, чтобы нулевая линия тока из слоя смешения «приходила» на поверхность тела. Это дополнительное требование как раз и позволяет определить значение постоянной k .

6. Численное решение для области присоединения. Для численного расчета течения в области присоединения выбран в качестве примера случай, когда решение для слоя смешения имеет автомодельный вид (4.2). В этом случае задача для области присоединения может быть записана в переменных подобия

$$(6.1) \quad x_* = l^{-1/2} x_i, \quad y_* = l^{-1/2} y_i, \quad n_* = l^{-1/2} n_i$$

Нетрудно видеть, что преобразование (6.1) приводит лишь к замене искомого параметра k на параметр

$$(6.2) \quad k_* = kl^{-1/4}$$

Кроме того, функция $U_3(l, n_i)$, входящая в (5.5), меняется, согласно выражению (4.2), на $f'(n_*)$.

Заметим, что соотношения (6.1), (6.2) представляют собой закон подобия для течений рассматриваемого класса.

Система уравнений Эйлера, как известно, эквивалентна системе из уравнения Пуассона для функции тока ψ и уравнения Бернулли для давления

$$(6.3) \quad \Delta\psi = \omega(\psi), \quad (u_*^2 + v_*^2)/2 + p_* = H(\psi), \quad \omega(\psi) = \partial u_* / \partial y_* - \partial v_* / \partial x_*$$

Здесь $\omega(\psi)$ — завихренность потока, связанная с функцией $H(\psi)$ соотношением $\omega(\psi) = H'(\psi)$.

Краевое условие (5.5) позволяет выразить эти функции в параметрическом виде

$$\omega = f''(n_*), \quad H = \frac{1}{2} [f'(n_*)]^2, \quad \psi = f(n_*)$$

Получим теперь краевые условия для функции тока ψ , необходимые для решения уравнения Пуассона (6.3). На поверхности тела

$$(6.4) \quad \psi(x_*, 0) = 0$$

Из условия срачивания со слоем смешения (5.5) следует, что при $x_* \rightarrow -\infty$

$$(6.5) \quad \psi(x_*, y_*) = f(n_*), \quad n_* = \{y_* - 2k_*(-x_*)^{1/2}\} \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{k_*^2}{2}(-x_*)^{-1} + \dots \right\}$$

Условия срачивания (5.4) с областью 2 могут быть записаны в виде

$$(6.6) \quad \partial\psi / \partial y_* = 1 - k_* \operatorname{Re}(z_*^{-1/2}) + \dots, \quad z_* = x_* + iy_* \rightarrow \infty$$

Чтобы получить краевое условие для вихревого слоя, в котором жидкость движется вдоль стенки в сторону застойной зоны, воспользуемся уравнением Бернулли (6.3). При удалении в застойную зону давление p_* , а вместе с ним и вертикальная составляющая скорости v_* стремятся к нулю; поэтому $u_*^2 = 2H(\psi) = [f'(n_*)]^2$, где $u_* = \partial\psi / \partial y_*$, $\psi = f(n_*)$.

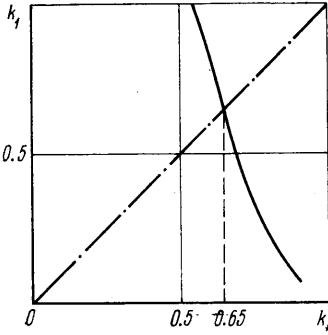
Следовательно, в рассматриваемом слое

$$(6.7) \quad \psi(x_*, y_*) = f(-y_*) + \dots, \quad x_* \rightarrow -\infty$$

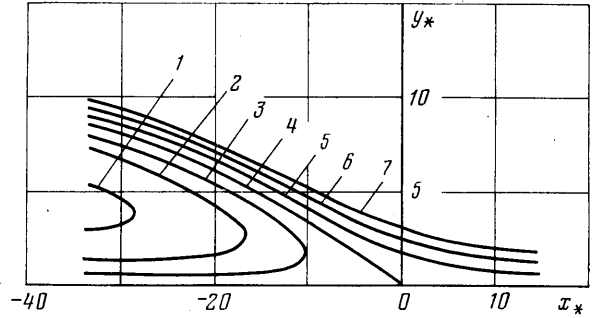
Аналогичным образом находится краевое условие для вихревого слоя, распространяющегося вдоль стенки вниз по потоку

$$(6.8) \quad \psi(x_*, y_*) = f(y_*) + \dots, \quad x_* \rightarrow +\infty$$

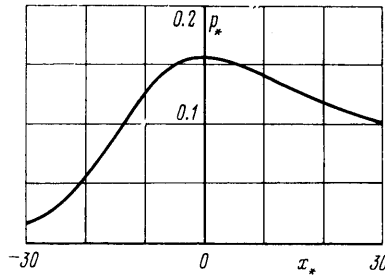
Решение уравнения Пуассона (6.3) с краевыми условиями (6.4) — (6.8) определялось с помощью метода конечных разностей. Для произвольно заданного значения параметра k_* задавались краевые условия на берегах расчетной сетки в соответствии с соотношениями (6.4) — (6.8). Решение внутри этой сетки находилось методом установления с использованием схемы переменных направлений. При этом правая часть уравнения



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Пуассона на каждом шаге по времени определялась по значениям функции тока в узлах сетки на предыдущем временном слое.

По найденному в процессе установления распределению функции тока выстраивалась нулевая линия тока $y_* = g_*(x_*)$ и определялся ее наклон на левой границе расчетной сетки. После этого значение искомого параметра (обозначим его k_1) определялось из соотношения (5.4), записанного в форме подобия

$$(6.9) \quad k_1 = -(-x_*)^{1/2} dg_*/dx_*$$

Результаты этих вычислений представлены на фиг. 3, где вдоль оси абсцисс отложены задаваемые значения k_* , а вдоль оси ординат — получаемые с помощью соотношения (6.9). Условие равенства этих значений и определяет искомую постоянную $k_* = 0.65$.

Картина линий тока в области присоединения, полученная для этого значения параметра k_* , приведена на фиг. 4. Цифрами 1, 2, 3, ... здесь обозначены линии тока, на которых функция ψ принимает соответственно значения $-0.9, -0.6, -0.3, \dots$ На фиг. 5 изображено распределение давления на поверхности тела. Интересно отметить, что в отличие от сверхзвукового случая [4] распределение давления здесь имеет немонотонный характер, а точка присоединения расположена внутри локально-невязкой области 4. Немонотонность поведения давления около точки присоедине-

ния дозвукового потока была экспериментально обнаружена еще в работе [12].

Ясно, что приведенные выше результаты применимы и к задаче о симметричном смыкании вязких слоев в следе за плохо обтекаемым телом. Отличие состоит лишь в описании вязкого пограничного слоя, расположенного на дне области 4. По обе стороны от точки присоединения этот слой находится под действием благоприятного градиента давления. Поэтому решение для него может быть построено с помощью стандартной процедуры Прандтля (см., например, [6]).

В заключение отметим, что структура течения около точки присоединения потока существенно отличается от возникающей в окрестности точки отрыва (см., например, [13-15]). Хотя для обоих этих течений характерным является быстрый локальный рост давления, причины, по которым он появляется, различны. Если около точки отрыва потока рост давления обусловлен самоиндуцированным взаимодействием вязкого пристеночного слоя и внешнего потенциального потока, то в окрестности точки присоединения он является следствием падения жидкости на твердую поверхность.

Поступила 28 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chapman D. R., Kuehn D. M., Larson H. K.* Investigation of separated flows in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effect of transition. *NACA Rep.*, 1958, No. 1356.
2. *Korst H. H.* A theory for base pressures in transonic and supersonic flow. *J. Appl. Mech.*, 1956, vol. 23, No. 4.
3. *Nash J. F.* An analysis of two-dimensional turbulent base flow, including the effect of the approaching boundary layer. *Aeronaut. Res. Council, London, Rep. and Mem.* 1963, No. 3344.
4. *Нейланд В. Я.* К асимптотической теории плоских стационарных сверхзвуковых течений со срывными зонами. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1970, № 3.
5. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
6. *Нейланд В. Я., Сычев В. В.* Асимптотические решения уравнений Навье – Стокса в областях с большими локальными возмущениями. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1966, № 4.
7. *Werlé H.* Sur l'éclatement des tourbillons. *Note techn. ONERA NT*, 1971, No. 175.
8. *Чанлыгин С. А.* К вопросу о струях в несжимаемой жидкости. *Тр. Отд. физ. наук об-ва любителей естествознания*, 1899, т. 10, вып. 1.
9. *Сычев В. В.* Отрыв пограничного слоя от плоской поверхности. *Уч. зап. ЦАГИ*, 1978, т. 9, № 3.
10. *Ackerberg R. C.* Boundary-layer separation at a free streamline. Pt. 1. Two-dimensional flow. *J. Fluid Mech.*, 1970, vol. 44, pt. 2.
11. *Лаврентьев М. А., Шабар Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973.
12. *Nash J. F., Quincey V. G., Callinan J.* Experiments on two-dimensional base flow at subsonic and transonic speeds. *Aeronaut. Res. Council Rep. and Mem.*, 1966, No. 3427.
13. *Нейланд В. Я.* Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений. *Тр. ЦАГИ*, 1974, вып. 1529.
14. *Stewartson K.* Multistructured boundary layers of flat plates and related bodies. *Adv. Appl. Mech.*, vol. 14, New York e. a., 1974.
15. *Сычев В. В., Рубан А. И.* Асимптотическая теория отрыва ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. *Успехи механики*, 1979, т. 2, № 4.