МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1980

УДК 532.54

О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ДЛИННОЙ ТРУБЕ

Н. Н. КОЧИНА

(Москва)

Неустановившееся движение жидкости в трубе с упругими стенками впервые было изучено Н. Е. Жуковским [1], причем он пренебрегал гидравлическим сопротивлением, считая жидкость идеальной. И. А. Чарным [2] рассматривалась реальная жидкость (гидравлические сопротивления учитывались). В [1–2] нелинейная система дифференциальных уравнений движения заменялась линейной системой. В настоящее время такое движение достаточно изучено и имеется обширная литература с важными для практических приложений результатами, обобщенными в монографиях [3–4]. При этом в нелинейной системе дифференциальных уравнений движения пренебрегается инерционными членами.

В данной работе решен ряд задач о неустановившемся движении вязкой сжимаемой жидкости в трубах с упругими стенками. Предполагается, что труба полубесконечна, ее ось горизонтальна и на одном из ее концов расход жидкости может меняться. Решение каждой из задач сводится к нахождению обобщенного решения некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений с частными производными для двух функций — средних величин скорости и давления в сечении трубы — с некоторыми постоянными или нулевыми начальными условиями и с граничным условием, дающим зависимость некоторой функции скорости и давления на конце трубы от времени. Отмечено, что решения этих же задач найдены методом последовательных приближений.

1. Уравнения движения жидкости в трубе имеют вид [2]

$$-S\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{\partial (Mu)}{\partial x}+\mu M|u| \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial (\rho S)}{\partial t}+\frac{\partial M}{\partial x}=0,\qquad M=\rho S u \tag{1.2}$$

Здесь u, ρ и p — средние в сечении трубы скорость, плотность и давление жидкости, S — площадь поперечного сечения трубы, $\mu M|u|$ — член, характеризующий гидравлическое сопротивление, причем μ, вообще говоря, есть функция от скорости u [5]. При этом использована гипотеза квазистационарности [3, 4].

Будем считать текущую в трубе жидкость баротропной и плотность ρ зависящей от давления p по закону

$$\rho=\rho_0\Phi(p) \tag{1.3}$$

где ρ_0 — известная константа.

Трубу будем считать круглой и цилиндрической. Зависимость давления p от радиуса трубы R примем, согласно [1],

$$p-p_0=eE(R-R_0)/RR_0 \tag{1.4}$$

Здесь e — толщина стенки трубы, E — модуль упругости ее стенок, p_0, R_0 — известные константы.

С помощью (1.2) приведем уравнение (1.1) к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\varphi(u) \tag{1.5}$$

$$\varphi(u)=-\mu u|u|$$

Используя (1.3) и (1.4), введем функцию

$$F(p)=\rho S/\rho_0 S_0=\Phi(p)[1-R_0(p-p_0)/eE]^{-2} \tag{1.6}$$

Полагая

$$\rho(p)a^2(p)=F(p)/F'(p) \tag{1.7}$$

где штрихом обозначена производная, и вводя вместо давления p новую функцию P, согласно формуле

$$P=\int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho(p)a(p)} \tag{1.8}$$

запишем уравнение (1.2) следующим образом:

$$\frac{\partial P}{\partial t}+u\frac{\partial P}{\partial x}+a(P)\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1.9}$$

Вводя вместо u и P новые функции-инварианты Римана [6] r и s:

$$2r=u+P,\ 2s=u-P \tag{1.10}$$

приведем уравнения (1.5) и (1.9) к виду

$$\frac{\partial(2r)}{dt}+[u+a(P)]\frac{\partial(2r)}{\partial x}=\varphi(u) \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial(2s)}{dt}+[u-a(P)]\frac{\partial(2s)}{\partial x}=\varphi(u) \tag{1.12}$$

Дифференциальные уравнения характеристик уравнений (1.11) и (1.12) есть

$$\frac{dx}{dt}=u+a(P) \tag{1.13}$$

$$\frac{dx}{dt}=u-a(P) \tag{1.14}$$

Условия совместности вдоль первого (1.13) и второго (1.14) семейств характеристик имеют соответственно вид

$$d(2r)=\varphi(u)dt \tag{1.15}$$

$$d(2s)=\varphi(u)dt \tag{1.16}$$

Здесь $a(P)$ — скорость звука в трубе.

Для воды уравнение изэнтропы (1.3) обычно берется в виде [7–9]

$$p-p_0=A(\rho^n-\rho_0{}^n) \tag{1.17}$$

где n=7.15 [8], n=6.6667 [9].

Используя (1.17), (1.3), (1.4), (1.6)—(1.8), получим выражения для скорости звука и зависимости P от $p-p_0$:

$$(1.18)\qquad a(p-p_0)=c[1+n\alpha(p-p_0)]^{1/2-1/2n}\left(\frac{1-\beta(p-p_0)}{1+\gamma(p-p_0)}\right)^{1/2}$$

$$(1.19)\qquad P=\frac{1}{\rho_0 c}\int\limits_0^{p-p_0} f(x)\,dx$$

$$f(x)=[1+n\alpha x]^{-1/2-1/2n}\left(\frac{1+\gamma x}{1-\beta x}\right)^{1/2}$$

$$(1.20)\qquad \alpha=\frac{1}{nA\rho_0{}^n},\qquad \beta=\frac{R_0}{eE},\qquad c=\frac{1}{\sqrt{\rho_0(\alpha+2\beta)}},\quad \gamma=(2n-1)\rho_0c^2\alpha\beta$$

Функции $a(p-p_0)$ и $f(x)$, определенные формулами (1.18)–(1.20), можно разложить в степенные ряды. Интегрированием получим ряд для функции $P(p-p_0)$. Радиус сходимости всех этих трех рядов один и тот же и равен

$$r=\min\left(\frac{1}{n\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}\right)$$

Обращением ряда $P(p-p_0)$:

$$(1.21)\qquad P=\frac{1}{\rho_0 c}\left[p-p_0+\frac{d}{2}(p-p_0)^2+\frac{f}{3}(p-p_0)^3+\ldots\right]$$

и подстановкой полученного таким образом ряда в выражение $a(p-p_0)$ получим ряд $a(P)$:

$$(1.22)\qquad a(P)=c+\rho_0c^2bP+\rho_0{}^2c^3gP+\ldots\sim c+\rho_0c^2bP$$

В формулах (1.21) и (1.22) обозначено

$$d=\frac{-(n+1)\alpha+\beta+\gamma}{2},\qquad b=\frac{(n-1)\alpha-\beta-\gamma}{2}$$

$$f=\beta_2+\frac{\beta_1(\gamma+\beta)}{2}+\frac{\beta\gamma}{4}-\frac{\gamma^2}{8}+\frac{\beta^2}{8}$$

$$(1.23)\qquad g=-\frac{bd}{2}+\alpha_2-\frac{\alpha_1(\beta+\gamma)}{2}+\frac{\beta\gamma}{4}+\frac{3}{8}\gamma^2-\frac{\beta^2}{8}$$

$$\beta_1=-\frac{(n+1)}{2}\alpha,\qquad \beta_2=\frac{(n+1)(3n+1)}{8}\alpha^2$$

$$\alpha_1=\frac{(n-1)}{2}\alpha,\qquad \alpha_2=-\frac{(n^2-1)\alpha^2}{8}$$

Обращенный ряд $p=p_0+\psi(P)$ и ряд (1.22) также сходятся в некоторых областях $|P|<r_1$ и $|P|<r_2$ соответственно [10].

Рассмотрим движение воды в чугунной трубе. Скорость звука в воде $c_b=1/\sqrt{\rho_0\alpha}=1400$ *м/сек*, для чугунных труб можно принять в среднем $c=1200$ *м/сек*. Из (1.20) следует, что величины α, β и γ одного порядка.

Скорость движения воды в водопроводе приблизительно равна 0.7–1.5 *м/сек*, т. е. мала по сравнению со скоростью звука в воде c_b и со скоростью звука в трубе c $u\ll c_b$, $u\ll c$.

Из уравнений (1.9) и (1.5) с использованием (1.8) ясно, что функции u и P одного порядка, т. е. $P\ll c_b$, $P\ll c$. Полагая $n=7$, из (1.23) найдем для чугунных труб

$$(1.24)\qquad d=5.27\frac{R_0}{eE}-\frac{4}{\rho_0 c_b^2}<0,\qquad b=-5.27\frac{R_0}{eE}+\frac{3}{\rho_0 c_b^2}>0$$

$$d\sim\frac{1}{\rho_0 c^2},\qquad b\sim\frac{1}{\rho_0 c^2}$$

Из (1.22)–(1.24) ясно, что безразмерная функция $[a(P)-c]/c$ представляет разложение в ряд по степеням малого безразмерного параметра P/c без свободного члена.

Формула (1.20) для величины c, представляющей в силу этого основной вклад в выражение (1.22) для скорости звука, была дана в [1].

Рассмотрим движение в полубесконечной трубе, к концу которой присоединен какой-либо агрегат, изменяющий расход жидкости (задвижка, турбина, компрессор, поршневой насос). Граничное условие на этом конце трубы получается из баланса расхода втекающей и вытекающей жидкости (в случае поршневого насоса при $f(P)=1$) [2] или из закона изменения открытия задвижки или направляющего аппарата турбины [4]

$$(1.25)\qquad (\rho S u)_{x=0}=\rho_0 S_0\zeta(t) f(P(0,t)),\ t>0$$

Здесь $\zeta(t)$, $f(P)$ — известные функции.

В силу (1.6) и (1.18)–(1.20) формулу (1.25) можно переписать следующим образом:

$$(1.26)\qquad \Omega[u(0,t),P(0,t)]=\zeta(t),\ t>0$$

$$\Omega(x,y)=xF_1(y)/f(y),\ F_1(P)=F(p)$$

Задача сводится к нахождению решения системы нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными (1.11) и (1.12), где использованы обозначения (1.10), с граничным условием (1.26) при $t>0$ и начальным условием

$$(1.27)\qquad u=0,\ P=P_0,\ t\leqslant 0$$

Функция $\varphi(u)$, входящая в уравнения (1.11)–(1.12), удовлетворяет условию

$$(1.28)\qquad \varphi(0)=0$$

Для ламинарного режима $\varphi(u)=-\mu u$, для турбулентного в предположении $\mu=\text{const}$ (что не всегда соответствует реальности [5]) $\varphi[u]=-\mu u|u|$.

Уравнениям (1.11)–(1.12) в силу условия (1.28) удовлетворяет решение (1.27), при этом вследствие (1.10), (1.13) и (1.22) имеем

$$(1.29)\qquad u=0,\ P=P_0,\ t\leqslant x/\omega,\ \omega=a(P_0)\approx c+\rho_0 c^2 b P_0$$

В области $t>x/\omega$ решение находится методом характеристик. На характеристике $t=x/\omega$ выполнены условия (1.29), на оси t ($t>0$) выполняется условие (1.26).

Функции $u(x, t)$ и $P(x, t)$ определяются последовательно из уравнений (1.13)–(1.16) с использованием начального условия

$$(1.30)\qquad u(x, x/\omega)=0,\ P(x, x/\omega)=P_0$$

и граничного условия (1.26).

Если функция $\zeta(t)$ разрывна, $u(x, t)$ и $P(x, t)$ будут также разрывными функциями. Прежде чем строить решение в этом случае, рассмотрим (в п. 2 и 3) две более простые задачи.

2. Остановимся подробнее на исследовании движения в трубе идеальной жидкости, т. е. предположим, что можно пренебречь гидравлическим сопротивлением и положить в уравнениях (1.11)—(1.12) $\varphi(u)=0$. Этот случай был в линейном приближении рассмотрен в [1]. Уравнения (1.11)—(1.12) принимают вид

$$\frac{\partial r}{\partial t}+[u+a(P)]\frac{\partial r}{\partial x}=0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial s}{dt}+[u-a(P)]\frac{\partial s}{\partial x}=0 \tag{2.2}$$

Эти уравнения нужно решить с граничным условием (1.26)

$$\Omega[u(0,t),P(0,t)]=\zeta(t),\ t>0 \tag{2.3}$$

и начальными условиями

$$u(x,t)=u_0,\ P(x,t)=P_0,\ t\leqslant 0 \tag{2.4}$$

Из-за малости скорости u по сравнению со скоростью звука c Н. Е. Жуковский заменил уравнения (2.1) и (2.2) следующими:

$$\frac{\partial r}{\partial t}+c\frac{\partial r}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial s}{\partial t}-c\frac{\partial s}{\partial x}=0 \tag{2.5}$$

и нашел решение линейной задачи (2.4)—(2.5) для трубы конечной длины с граничным условием $u(0,t)=\eta(t)$ $(t>0)$ [1].

Рассмотрим нелинейную задачу (2.1)—(2.4). Уравнения характеристик (1.13)—(1.16) в силу (1.10) запишутся таким образом:

$$\frac{dx}{dt}=u+a(P),\qquad u+P=\alpha=\text{const} \tag{2.6}$$

$$\frac{dx}{dt}=u-a(P),\qquad u-P=\beta=\text{const} \tag{2.7}$$

где параметрическая зависимость $a(P)$ дана формулами (1.18)—(1.20), и вследствие (2.4) все второе семейство характеристик (2.7) сведется к одной характеристике

$$2s=u-P=u_0-P_0=\beta_0,\ s=s_0=\beta_0/2 \tag{2.8}$$

Из (2.8) находим функцию P:

$$P=u-\beta_0 \tag{2.9}$$

Формулы (2.9) и (2.6) показывают, что вдоль каждой характеристики первого семейства функция u (а также P) принимает постоянное значение и характеристики (2.6) прямолинейны [7].

В силу (2.8) и (1.10) уравнение (2.2) удовлетворяется, а уравнение (2.1) в силу (1.22) переходит в следующее:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0,\quad f'(u)=u+a(u-\beta_0)\approx\omega+\theta u\\ \omega=c-\rho_0c^2b\beta_0,\qquad \theta=1+\rho_0c^2b\end{gathered} \tag{2.10}$$

Непрерывное решение квазилинейного уравнения (2.10) с условиями (2.3) и (2.4) имеет вид

$$u=u_0,\ P=P_0,\ t\leqslant x/[u_0+a(u_0-\beta_0)] \tag{2.11}$$
$$u=\eta\{t-x/[u+a(u-\beta_0)]\},\ P=u-\beta_0$$
$$t>x/[\eta(0)+a(\eta(0)-\beta_0)],\quad \Omega[\eta(t),\eta(t)-\beta_0]=\zeta(t)$$

Как известно [11], для квазилинейного уравнения вида (2.10) гладкое решение задачи Коши существует лишь в достаточно малой окрестности линии, на которой задана гладкая начальная функция, а для разрывной начальной функции это решение не существует, вообще говоря, в сколь угодно малой окрестности линии задания начальных данных. Поэтому рассматривается обобщенное решение уравнения (2.10) [12] — функция $u(x, t)$, для которой по любому замкнутому контуру Г, где Г — кусочно-гладкая граница некоторой области D двумерного евклидова пространства $x\geqslant 0$, выполнено уравнение

$$\oint_{\Gamma} (-u\,dx+f(u)\,dt)=0 \tag{2.12}$$

Из точки разрыва граничной функции $\zeta(t)$, а также из точки пересечения прямолинейных характеристик уравнения (2.10)

$$dx/dt=u+a(u-\beta_0)\approx\omega+\theta u$$

с наклоном

$$dX/dt=[f(u^+)-f(u^-)]/(u^+-u^-) \tag{2.13}$$

$$u^+=u[X(t)+0,t],\ u^-=u[X(t)-0,t] \tag{2.14}$$

будет выходить ударная волна $x=X(t)$.

Условие устойчивости разрывного решения есть

$$f'(u^+)<dX/dt<f'(u^-)$$

или в силу (2.10) и (1.22), (2.10)

$$u^+<u^- \tag{2.15}$$

Решение уравнения (2.12) — кусочно-непрерывная функция $u(x, t)$, совпадающая в точках, где она непрерывна, с решением (2.11) дифференциального уравнения (2.10); значения $u(x, t)$ по разные стороны от поверхности разрыва связаны уравнением (2.13), где введены обозначения (2.14).

Из (2.6), (2.9) и (2.10) ясно, что в точке пересечения характеристик условие (2.15) выполняется.

Из (2.8) вытекает формула

$$[P]=[u],\ [v]=v^+-v^- \tag{2.16}$$

переходящая вследствие (1.21) и (1.22) при $b=g=\ldots=d=f=\ldots=0$ в известную формулу для зависимости скачка давления от скачка скорости:

$$[p-p_0]=\rho_0 c[u]$$

данную Н. Е. Жуковским при решении задачи о гидравлическом ударе в водопроводных трубах [1].

3. Рассмотрим теперь неустановившееся движение вязкой жидкости с учетом гидравлического сопротивления ($\varphi(u)\neq 0$) в круглой нецилиндрической трубе, поперечное сечение которой зависит от координаты x по

показательному закону ($S_0>0$, $\varkappa>0$, $\varkappa\sqrt{S_0}\ll 1$):

(3.1) $$S(x)=S_0 \exp(\varkappa x)$$

Упругостью стенок трубы будем пренебрегать.

Можно показать, что уравнения (1.5), (1.2) и (3.1) приведутся к виду

(3.2) $$\begin{aligned}&\frac{\partial r}{\partial t}+[u+a(P)]\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{2}\varphi(u)-\frac{\varkappa}{2}ua(P)\\&\frac{\partial s}{\partial t}+[u-a(P)]\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{1}{2}\varphi(u)+\frac{\varkappa}{2}ua(P)\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения (1.10), а функция $a(P)$ дана зависимостью

(3.3) $$a(P)=c_b+(n-1)P/2$$

в силу (1.17)–(1.20), где положено $\beta=\gamma=0$.

Будем решать задачу (3.2), (3.3), (2.3), (2.4), где $u_0=0$. Ясно, что если функция $\varphi(u)$ имеет вид

$$\varphi(u)=-\varkappa ua(u-\beta_0)=-\varkappa u[c_b+(n-1)(u-\beta_0)/2],\qquad \beta_0=-P_0$$

то уравнения (3.2) имеют решение $u=0$, $P=P_0$.

Кроме того, решением второго уравнения (3.2) будет

$$s=s_0=\beta_0/2,\qquad P=u-\beta_0$$

и система (3.2) сводится к уравнению

(3.4) $$\frac{\partial u}{\partial t}+g'(u)\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(u)$$

(3.5) $$g'(u)=\omega+\theta u,\qquad \omega=c_b-(n-1)\beta_0/2,\ \theta=(n+1)/2$$

(3.6) $$\varphi(u)=-\xi u-\delta u^2,\qquad \xi=\varkappa\omega,\qquad \delta=\varkappa(n-1)/2$$

Решение квазилинейного уравнения (3.4) с граничным условием (2.3) рассмотрено в работе [13]. Общее решение (3.4) имеет вид [13] ($\Phi(y)$ – произвольная функция)

(3.7) $$t=\Psi(u)+\Phi[x-\sigma(u)],\qquad \Psi(u)=\int\frac{du}{\varphi(u)},\qquad \sigma(u)=\int\frac{g'(u)du}{\varphi(u)}$$

Используя (3.5) и (3.6), можно записать решение (3.7) с условиями (2.3), (2.4), где $u_0=0$, $P_0=-\beta_0$, в форме

$$\begin{aligned}&u=0,\quad P=-\beta_0,\quad t\leqslant x/\omega\\&u=\sigma^{-1}\{x+\sigma[\eta(t-\Psi(u)+\Psi\{\sigma^{-1}[\sigma(u)-x]\})]\}\\&P=u-\beta_0,\quad t>x/\omega,\quad \Omega[\eta(t),\eta(t)-\beta_0]=\zeta(t)\end{aligned}$$

Обобщенное решение уравнения (3.4) дается уравнением [13]

$$\oint_\Gamma(-u\,dx+g(u)\,dt)=\iint_D\varphi(u)\,dx\,dt$$

Выводы относительно возникновения ударных волн и их устойчивости остаются теми же, как и в п. 2, причем функция $f(u)$ заменена функцией $g(u)$. Решения для функций $u(x,t)$ и $P(x,t)$, полученные в п. 2 и 3, представляют простые волны. Для различных задач газовой динамики простые волны были подробно исследованы К. П. Станюковичем [7].

4. Вернемся к решению основной задачи, описываемой уравнениями (1.10)–(1.12), (1.30), (1.26) и исследованной в п. 1. Как было показано в конце п. 1, эта задача решается методом характеристик. Осталось описать способ решения в случае, когда граничная функция $\zeta(t)$ имеет разрывы первого рода.

В точке разрыва $t=T$ из (1.16) следует непрерывность функции Римана s:

$$s=s^+=s^-, \qquad [s]=0 \tag{4.1}$$

Из (1.10), (4.1), (2.16) получаем вновь формулу

$$[P]=[u]=[\eta], \qquad \Omega[\eta^-, \eta^-+P^+-\eta^+]=\zeta^- \tag{4.2}$$

Из точки $M(x=0,\ t=T)$ разрыва функции $\zeta(t)$ выходят две характеристики первого семейства (1.13) с наклонами

$$dx/dt=u^++a(P^+)\approx c+\eta^++\rho_0c^2bP^+ \tag{4.3}$$

$$dx/dt=u^-+a(P^-)\approx c+\eta^-+\rho_0c^2bP^- \tag{4.4}$$

Формулы (4.3) и (4.4) получены с использованием соотношения (1.22).

Пусть $\eta^+<\eta^-$. Тогда из (4.2) вытекает неравенство $P^+<P^-$, и вследствие (1.22) характеристика (4.3) в плоскости $(x,\ t)$ проходит выше характеристики (4.4) и в области между этими двумя характеристиками, исходящими из точки M, решение неоднозначно. Это означает, что из точки M выходит ударная волна и в окрестности точки M нужно рассматривать обобщенное решение задачи (1.10)–(1.12), (1.30), (1.26). Так как в точке M выполнено соотношение (4.1), из точки M исходит поверхность разрыва $x=X(t)$ со скоростью

$$dX/dt=[f(r^+)-f(r^-)]/(r^+-r^-) \tag{4.5}$$

$$f'(r)=u+a(P)=r+s+a(r-s)\approx c+s-\rho_0c^2bs+(1+\rho_0c^2b)r \tag{4.6}$$

Значения функций u и P в других точках этой поверхности разрыва можно найти, проведя характеристики первого семейства из точек, близких к M. В дальнейшем решение строится методом характеристик, а поверхность разрыва находится исходя из (4.5) и (4.6). Разрывное решение устойчиво, так как число характеристик, «приходящих» на разрыв, равно трем (две характеристики первого семейства (1.13) и одна – второго (1.14)), а число искомых функций – u и P или r и s – двум, т. е. на единицу меньше [12].

Ясно, что если функция $\zeta(t)$ периодическая, то решения $u(x,\ t)$ и $P(x,\ t)$ рассмотренных выше задач асимптотически стремятся к периодическим.

Периодическое решение задачи, исследованной в п. 3, для случая разрывной функции $\eta(t)$ специального вида получено в работе [13].

Отметим, что с учетом условий $u\ll c$, $P\ll c$ найдено также решение трех задач, рассмотренных выше, в явном виде, методом последовательных приближений, путем разложения, в соответствии с результатами теории размерности [14], безразмерных функций $u(x,\ t)/\bar{u}$ и $P(x,\ t)/\bar{u}$ в ряды по степеням малого безразмерного параметра $\varepsilon=\bar{u}/c$ (для безразмерных параметров, входящих в условия задачи: $\mu\sqrt{S_0}/\bar{u}$ (ламинарный режим), $\mu\sqrt{S_0}$ (турбулентный режим) и $\varkappa\sqrt{S_0}$ – разного порядка); здесь

$\bar{u}$ — некоторое значение скорости.

Ввиду малости функций $u(x, t)$ и $P(x, t)$ по сравнению с величиной c расхождения между точными и приближенными решениями носят скорее качественный, чем количественный характер: в приближенных решениях в отличие от точных разрывы могут возникать только за счет разрывов функции $\zeta(t)$, причем поверхности разрывов $X_i(t)$ совпадают с исходящими из точек разрывов $t=T_i$ $(i=1, 2, \ldots)$ функции $\zeta(t)$ характеристиками $x=c(t-T_i)$ первого семейства. Для практических же целей вполне достаточно ограничиться первым приближением или линеаризовать член, характеризующий гидравлическое сопротивление, как это и делается во многих работах по гидравлическому сопротивлению [1-4].

Изменением энтропии среды при переходе ее через фронт ударной волны можно пренебречь из-за слабости ударных волн [7].

Поступила 22 XI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуковский Н. Е.* О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. М.– Л., Гостехиздат, 1949.
2. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М., «Недра», 1975.
3. *Аронович Г. В., Картвелишвили Н. А., Любимцев Я. К.* Гидравлический удар и уравнительные резервуары. М., «Наука», 1968.
4. *Картвелишвили Н. А.* Динамика напорных трубопроводов. М., «Энергия», 1979.
5. *Чугаев Р. Р.* Гидравлика. Л., «Энергия», 1970.
6. *Riemann B.* Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. In: Riemann's Gesammelte Mathematische Werke. Leipzig, 1876.
7. *Станюкович К. П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М., Гостехиздат, 1955.
8. *Коул Р.* Подводные взрывы. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
9. *Кочина Н. Н., Мельникова Н. С.* О взрыве в воде с учетом сжимаемости. Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1966, т. 87.
10. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М.– Л., Гостехиздат, 1948.
11. *Олейник О. А.* Задача Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с разрывными начальными условиями. М., Изд-во АН СССР, 1954.
12. *Гельфанд И. М.* Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Усп. матем. наук, 1959, т. 14, вып. 2.
13. *Кочина Н. Н.* Об автоколебаниях жидкости большой плотности в трубах. ПММ, 1963, т. 27, № 4.
14. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1954.