МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1980

УДК 532.516

ОБ ИЗМЕНЕНИИ ОБЛАСТИ ЛОКАЛИЗАЦИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПРОЦЕССАХ НЕЛИНЕЙНОГО ПЕРЕНОСА

К. Б. ПАВЛОВ, А. С. РОМАНОВ

(Москва)

Квазилинейное уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u^k}{\partial x}\right|^{n-1}\frac{\partial u^k}{\partial x}\right)-\gamma u^m \tag{0.1}$$

$$k,\gamma>0,\quad m\geqslant 0,\quad kn>1$$

следует рассматривать как обобщенную форму многих известных уравнений переноса с коэффициентами переноса, зависящими от переносимой величины. Например, случай $n=1$ соответствует переносу тепла в среде с теплопроводностью и стоками, зависящими от температуры по степенному закону [1, 2]; случай $k=m=1$ описывает течение проводящей неньютоновской жидкости в поперечном магнитном поле [3]; случай $k=2$, $m=0$ соответствует МГД-течению той же жидкости в поперечном магнитном поле в ламинарном пограничном слое [4]. В общем случае уравнение (0.1) описывает процесс турбулентной фильтрации [5] с нелинейными стоками. Характерной особенностью процессов, описываемых уравнением (0.1), является возможность наличия поверхностей фронта $x=x_f(t)$, строго разграничивающих области с $u(x, t)=0$ и области с $u(x, t)>0$, в которых локализованы возмущения переносимой величины [6]. Ниже проводится исследование закономерностей изменения области локализации возмущений переносимой величины в задачах Коши для уравнения (0.1).

1. Пусть в начальный момент времени $t=0$ задано симметричное по x начальное распределение переносимой величины $u(x, t)$, описываемое финитной функцией: $u_0(x)>0$ при $|x|<|x_\Phi|$, $u_0(x)=0$ при $|x|>|x_\Phi|$, где $x_\Phi=\text{const}<0$.

Будем считать, что асимптотическое представление $u_0(x)$ при $x\to x_\Phi+0$ определено выражением

$$u_0(x)\infty U_0(x-x_\Phi)^\omega,\quad U_0,\quad \omega-\text{const}>0 \tag{1.1}$$

Динамика изменения области локализации возмущений переносимой величины при $t>0$ должна быть получена в результате решения следующей задачи с «искомой» границей $x_f(t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u^k}{\partial x}\right)^n-\gamma u^m$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u(x_f,t)=\left[\frac{\partial u^k}{\partial x}(x_f,t)\right]^n=0 \tag{1.2}$$

$$x_f(0)=x_\Phi,\qquad 0>x>x_f(t),\qquad t>0$$

Условия при $x=x_f(t)$ вытекают из физических соображений о непрерывности решения задачи (1.2) $u(x, t)$ вместе с $[\partial u^k/\partial x(x, t)]^n$. Из них также следует, что в выражении асимптотики (1.1) $\omega>1/k$.

Определим возможные типы фронтовых решений уравнения (1.2) $u(x, t)>0$ при $0>x>x_f(t)$, $u(x, t)=0$ при $x_f(t)\geqslant x>-\infty$, предполагая, что асимптотическое поведение фронтового решения при $x\to x_f(t)+0$

представимо в форме

$$u(x,t)\sim a(t)(x-x_f)^\alpha,\quad \alpha,\ a(t)>0 \tag{1.3}$$

Подставляя (1.3) в уравнение (1.2), имеем

$$\begin{aligned}&\dot a(x-x_f)^\alpha-a\alpha(x-x_f)^{\alpha-1}\dot x_f\sim\\ &\sim a^{kn}n(k\alpha)^n(k\alpha-1)(x-x_f)^{n(k\alpha-1)-1}-\gamma a^m(x-x_f)^{m\alpha}\end{aligned} \tag{1.4}$$

где точка означает производную по времени. Различные варианты соотношений между показателями степени при $(x-x_f)$ в отдельных членах (1.4) позволяют классифицировать фронтовые решения уравнения (1.2).

Если в (1.4) $n(k\alpha-1)-1=\alpha-1<m\alpha$, то $\alpha=\alpha_1\equiv n/(kn-1)$, $m>p$, $p=1-k+1/n$ и

$$\dot x_f(t)=-(k\alpha_1)^n a^{kn-1}(t)<0 \tag{1.5}$$

Таким образом, при $m>p$ возможен режим переноса, при котором область локализации переносимой величины увеличивается со временем (режим $\dot x_f(t)<0$). Этот режим описывается асимптотическим представлением $u(x,t)$ (1.3) с $\alpha=\alpha_1$.

Если в (1.4) $\alpha-1=m\alpha<n(k\alpha-1)-1$, то $\alpha=\alpha_2\equiv 1/(1-m)$, $1>m>p$ и

$$\dot x_f=(1-m)\gamma a^{m-1}(t)>0 \tag{1.6}$$

Таким образом, при $1>m>p$ возможен режим переноса, при котором область локализации возмущений переносимой величины со временем уменьшается (режим $\dot x_f(t)>0$). Этот режим описывается асимптотическим представлением $u(x,t)$ (1.3) с $\alpha=\alpha_2$.

Если в (1.4) $\alpha-1=m\alpha=n(k\alpha-1)-1$, то $\alpha=\alpha_s=\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3\equiv(n+1)/(kn-m)$, $m=p$ и

$$\dot x_f(t)=\alpha_1^{-1}\gamma a^{-1/\alpha_1}(t)-(k\alpha_1)^n a^{kn-1}(t) \tag{1.7}$$

откуда следует, что $\dot x_f(t)\lesseqgtr 0$ при

$$a(t)\lesseqgtr a_s\equiv[(kn-1)^{n+1}\gamma/k^n n^{n+1}]^{\alpha_1/(n+1)}=\mathrm{const} \tag{1.8}$$

Из (1.7) и (1.8) можно заключить, что в случае $a(t)=a_s$ положение фронта может оставаться строго фиксированным в течение конечного или бесконечного интервала времени (режим $x_f(t)=\mathrm{const}$).

Таким образом, при $m=p$ принципиально возможны три режима: $\dot x_f(t)<0$, $\dot x_f(t)>0$ и $\dot x_f(t)=\mathrm{const}$; при этом в асимптотическом представлении $u(x,t)$ (1.3) $a(t)$ различно для разных режимов, однако показатель α одинаков: $\alpha=\alpha_s$.

Если в (1.4) $m\alpha=n(k\alpha-1)-1<\alpha-1$, то $\alpha=\alpha_3$, $p>m\geqslant 0$ и

$$a(t)=a_c\equiv[\gamma(n+1)/nk^n\alpha_3^{n+1}(k+m)]^{1/(kn-m)} \tag{1.9}$$

(при $m=p$ a_c (1.9) переходит в a_s (1.8)). При $p>m\geqslant 0$ из соотношения (1.4) выражение для $x_f(t)$ не может быть определено, тем не менее можно утверждать, что для любого возможного в этом случае режима в асимптотическом представлении решения $u(x,t)$ (1.3): $\alpha=\alpha_3$, $a(t)=a_c$ (1.9).

Остановимся подробнее на рассмотрении возможности фиксирования фронта (режим $x_f(t)=\mathrm{const}$). Если фронт остается фиксированным в течение конечного (метастабильный режим) или бесконечного интервала времени (стабильный режим), то соотношение (1.4) принимает вид

$$\begin{aligned}&\dot a(t)(x-x_f)^\alpha\sim a^{kn}(t)n(k\alpha)^n(k\alpha-1)(x-x_f)^{n(k\alpha-1)-1}-\\ &-\gamma a^m(t)(x-x_f)^{m\alpha}\end{aligned} \tag{1.10}$$

Из (1.10) следует, что при $m<1$ фиксирование положения фронта возможно с $\alpha=\alpha_3$ и $a(t)=a_c$ (1.9) в асимптотическом представлении решения $u=u(x, t)$ (1.3).

При $m=1$ режим $x_f(t)\equiv\mathrm{const}$ имеет место при $\alpha=\alpha_3=\alpha_4\equiv(n+1)/(kn-1)$ и $\alpha>\alpha_4$; $a(t)$ равны соответственно

$$(1.11)\qquad a(t)=e^{-\gamma t}\alpha_4^{-\alpha_1}[n(k+1)k^n(\theta-\vartheta(t))]^{1/(1-kn)}$$

$$\vartheta(t)\equiv[1-e^{-\gamma(kn-1)t}][\gamma(kn-1)]^{-1}$$

$$(1.12)\qquad a(t)=a_0e^{-\gamma t}$$

Здесь θ и $a_0=\mathrm{const}>0$, определяемые из соответствующего начального условия задачи (1.2).

$\dot{x}_f$	$p>m\geqslant0$	$m=p$	$1>m>p$	$m=1$	$m>1$
0	α_3 a_c	α_s a_s	α_3 1.9	$\alpha_3\equiv\alpha_4$ или $>\alpha_4$ 1.11 или 1.12	α_4 1.14
<0	α_3 a_c	α_s $>a_s$	α_1 1.5	α_1 1.5	α_1 1.5
>0	α_3 a_c	α_s $<a_s$	α_2 1.6	– –	– –

При $m>1$ из (1.10) следует, что режим $x_f(t)\equiv\mathrm{const}$ имеет место с $\alpha=\alpha_4$ и

$$(1.13)\qquad a(t)=\alpha_4^{-\alpha_1}[n(k+1)k^n(T-t)]^{1/(1-kn)}$$

Здесь $T=\mathrm{const}$, определяемая из начального условия задачи (1.2).

Для большей наглядности возможные режимы локализации возмущений переносимой величины с соответствующими выражениями α и $a(t)$ в асимптотическом представлении решения $u(x, t)$ (1.3) в зависимости от значения параметра m приводятся в таблице, где цифры означают номера формул, из которых определяется $a=a(t)$.

2. Прежде чем приступить к непосредственному описанию динамики изменения области локализации возмущений переносимой величины в задаче (1.2), необходимо сформулировать некоторые положения о сравнении решений, которые будут использованы в дальнейшем.

В этой связи отметим, что в [7-9] указаны теоремы о монотонной зависимости решения задачи (1.2) от начального условия для частных случаев значений показателей степени в уравнении (1.2); аналогичная теорема может быть доказана и в общем случае.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w^k}{\partial x}\right)^n-\gamma w^m$$

$$(2.1)\qquad w(x,0)=w_0(x)=\mathrm{const},\qquad -\infty<x\leqslant0,\qquad t>0$$

где $w_0(x)\geqslant u_0(x)$ (1.1). В силу теоремы сравнения, следующей из монотонной зависимости решения задачи (1.2) от начального условия, решение задачи (2.1)

$$(2.2)\qquad w(t)=(1-m)\gamma(T-t)\quad(m<1),\qquad w(t)=w_0e^{-\gamma t}\quad(m=1)$$

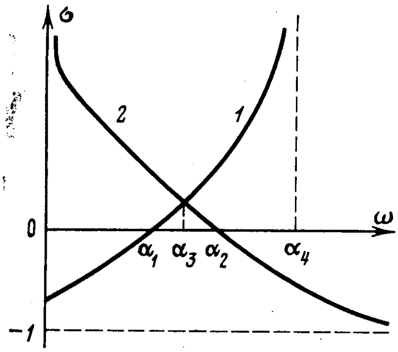
$$w(t)=w_0/[1+\gamma(m-1)t]^{1/(m-1)}\quad(m>1)$$

можно считать мажорирующим для решения задачи (1.2). Из (2.2) следует, что при $m<1$ $u(x, t>t_0)=0$, где $t_0\leqslant T$. Иными словами, при $m<1$ переносимая величина исчезает за конечный интервал времени.

Если в задаче (1.2) $\gamma=0$, то ее решение $u_*(x, t)$ связано с решением $u(x, t)$ с $\gamma>0$ соотношением $u(x, t) \leqslant u_*(x, t)$ при прочих равных условиях [10].

Важно отметить, что теорему сравнения решений задачи (1.2) можно использовать в локальном варианте при асимптотическом выражении решений вблизи фронта. Пусть, например, асимптотики двух начальных распределений переносимой величины $u_0(x)$ (1.1): $u_{01}(x)$ и $u_{02}(x)$ с одинаковым положением фронта в начальный момент времени x_Φ. Будем считать, что $u_{01}(x)>u_{02}(x)$ в некоторой области вблизи фронта, за исключением самой точки фронта: $u_{01}(x_\Phi)=u_{02}(x_\Phi)=0$. Тогда вблизи фронта в течение не равного нулю промежутка времени между соответствующими решениями задачи (1.2) имеет место соотношение $u_1(x, t)>u_2(x, t)$. Это утверждение может быть строго доказано.

Динамика изменения области локализации возмущений переносимой величины определяется реализацией конкретного режима фронтового решения задачи (1.2). Она существенно зависит от начального распределения переносимой величины вблизи поверхности фронта. Действительно, дифференцируя по времени тождество $u(x_f(t), t)=0$ и используя затем уравнение (1.2), можно получить выражение



$$\dot{x}_f(t)=-\lim_{x\to x_f+0}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u^k}{\partial x}\right)^n-\gamma u^m\right]\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-1}\right\} \tag{2.3}$$

определяющее режим движения фронта для всех $t\geqslant 0$. Подставив в (2.3) асимптотическое представление начального распределения $u_0(x)$ (1.1), будем иметь

$$\dot{x}_f(0)=-\lim_{x\to x_\Phi+0}[U_0^{kn-1}(\omega k)^n(\omega k-1)n\omega^{-1}(x-x_\Phi)^{n(\omega k-1)-\omega}-\gamma U_0^{m-1}(x-x_\Phi)^{\omega(m-1)+1}\omega^{-1}] \tag{2.4}$$

откуда следует указанная зависимость.

Это положение проиллюстрируем сначала для случая $m>1$, для которого определим закон движения фронта $x_f(t)$ при $t\to+0$. Будем исходить из условия непрерывного перехода асимптотического решения $u(x, t)$ (1.3) в начальное распределение $u_0(x)$ (1.1) при $t\to+0$. Предполагая, что фронт движется при $t>0$ (а при $m>1$ может иметь место режим $\dot{x}_f(t)<0$, см. таблицу), имеем

$$a(t)(x-x_f)^{\alpha_1}\infty U_0(x-x_\Phi)^\omega\infty U_0(x-x_f)^\omega,\quad t\to+0,\quad x\to x_f+0 \tag{2.5}$$

Откуда, выполняя вначале предел $x\to x_\Phi+0$, имеем

$$a(t)\left[-\int_0^t \dot{x}_f\,dt\right]^{\alpha_1-\omega}\infty U_0,\quad t\to+0 \tag{2.6}$$

С помощью соотношений (2.6) и (1.5) может быть определено выражение для $\dot{x}_f(t)$, асимптотически справедливое при малых значениях t:

$$\begin{gathered}\dot{x}_f=-At^{\sigma_1},\quad A=[(k\alpha_1)^n\xi^{\xi-1}U_0^{kn-1}]^{1/\xi}\\ \sigma_1=-1+1/\xi,\quad \xi=1+n-\omega(kn-1)\end{gathered} \tag{2.7}$$

Зависимость показателя σ_1 от показателя начального распределения $u_0(x)$ (1.1) ω показана на фигуре (кривая *1*).

Если $\omega<\alpha_1$, то $\dot{x}_f(t)\to-\infty$ при $t\to+0$, но тем не менее $|x_f-x_\Phi|<\infty$, поскольку $\sigma_1>-1$, $A<\infty$. Если $\omega=\alpha_1$, то $\dot{x}_f(t)\equiv(\alpha_1)^n U_0^{kn-1}=\mathrm{const}$ при $t\to+0$; наконец, если $\alpha_1<\omega<\alpha_4$, то $\dot{x}_f(t)\to0$ при $t\to+0$.

Любопытен предельный переход $\omega\to\alpha_4-0$, при котором из (2.7) следует, что производные все более высоких порядков от $x_f(t)$ обращаются в нуль при $t\to+0$. Замечая это, можно предположить что в пределе при $\omega=\alpha_4$ фронт остается фиксированным по крайней мере в течение конечного интервала времени $0<t<T<\infty$: $x_f(t)\equiv x_\Phi=\mathrm{const}$. Напомним в этой связи, что при $m>1$ значение показателя $\alpha=\alpha_4\equiv(n+1)/(kn-1)$ в асимптотическом представлении решения $u(x, t)$ (1.3) с $a(t)$ (1.13) соответствует метастабильному режиму $x_f(t)=\mathrm{const}$, продолжающемуся в течение конечного интервала времени $0<t<T$. Значение T, определяемое из начального условия $u_0(x)$ с $\omega=\alpha_4$, равно

$$T=U_0^{1-kn}[\alpha_4 kn(k+1)]^{-1} \tag{2.8}$$

(Отметим, что на возможность существования метастабильных состояний указывалось в [11, 12] для частных случаев значений показателей в уравнении (1.2)).

Очевидно, что функция

$$\begin{gathered} u_*(x, t)=(\alpha_4/k)^{\alpha_1}(x-x_\Phi)^{\alpha_4}[n(k+1)(T_*-t)]^{1/(1-kn)} \\ x\geqslant x_\Phi,\ t<T_*=\mathrm{const}<\infty \end{gathered} \tag{2.9}$$

является решением задачи

$$\frac{\partial u_*}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_*^k}{\partial x}\right)^n,\quad u_*(x_f, t)=\left[\frac{\partial u_*^k}{\partial x}(x_f, t)\right]^n=0$$

$$u_*(x, 0)=(\alpha_4/k)^{\alpha_1}(x-x_\Phi)^{\alpha_4}[n(k+1)T_*]^{1/(1-kn)}$$

описывающим метастабильный режим в течение интервала времени $0\leqslant t\leqslant T_*$. При надлежащем подборе константы T_* точное решение (2.9) мажорирует решение задачи (1.2) с $\gamma>0$ и $\omega>\alpha_4$ при одинаковом начальном положении фронта. Следовательно, при $m>1$ и $\omega>\alpha_4$ имеет место режим $x_f(t)\equiv x_\Phi=\mathrm{const}$ по крайней мере в течение конечного интервала времени $0\leqslant t\leqslant T_*$.

Таким образом, при $m>1$ выбор режимов движения фронта $x=x_f(t)$, указанных в таблице, однозначно зависит от показателя ω в асимптотическом представлении начального распределения (1.1). Если $\omega<\alpha_4$, то при $t\to+0$ реализуется режим движения фронта с $\dot{x}_f(t)<0$. Если $\omega\geqslant\alpha_4$, то фронт $x=x_f(t)$ неподвижен, по крайней мере, в течение конечного промежутка времени $0\leqslant t\leqslant T_*$.

В случае линейного стока $m=1$ сохраняются все выводы о характере движения фронта $x=x_f(t)$, полученные при $m>1$. При $\omega\geqslant\alpha_3$, $1\leqslant m<kn$ можно дополнительно указать, что фронт оказывается неподвижным для любого $0\leqslant t<\infty$ при достаточно большом значении $\gamma\geqslant\gamma_0>0$, где γ_0 определяется из начального условия. Доказательство этого факта может быть проведено аналогично тому, как это сделано в [12], где задача (1.2) исследовалась в частном случае при $m=k=1$.

В области изменения параметра $p\leqslant m<1$ возможны три режима движения фронта (см. таблицу). Закон движения фронта в случае режима $\dot{x}_f(t)<0$ по-прежнему описывается выражениями (2.7). Аналогично может быть определен закон движения фронта при $t\to+0$ в случае режима

$\dot{x}_f(t)>0$:

$$\dot{x}_f=Bt^{\sigma_2},\ B=\gamma^\zeta(1-m)^\zeta(\zeta)^{1-\zeta}U_0^{-\zeta},\ \sigma_2=-1+\zeta,\ \zeta=1/(1-m)\omega$$

Зависимость σ_2 от параметра ω приведена на фигуре (кривая *2*). Важно отметить, что в рассматриваемой области изменения параметра $p\leqslant m<1$ справедливы неравенства $\alpha_1\leqslant\alpha_3\leqslant\alpha_2$, $\alpha_3<\alpha_4$, что учтено на фигуре. Кривые пересекаются при значении $\omega=\alpha_3$. «Локальный» вариант теоремы сравнения дает возможность определить начальный режим движения фронта в зависимости от ω. Если $\omega<\alpha_3$, то $\dot{x}_f(t)<0$; если же $\omega>\alpha_3$, то $\dot{x}_f(t)>0$. При $\omega=\alpha_3$ вопрос о направлении движения фронта $x=x_f(t)$ не может быть однозначно решен на основе проводимого асимптотического анализа, по-видимому, при $\omega=\alpha_3$ могут реализовываться все три режима, возможные в случае $p\leqslant m<1$.

При $0\leqslant m<p$ исходя из соотношения (2.4) можно определить значение $\dot{x}_f(0)$; оказывается, что в случае $\omega<\alpha_3$ $\dot{x}_f(0)=-\infty$, в случае $\omega>\alpha_3$ $\dot{x}_f(0)=\infty$. При $\omega=\alpha_3$ значение $\dot{x}_f(0)$ определяется величиной U_0: если $U_0>a_c$ (1.9), то $\dot{x}_f(0)=-\infty$, если $U_0<a_c$, то $\dot{x}_f(0)=\infty$, наконец, если $U_0=a_c$, то для определения $\dot{x}_f(0)$ необходимо уточнить асимптотическое представление (1.1).

В заключение отметим, что в рамках проведенного анализа не удается решить вопрос о переходе с одного режима движения фронта на другой и оценить время существования каждого режима. Исключением является случай, когда может быть применена глобальная теорема сравнения.

Поступила 2 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сб., посвященный 70-летию акад. А. Ф. Иоффе. Изд-во АН СССР, 1950.
2. *Самарский А. А., Соболь И. М.* Примеры численного расчета температурных волн. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 4.
3. *Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.* Нестационарные сдвиговые течения проводящей жидкости со степенным реологическим законом. Магнитная гидродинамика, 1971, № 2.
4. *Павлов К. Б.* О магнитогидродинамическом течении несжимаемой вязкой жидкости, вызванном деформацией плоской поверхности. Магнитная гидродинамика, 1974, № 4.
5. *Лейбензон Л. С.* Общая задача о движении сжимаемой жидкости в пористой среде. Изв. АН СССР, Сер. геогр., геофиз., 1945, т. 9, № 1.
6. *Баренблатт Г. И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ПММ, 1952, т. 16, вып. 1.
7. *Баренблатт Г. И., Вишик М. И.* О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
8. *Кершнер Р.* Об условиях локализации тепловых возмущений в полуограниченной движущейся среде при наличии поглощения Вестн. МГУ. Сер. матем., мех., 1976, № 4.
9. *Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.* Сдвиговые течения жидкости со степенным реологическим законом при наличии постоянной поперечной составляющей скорости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4.
10. *Калашников А. С.* О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, № 4.
11. *Самарский А. А., Змитриенко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 6.
12. *Мартинсон Л. К.* Распространение сдвиговых возмущений в дилатантных жидкостях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 6.