МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1980

УДК 532.516

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УВЛЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПЛАСТИНКОЙ

Р. С. БУРКИНА, В. Н. ВИЛЮНОВ

(Томск)

Обнаружена аналогия между постановками задачи об увлечении жидкости движущейся пластинкой [1–3] и задачи о распространении стационарного пламени [4, 5]. Методом теории особых возмущений найдено двухчленное асимптотическое выражение для толщины пленки h_0. Параметром разложения является число Бонда $\mathrm{Bo}\ll 1$. Дана количественная оценка границы применимости известной формулы [1, 2]. Ранее подобная оценка проводилась экспериментально [3]. Подход, используемый в данной работе, по-видимому, окажется плодотворным и для решения других задач капиллярной гидродинамики.

1. Толщина пленки, увлекаемой пластинкой, удовлетворяет следующему уравнению и граничным условиям:

$$V(h-h_0)+\frac{\rho g h_0^3}{3\eta}=\frac{h^3}{3\eta}\left\{\rho g-\sigma\frac{d}{dz}\left[\frac{d^2h/dz^2}{[1+(dh/dz)^2]^{3/2}}\right]\right\} \tag{1.1}$$

$$z\to 0,\quad h\to\infty,\quad dh/dz\to-\infty \tag{1.2}$$

$$z\to\infty,\quad h\to h_0,\quad dh/dz\to 0,\quad d^2h/dz^2\to 0 \tag{1.3}$$

Здесь h, h_0 — текущая и предельная толщины жидкой пленки; V — скорость движения пластины; ρ, σ, η — плотность, поверхностное натяжение и вязкость жидкости, g — ускорение свободного падения; пространственная координата z направлена вдоль пластины нормально к поверхности неподвижной жидкости, на которой $z=0$.

Задача содержит два характерных масштаба длины: h_0 — предельная толщина пленки ($z\to\infty$) и $a=\sqrt{\sigma/\rho g}$ — капиллярная постоянная Лапласа. Отношение $h_0/a=\sqrt{\mathrm{Bo}}$ является малым параметром задачи и в дальнейшем используется в качестве параметра разложения при построении решения. Кроме того, рассмотрен случай малых скоростей увлечения, когда $V\ll\sigma/3\eta$ (капиллярные силы намного превосходят вязкие).

Интервал изменения переменной $0\leqslant z<\infty$ разбивается на две области — область мениска $z\sim a$ (внешняя задача) и область течения вдали от мениска $z\gg 1$ (внутренняя задача).

Нормировка $\omega=3\eta V/\sigma$, $\xi=z/a$, $x=h/a$ и понижение порядка (1.1)—(1.3) заменой $f=(dx/d\xi)^2$ приводят к краевой задаче

$$\omega(x-\mathrm{Bo}^{1/2})+\mathrm{Bo}^{3/2}=x^3\left\{1+\frac{\sqrt{f}}{2}\frac{d}{dx}\left[\frac{df/dx}{(1+f)^{3/2}}\right]\right\} \tag{1.4}$$

$$x\to\infty,\quad f\to\infty \tag{1.5}$$

$$x\to\mathrm{Bo}^{1/2},\quad f\to 0,\quad df/dx\to 0. \tag{1.6}$$

Во внутренней области вводятся переменные $X=\mathrm{Bo}^{-1/2}x$, $F=\omega^{-2/3}f$, в результате вместо (1.4) и (1.6) имеем

$$X-1=\frac{\mathrm{Bo}(X^3-1)}{\omega}+\frac{X^3\sqrt{F}}{2}\frac{d}{dX}\left[\frac{dF/dX}{(1+\omega^{2/3}F)^{3/2}}\right] \tag{1.7}$$

$$X\to1,\ F\to0,\ dF/dX\to0$$

Задача (1.4)—(1.6) переопределена: уравнение второго порядка с тремя краевыми условиями. Лишнее граничное условие позволяет определить $\omega(\mathrm{Bo})$, подобно тому как это делается в теории стационарного распространения пламени [4, 5].

При более строгом подходе следовало бы доказать существование и единственность «собственного» значения $\omega(\mathrm{Bo})$. В данной статье этот вопрос остается открытым. Он представляет самостоятельный интерес.

2. Собственное значение ω отыскивается в виде регулярного в обеих областях асимптотического разложения

$$\omega=\delta_1(\mathrm{Bo})\omega_1+\delta_2(\mathrm{Bo})\omega_2+\dots \tag{2.1}$$

Соответственно искомые функции f и F во внешней и внутренней областях представляются рядами

$$f(x,\mathrm{Bo})=f_0(x)+\nu_1(\mathrm{Bo})f_1(x)+\dots \tag{2.2}$$

$$F(X,\ \mathrm{Bo})=F_0(X)+\mu_1(\mathrm{Bo})F_1(X)+\dots \tag{2.3}$$

Подстановка (2.1) и (2.3) в (1.7) дает

$$X-1=\frac{\mathrm{Bo}(X^3-1)}{\delta_1(\mathrm{Bo})\omega_1+\delta_2(\mathrm{Bo})\omega_2+\dots}+\frac{1}{2}X^3\sqrt{F_0+\mu_1(\mathrm{Bo})F_1+\dots}\times \tag{2.4}$$

$$\times\frac{d}{dX}\left\{\frac{dF_0/dX+\mu_1(\mathrm{Bo})dF_1/dX+\dots}{[1+(\delta_1\omega_1+\delta_2\omega_2+\dots)^{2/3}(F_0+\mu_1F_1+\dots)]^{3/2}}\right\}$$

$$F_0(1)+\mu_1(\mathrm{Bo})F_1(1)+\dots=0$$

$$dF_0(1)/dX+\mu_1(\mathrm{Bo})dF_1(1)/dX+\dots=0$$

Ограничимся рассмотрением случая

$$\delta_1(\mathrm{Bo})\ll1 \tag{2.5}$$

который соответствует исследуемому режиму течения с $V\ll\sigma/3\eta$.

Тогда условие (2.5) позволяет множители вида $1/[1+\psi(\delta_1\dots)]$ разложить в ряд. В итоге имеем

$$X-1=(\mathrm{Bo}/\delta_1\omega_1)(1-\delta_2\omega_2/\delta_1\omega_1+\dots)(X^3-1)+(X^3\sqrt{F_0}/2)d^2F_0/dX^2+ \tag{2.6}$$

$$+\mu_1(X^3\sqrt{F_0}/2)[(F_1/2F_0)dF_0dX^2+d^2F_1/dX^2]-\delta_1^{2/3}(3X^3\sqrt{F_0}\omega_1^{2/3}8)d^2F_0^2/dX^2.$$

Из сопоставления порядков слагаемых в (2.6) получим

$$d^2F_0/dX^2=2(X-1)/X^3\sqrt{F_0},\quad F_0(1)=dF_0(1)/dX=0 \tag{2.7}$$

При $X\gg1$ решение (2.7) представляется рядом

$$F_0(X)=c_1X+c_2+(8/3\sqrt{c_1})X^{-1/2}+\dots \tag{2.8}$$

Уравнение для $F_1(X)$ будет найдено позже, когда выяснится характер зависимостей $\mathrm{Bo}/\delta_1(\mathrm{Bo})$ и $\delta_1^{2/3}(\mathrm{Bo})$.

Возвращаясь к внешней области, после подстановки (2.1), (2.2) в

(1.4), (1.5) и группировки слагаемых одинакового порядка приходим к уравнениям, определяющим $f_0(x)$, $f_1(x)$

$$1+\frac{\sqrt{f_0}}{2}\frac{d}{dx}\left\{\frac{df_0/dx}{(1+f_0)^{3/2}}\right\}=0,\quad x\to\infty,\quad f_0\to\infty \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered}\nu_1(\mathrm{Bo})=\delta_1(\mathrm{Bo})\\ \frac{\omega_1}{x^2}+\frac{f_1}{2f_0}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{df_1/dx-[3f_1/2(1+f_0)]df_0/dx}{(1+f_0)^{3/2}}\right\}\end{gathered} \tag{2.10}$$

Из (2.9) находим

$$2\sqrt{2}(x+C)=\int\limits_0^{f_0(x)}\frac{df_0}{(1+f_0)^{3/2}[1-\sqrt{f_0/(1+f_0)}]^{1/2}} \tag{2.11}$$

где C — постоянная интегрирования.

Традиционная процедура сращивания (2.2) и (2.3) позволяет определить главный член разложения (2.1). Условие сращивания дает

$$\lim_{\mathrm{Bo}\to 0}\frac{f(x_1)-\omega^{2/3}F(x_1)}{\gamma(\mathrm{Bo})}=0 \tag{2.12}$$

где $x_1=x/\varphi(\mathrm{Bo})$ — промежуточная переменная, $\mathrm{Bo}^{1/2}\ll\varphi(\mathrm{Bo})\ll 1$, $\gamma(\mathrm{Bo})\to 0$ при $\mathrm{Bo}\to 0$.

Соответствующие разложения в промежуточной области представим в виде

$$\begin{gathered}f(x_1)=f_0(\varphi x_1)+\ldots=f_0(0)+\varphi(\mathrm{Bo})x_1f_0'(0)+\ldots\\ F(x_1)=F_0(\mathrm{Bo}^{-1/2}\varphi x_1)+\ldots\end{gathered} \tag{2.13}$$

Поскольку $\mathrm{Bo}^{-1/2}\varphi(\mathrm{Bo})\gg 1$, то ряд для $F(x_1)$ в соответствии с (2.8) записывается в виде

$$F(x_1)=C_1\,\mathrm{Bo}^{-1/2}\varphi(\mathrm{Bo})x_1+C_2+\ldots \tag{2.14}$$

Подставляя (2.1), (2.13), (2.14) в (2.12), получим

$$\begin{gathered}\lim_{\mathrm{Bo}\to 0}\{f_0(0)+\varphi(\mathrm{Bo})x_1f_0'(0)+\ldots-\\ -\delta_1^{2/3}(\mathrm{Bo})\omega_1^{2/3}[1+2\delta_2(\mathrm{Bo})\omega_2/3\delta_1(\mathrm{Bo})\omega_1+\ldots]\times\\ \times[C_1\,\mathrm{Bo}^{-1/2}\varphi(\mathrm{Bo})x_1+C_2+\ldots]\}/\gamma(\mathrm{Bo})=0\end{gathered}$$

Если в последнем выражении положить $\gamma(\mathrm{Bo})=1$, то имеем

$$f_0(0)=O(\mathrm{Bo}^{1/2}) \tag{2.15}$$

Условие (2.15) позволяет разложить подынтегральное выражение (2.11) при малых x в ряд и проинтегрировать его; в результате получим

$$2\sqrt{2}(x+C)=\{f_0+f_0^{3/2}/3-9f_0^2/16+\ldots\} \tag{2.16}$$

Обращая ряд (2.16), найдем

$$f_0(x)=2\sqrt{2}(x+C)-4\sqrt[4]{2}(x+C)^{3/2}/3+35(x+C)^2/6+\ldots \tag{2.17}$$

Наконец, подставляя в (2.12) разложения (2.1), (2.14), (2.17) и полагая $\gamma(\mathrm{Bo})=\varphi(\mathrm{Bo})$, находим

$$\delta_1(\mathrm{Bo})=\mathrm{Bo}^{3/4},\quad \omega_1=2^{9/4}/C_1^{3/2} \tag{2.18}$$

Последующая подстановка $\delta_1(\mathrm{Bo})$ и ω_1 в (2.6) дает возможность составить уравнение для $F_1(X)$ во внутренней задаче

$$\mu_1(\mathrm{Bo})=\mathrm{Bo}^{1/4}$$

$$(2.19)\qquad \frac{d^2F_1}{dX^2}+\frac{F_1(X-1)}{F_0^{3/2}X^3}+\frac{2(X^3-1)}{\omega_1X^3\sqrt{F_0}}=0$$

$$F_1(1)=dF_1(1)/dX=0$$

Решение уравнения (2.19) при $X\gg1$ представимо в виде

$$F_1(X)=-\frac{8X^{3/2}}{3\omega_1\sqrt{C_1}}+AX-\frac{4C_2X^{1/2}}{\omega_1C_1^{3/2}}+B+\ldots$$

Последовательное сравнение порядков величин в (2.12) показывает, что для определения $\delta_2(\mathrm{Bo})$ и ω_2 необходимо выполнить сращивание разложений $f(x)$ и $F(X)$ до величин порядка $\mathrm{Bo}^{1/2}$. А так как, согласно (2.10), (2.18), $\nu_1(\mathrm{Bo})=\mathrm{Bo}^{3/4}$, то при сращивании во внешнем разложении достаточно удержать только одно слагаемое $f_0(x)$.

Процедура сращивания аналогична использованной выше. Так, последовательно полагая $\gamma(\mathrm{Bo})=\mathrm{Bo}^{1/2}$ и $\gamma(\mathrm{Bo})=\varphi(\mathrm{Bo})\mathrm{Bo}^{1/4}$, получим

$$(2.20)\qquad C=\mathrm{Bo}^{1/2}C_2/C_1,\quad \delta_2(\mathrm{Bo})=\mathrm{Bo},\quad \omega_2=-2^{5/4}3A/C_1^{5/2}$$

В итоге из (2.1), (2.18), (2.20) приходим к двучленной формуле для собственного значения

$$(2.21)\qquad \omega=\frac{2^{9/4}\,\mathrm{Bo}^{3/4}}{C_1^{3/2}}-\frac{2^{5/4}\,3A\,\mathrm{Bo}}{C_1^{5/2}}+O(\mathrm{Bo}^{5/4})$$

Постоянные C_1 и A, входящие в окончательный результат (2.21), находились численным интегрированием на ЭВМ уравнений (2.7), (2.19). Было найдено

$$C_1=1.286,\qquad A=-0.153$$

Отметим, что отличие приведенного численного значения C_1 от данных [1, 2], по-видимому, объясняется разной точностью вычисления. Отметим, что приведенное здесь значение с точностью до четырех знаков совпадает с величиной C_1 из работы [6].

Использование (2.21) при обработке экспериментальных данных позволяет находить вязкость η или коэффициент поверхностного натяжения σ. В размерных переменных формула (2.21) имеет вид

$$(2.22)\qquad \left(\frac{\eta V}{\sigma}\right)=1.087\frac{h_0^{3/2}(\rho g)^{3/4}}{\sigma^{3/4}}\left[1+0.178\left(\frac{h_0^2\rho g}{\sigma}\right)^{1/4}\right]+$$
$$+O\left(\left(\frac{h_0^2\rho g}{\sigma}\right)^{5/4}\right)$$

По экспериментальным данным [3], число Бонда меняется в диапазоне $0.01\leqslant\mathrm{Bo}\leqslant1$. Вклад второго слагаемого относительно главного члена (2.22) при таких Во составляет 5.7–17.9%.

Разрешая (2.22) относительно коэффициента поверхностного натяжения σ, получим

$$\sigma=0.716\frac{(\eta V)^4}{h_0^6(\rho g)^3}\left[1-0.714\left(\frac{h_0^2\rho g}{\sigma}\right)^{1/4}\right]+O\left(\left(\frac{h_0^2\rho g}{\sigma}\right)^{5/4}\right)$$

Из этого выражения следует, что первое слагаемое определяет σ с точностью до 5% лишь при $\mathrm{Bo}<2.4\cdot10^{-5}$.

Для практических приложений большой интерес представляет зависимость числа Bo от безразмерной скорости движения пластины ω. Поскольку Bo и ω малы, то функцию $\mathrm{Bo}(\omega)$ представим в виде ряда

$$\mathrm{Bo}=b_1\omega^\alpha+b_2\omega^\beta+\ldots \tag{2.23}$$

С учетом (2.3) из (2.21) получим

$$\mathrm{Bo}=C_1^2\omega^{4/3}/8+C_1^{3/2}A\omega^{5/3}/2^{11/4}+O(\omega^2)$$

Окончательный результат в размерных переменных для толщины увлекаемой пленки h_0 запишется в виде

$$h_0=0.946\frac{(\eta V)^{2/3}}{(\rho g)^{1/2}\sigma^{1/6}}\left[1-0.116\left(\frac{\eta V}{\sigma}\right)^{1/3}\right]+O\left(\left(\frac{3\eta V}{\sigma}\right)^{4/3}\right) \tag{2.24}$$

Видно, что главный член разложения (2.24) совпадает с результатами [1, 2] и определяет h_0 с точностью до 5% при $(\eta V/\sigma)\leqslant0.08$.

Поступила 28 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д.* Собр. тр., т. 1. М., «Наука», 1969, стр. 412.
2. *Дерягин Б. В.* О толщине слоя жидкости, остающегося на стенках сосудов после их опорожнения, и теории нанесения фотоэмульсии при поливе кинопленки. Докл. АН СССР, 1943, т. 39, № 1.
3. *Дерягин Б. В., Титиевская А. С.* Экспериментальное изучение толщины слоя жидкости, оставляемого на твердой стенке позади отступающего мениска. Докл. АН СССР, 1945, т. 50, стр. 307.
4. *Зельдович Я. Б.* К теории распространения пламени. Ж. физ. химии, 1949, т. 22, вып. 1.
5. *Берман В. С., Рязанцев Ю. С.* К анализу задачи о тепловом распространении пламени методом сращиваемых асимптотических разложений. ПММ, 1972, т. 36, № 4.
6. *Железный Б. В.* Динамика отступающего мениска жидкости в капилляре с учетом специфических свойств тонких пленок. ПМТФ, 1976, № 3.