МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1980

УДК 532.5

К ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВИХРЕЙ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

И. М. МИНДЛИН

(Горький)

В работе формулируются уравнения, описывающие эволюцию области с отличной от нуля завихренностью. Получено решение этих уравнений на ограниченном интервале времени для областей, имеющих в начальный момент форму сферы или кругового цилиндра. Показано, что сферический вихрь, возникший в покоящейся среде, начинает двигаться, вытягиваясь в направлении движения; цилиндрический вихрь под влиянием неравномерности интенсивности вихря на его границе изменяет свою скорость по величине и направлению, описывая криволинейную траекторию. Получены формулы, описывающие начальный этап эволюции жидкой сферы одной плотности в жидкой среде другой плотности.

Пусть в момент $t=0$ в объеме, ограниченном поверхностью $V=0$ (фигура), завихренность $\boldsymbol{\zeta}=\operatorname{rot}\mathbf{q}\neq0$ ($\mathbf{q}$ – скорость жидкости), а вне его $\boldsymbol{\zeta}=0$. Будем далее называть такой объем вихрем. Эволюция вихря при $t>0$ изучена в исключительных случаях. Круговой цилиндрический вихрь и вихрь Хилла являются стационарными; они сохраняют свою форму и скорость [1]. Нестационарным вихрям посвящены работы [2, 3].

В предлагаемой работе изучается класс нестационарных вихрей, ограниченных вихревой поверхностью, в окрестности которой разрывна касательная составляющая вектора скорости.

1. Условия на вихревой поверхности.

1. Условия на вихревой поверхности. Рассмотрим идеальную, несжимаемую жидкую среду, разделенную на части вихревой поверхностью $V=0$ (фигура). Жидкость находится в поле силы тяжести, направленной вниз параллельно оси x. Движение предполагается осесимметричным с осью симметрии x. При сделанных предположениях существует функция тока Ψ [1].

Пусть $\boldsymbol{\zeta}=\zeta\mathbf{i}_z$, $\mathbf{i}_z$ — орт, нормальный к меридиональной плоскости. Завихренность ζ удовлетворяет уравнению [1]

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\zeta y^k)-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\zeta y^k)=(\operatorname{grad}P\times\operatorname{grad}W)\cdot\mathbf{i}_z \tag{1.1}$$

Здесь $k=-1$ (в п. 6 $k=0$), t – время, P – давление, ρ – плотность, $W=\rho^{-1}$ – удельный объем, в правой части уравнения стоит смешанное произведение трех векторов.

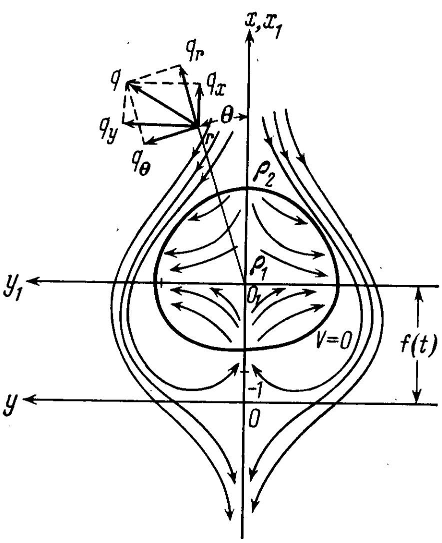
На поверхности $V=0$ скачком изменяется касательная к ней составляющая скорости. Это означает, что $\zeta=B(x, y, t)\delta(V)+C(x, y, t)$, где $\delta(V)$ – функция Дирака, интенсивность завихренности $B(x, y, t)$ определена в точках поверхности $V=0$, C – регулярная составляющая завихренности – определена в жидком объеме; B и C – ограниченные функции.

Составим дифференциальное уравнение для $B(x, y, t)$. Перейдем к криволинейным координатам u, v по формулам $u=U(x, y, t)$, $v=V(x, y, t)$ с якобианом $D\neq0$. В новых переменных вихревая поверхность описывается уравнением $v=0$. Любую функцию $F(x, y, t)$ в новых переменных будем обозначать $F_*(u,\ v,\ t)$. Введем обозначения $a_+=a^+=\lim\limits_{v\to+0} a$, $a_-=a^-=\lim\limits_{v\to-0} a$:

$$\frac{\partial a}{\partial v_+}=\lim_{v\to+0}\frac{\partial a}{\partial v},\quad \frac{\partial a}{\partial v_-}=\lim_{v\to-0}\frac{\partial a}{\partial v}$$

Очевидно, $\partial W_*/\partial v=\varepsilon(u,\ t)\delta(b)+h(u,\ v,\ t)$, $\varepsilon=W_+-W_-$, $h(u,\ v,\ t)$ – ограниченная функция; $\varepsilon=0$ в жидкости с непрерывной плотностью.

Перепишем (1.1) в новых переменных, после чего обе части этого уравнения проинтегрируем по v в пределах от $-\gamma$ до $\gamma>0$ и перейдем к пределу при $\gamma\to0$; для обобщенных функций полагаем $2\int a(v)\delta(v)\,dv=a_++a_-$. После перехода к пределу, положив $B_*=A(u,\ t)D_*$, получим



$$\frac{\partial A}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left[AD_*y_*^k\left(\frac{\partial\psi_*}{\partial v_+}+\frac{\partial\psi_*}{\partial v_-}\right)\right]_+-\varepsilon\frac{\partial P_*^+}{\partial u}=H(u,t)\tag{1.2}$$

$$H(u,t)=A\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_*+y_*^k\frac{\partial\psi_*}{\partial u}\frac{\partial D_*}{\partial v}-\frac{1}{D_*}\frac{\partial D_*}{\partial t}\right]_+-\left[\frac{\partial U}{\partial t}\frac{1}{D_*}\frac{\partial(AD_*)}{\partial u}\right]_+$$

Производные $\partial P_*/\partial u$ и $\partial\Psi_*/\partial u$ непрерывны.

Когда вихревая поверхность описывается уравнением $x=V^*(y,\ t)$, полагаем $u=y$, $v=x-V^*(y,\ t)$ и находим $H\equiv0$. Если любой луч, выходящий из точки O_1 (фигура), пересекает поверхность в одной точке, полагаем

$$x=f(t)+[v+1+V^*(s,\ t)]s,\quad y=[v+1+V^*(s,\ t)]\sqrt{1-s^2}\tag{1.3}$$
$$s=\cos\theta,\ r=v+1+V^*(s,\ t),\ f'=df/dt$$

и находим, используя указанную ниже формулу (2.6):

$$D_*=\sqrt{1-s^2}/r,\quad H=\frac{\partial}{\partial s}\left[Af'(t)\frac{1-s^2}{1+V^*}\right]$$

Уравнение (1.2) принимает вид

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{A}{2(V^*+1)^2}\left(\frac{\partial\psi_*}{\partial v_+}+\frac{\partial\psi_*}{\partial v_-}\right)+Af'(t)\frac{1-s^2}{1+V^*}\right]+\varepsilon\frac{\partial P_*^+}{\partial s}\tag{1.4}$$

2. Уравнения некоторого класса нестационарных вихрей. Пусть вихрь, образованный жидкостью плотности $\rho_1=\text{const}$, окружен однородной жидкостью плотности ρ_2, причем в момент $t=0$ он ограничен поверхностью $V=0$ (фигура), $V=r-1-V_0(\cos\theta)$, $V<0$ – внутренность вихря. В сферических координатах с полюсом O_1 (фигура) компоненты абсолютной скорости q_r и q_θ и завихренность ζ связаны с функцией тока соотношениями [1]

$$(2.1)\qquad q_r=-\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad q_\theta=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r},\quad \zeta=\frac{1}{r\sin\theta}E^2\psi,$$

$$E^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}-\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

Уравнения (1.1), (2.1) вместе с уравнением движения и условием несжимаемости

$$(2.2)\qquad \frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t}-\mathbf{q}\times\boldsymbol{\zeta}=-\mathbf{i}_x-\frac{1}{2}\operatorname{grad}q^2-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}P$$

$$(2.3)\qquad d\rho/dt=0$$

определяют при заданных начальных и граничных условиях функции Ψ, P, ρ; $\mathbf{i}_x$ — орт оси x.

Эти уравнения записаны в безразмерных переменных. В качестве основных размерных величин выбраны ρ_2, a — характерный линейный размер задачи (если начальная форма вихря — шар, то a — его радиус) и $T=\sqrt{a/g}$, где g — ускорение свободного падения.

Находящаяся на вихревой поверхности $V(r,\ \theta,\ t)=0$ жидкая частица может перемещаться в нормальном к поверхности направлении только вместе с поверхностью; это означает, что функция удовлетворяет уравнению

$$(2.4)\qquad \left[\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial r}(q_r-f'\cos\theta)+\frac{\partial V}{r\partial\theta}(q_\theta+f'\sin\theta)\right]_{V=0}=0$$

Четную относительно θ функцию V ищем в виде

$$(2.5)\qquad V=r-1-V^*(\cos\theta,\ t)$$

Используя (1.3) и (2.1), приведем (2.4) к виду

$$(2.6)\qquad \frac{\partial V^*}{\partial t}-\frac{1}{(1+V^*)^2}\frac{\partial\psi_*^+}{\partial s}=f'(t)\left(s-\frac{1-s^2}{1+V^*}\frac{\partial V^*}{\partial s}\right)$$

Можно показать, что объем, ограниченный поверхностью $V=0$, сохраняется постоянным во времени, если $V^*(s,\ t)$ удовлетворяет уравнению (2.6). Следовательно, уравнение (2.3) удовлетворяется, если положить $\rho=1$ при $v>0$ (вне вихря) и $\rho=\rho_1/\rho_2$ при $v<0$ (внутри вихря).

Уравнение (1.1) удовлетворяется в областях $V\neq0$, если положить $\zeta=r^{-1}\sin\theta A\delta(V)+c_0ye(V)$, $c_0=\text{const}$, $e(v)=0$ при $v>0$, $e(v)=1$ при $v<0$.

Соотношением $\Psi=r^2\sin^2\theta\Phi$ введем Φ вместо Ψ. Для Φ, A, P, V^* из (2.1), (2.2), (2.6) и (1.4), после введения переменных v, s по формулам (1.3), следуют уравнения

$$(2.7)\qquad L^2\Phi_*=A(s,\ t)\delta(v)+c_0(v+1+V^*)^2e(v)$$

$$L^2\Phi_*=(v+1+V^*)^2\frac{\partial^2\Phi_*}{\partial v^2}+4(v+1+V^*)\frac{\partial\Phi_*}{\partial v}-$$

$$-4s\left(\frac{\partial\Phi_\cdot}{\partial s}-\frac{\partial V^\cdot}{\partial s}\frac{\partial\Phi_\cdot}{\partial v}\right)+(1-s^2)\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\Phi_\cdot}{\partial s}-\frac{\partial V^\cdot}{\partial s}\frac{\partial\Phi_\cdot}{\partial v}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial V^\cdot}{\partial s}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\Phi_\cdot}{\partial s}-\frac{\partial V^\cdot}{\partial s}\frac{\partial\Phi_\cdot}{\partial v}\right)\right]$$

(2.8) $$\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left[(1-s^2)A\left(\frac{\partial\Phi_\cdot}{\partial v_+}+\frac{\partial\Phi_\cdot}{\partial v_-}+\frac{4\Phi_\cdot^{+}+2f'}{V^\cdot+1}\right)\right]+\varepsilon\frac{\partial P_\cdot^{+}}{\partial s}$$

(2.9) $$\frac{\partial P_\cdot^{+}}{\partial s}=-\frac{\partial}{\partial s}\left[s(V^\cdot+1)+\frac{1}{2}(q_\theta^2+q_r^2)_\cdot^{+}+f'(q_\theta\sin\theta-sq_r)_\cdot^{+}\right]+$$
$$+\frac{\partial V^\cdot}{\partial t}\frac{\partial q_{r\cdot}^{+}}{\partial s}-\frac{\partial V^\cdot}{\partial s}\frac{\partial q_{r\cdot}^{+}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}[(V^\cdot+1)q_{\theta\cdot}^{+}/\sin\theta]$$

(2.10) $$q_{r\cdot}^{+}=-2s\Phi_\cdot^{+}+(1-s^2)\left(\frac{\partial\Phi_\cdot}{\partial s}-\frac{\partial V^\cdot}{\partial s}\frac{\partial\Phi_\cdot}{\partial v}\right)_+$$
$$\frac{q_{\theta\cdot}^{+}}{\sin\theta}=2\Phi_\cdot^{+}+(V^\cdot+1)\frac{\partial\Phi_\cdot}{\partial v_+}$$

(2.11) $$\frac{\partial V^*}{\partial t}=-(2\Phi_*^{+}+f')\left(s-\frac{1-s^2}{1+V^*}\frac{\partial V^*}{\partial s}\right)+(1-s^2)\frac{\partial\Phi_*^{+}}{\partial s}$$

В (2.8) $\varepsilon=1-\rho_2/\rho_1<1$.

Положение подвижных осей x_1y_1 относительно осей абсолютных определяется функцией $f(t)$. Ниже в п. 3–5 на функцию $f(t)$ накладывается условие

(2.12) $$s=0,\quad t\geqslant 0\quad \partial V^*/\partial s=0$$

Это условие фиксирует положение оси o_1y_1 относительно вихря таким образом, что ось o_1y_1 пересекает границу вихря под углом 90°. К уравнениям (2.7)–(2.12) присоединим начальные условия

(2.13) $$t=0,\ \Phi_*=\Phi_0(v,s),\ A=A_0(s),\ V^*=V_0(s),\ f=0$$

Вследствие (2.7) Φ_0 должна удовлетворять уравнению

(2.14) $$L(\Phi_0)=A_0(s)\delta(v)+c_0(v+1+V_0(s))^2e(v)$$

Оператор $L(\Phi_0)$ получается из $L^2\Phi_*$, если в последнем положить $t=0$. Ниже изучается эволюция вихря в неограниченной жидкости, так что граничные условия формулируются в виде

(2.15) $$v\to+\infty,\ \Phi_*\to 0,\ \partial\Phi_*/\partial v\to 0,\ \partial\Phi_*/\partial s\to 0$$

При этих условиях жидкость на бесконечности покоится. Из уравнений (2.7)–(2.11) следует, что давление непрерывно при $t\geqslant 0$, если функция $A_0(s)$ непрерывна.

3. Эволюция сферического вихря (начальная стадия). Пусть в (2.13) $V_0=0$, т. е. в начальный момент вихрь имеет форму шара. Тогда (2.14) принимает вид

$$L(\Phi_0)=A_0(s)\delta(v)+c_0(v+1)^2e(v) \tag{3.1}$$

$$L(F)=(v+1)^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}+4(v+1)\frac{\partial F}{\partial v}+(1-s^2)\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}-4s\frac{\partial F}{\partial s} \tag{3.2}$$

Ищем решение уравнений (2.7)—(2.12) в виде

$$\Phi_*(v,s,t)=\sum_{k\geqslant 0}\Phi_k(v,s)t^k,\quad A(s,t)=\sum_{k\geqslant 0}A_k(s)t^k, \tag{3.3}$$

$$V^*(s,t)=\sum_{k\geqslant 0}V_k(s)t^k,\quad f'(t)=\sum_{k\geqslant 0}u_k t^k\quad (u_k=\mathrm{const})$$

При этом получим ряды по степеням t

$$L^2\Phi_*=\sum_{k\geqslant 0}t^kL_k\Phi_*,\quad \partial P_*^+/\partial s=\sum_{k\geqslant 0}B_k(s)t^k \tag{3.4}$$

Подставляя ряды (3.3), (3.4) в уравнения (2.7)—(2.12), получим уравнения для функций $\Phi_k(v,\ s)$, $A_k(s)$, $V_{k+1}(s)$, u_k. В рамках каждого приближения для $\Phi_k(v,\ s)$ получается уравнение вида

$$L(\Phi_k)=T_k(v,s)-\left\{\varepsilon\left[2\Phi_k(0,s)+\frac{\partial\Phi_k}{\partial v_+}\right]+R_k(s)\right\}\delta(v) \tag{3.5}$$

Оператор $L(\Phi)$ определен формулой (3.2), функции $T_k(v,\ s)$ и $R_k(s)$ зависят только от решений предыдущих приближений; для нулевого приближения получим (3.1).

В областях $v>0$ и $v<0$ уравнение (3.5) имеет вид

$$L(\Phi_k)=T_k(v,\ s) \tag{3.6}$$

Уравнение (3.5) будет удовлетворено, если решения уравнения (3.6) в областях $v>0$ и $v<0$ «состыковать» непрерывно на поверхности $v=0$ так, чтобы для скачка производной $\partial\Phi_k/\partial v$ выполнялось равенство

$$\frac{\partial\Phi_k}{\partial v_+}-\frac{\partial\Phi_k}{\partial v_-}=\varepsilon\left[2\Phi_k(0,s)+\frac{\partial\Phi_k}{\partial v_+}\right]+R_k(s) \tag{3.7}$$

В силу (2.15) $\Phi_k\to 0$, $\partial\Phi_k/\partial v\to 0$, $\partial\Phi_k/\partial s\to 0$ при $v\to+\infty$.

Уравнение $L(F)=0$ имеет решения вида

$$v<0,\quad F=\sum_{n\geqslant 0}c_nG_n(s)(v+1)^n;\quad v>0, \tag{3.8}$$

$$F=\sum_{n\geqslant 0}b_nG_n(s)(v+1)^{-n-3}$$

Здесь $G_n(s)=a_0+\ldots+a_ns^n$ — многочлен с целыми коэффициентами, определяемыми формулой

$$a_{m+2}=a_m(m-n)(m+n+3)/(m+2)(m+1),\ \text{так что}\ G_0=1,\ G_1=s,$$
$$G_2=1-5s^2,\ G_3=3s-7s^3,\ldots$$

Выполнение условия (3.7) обеспечивается выбором произвольных постоянных c_n, b_n в (3.8).

Пусть $A_0(s)=a_0=\mathrm{const}$, тогда (3.1) удовлетворяется при

(3.9) $v<0,\ \Phi_0=0{,}1c_0[(v+1)^2-1]-b_0;\ v>0,\ \Phi_0=-b_0(v+1)^{-3}$

(3.10) $3b_0=a_0+c_0/5$

Равенство (3.10) следует из условия $\dfrac{\partial\Phi_0}{\partial v_+}-\dfrac{\partial\Phi_0}{\partial v_-}=A_0(s)$. Из (2.11) и (2.12) находим $u_0=2b_0$, $V_1=0$.

Уравнения первого приближения. Из (2.7)–(2.10) следует

$$L_1\Phi_*=A_1(s)\delta(v),\ L_1\Phi_*=L(\Phi_1),\ A_1=-s(3b_0+c_0/5)a_0+\varepsilon B_0,$$

$$B_0=-1+9b_0^2s+2\Phi_1(0,s)+\partial\Phi_1/\partial v_+.$$

Отсюда для Φ_1 получается уравнение

(3.11) $$L(\Phi_1)=\left\{-\varepsilon-hs+\varepsilon\left[2\Phi_1(0,s)+\frac{\partial\Phi_1}{\partial v_+}\right]\right\}\delta(v)$$

$$h=9b_0^2(1-\varepsilon)-(c_0/5)^2$$

Решение уравнения (3.11) ищем в виде

$$v<0,\ \Phi_1=b_1+c_1s(v+1),\ v>0,\ \Phi_1=b_1(v+1)^{-3}+c_1s(v+1)^{-4}$$

Условие (3.7) дает $c_1=h(5-2\varepsilon)^{-1}$, $b_1=\varepsilon(3-\varepsilon)^{-1}$. Из (2.11) и (2.12) следует $u_1=-2b_1$, $2V_2=c_1(1-3s^2)$. Для границы вихря, согласно (2.5), получаем уравнение $r=1+t^2V_2+o(t^2)$, из которого видно, что на начальной стадии эволюции вихрь сжимается вдоль оси x, если $c_1>0$ (т. е. если начальная скорость $2b_0$ вихря достаточно велика), и растягивается вдоль оси x, если $c_1<0$. Вихрь приобретает вертикальное ускорение $-2b_1$, знак которого зависит от соотношения плотностей внутри и вне вихря.

При $c_1=0$ для границы вихря следует уравнение

$$r=1+{}^1/_3c_2(1-3s^2)t^3+[{}^1/_4c_3(1-3s^2)+ds^3]t^4+o(t^4),\quad c_2=-3b_0m,$$

$$c_3=b_1m,\ m=3b_1(1-\varepsilon)(5-2\varepsilon)^{-1},\ d=15b_0c_2(1-\varepsilon)(7-3\varepsilon)^{-1}$$

Задача об эволюции вихря при начальных условиях (3.9) изучалась в работе [2]. Авторы этой работы заменили уравнение (1.1) приближенным и изучили задачу только при $c_1=0$, считая это равенство необходимым для непрерывности давления при $t=0$. Но, как отмечалось выше, в силу точных уравнений давление непрерывно при любой непрерывной функции $A_0(s)$, т. е. при любом c_1.

4. Эволюция сферического вихря в однородной жидкости. Для однородной жидкости $\rho_1=\rho_2$, $\varepsilon=0$. Уравнения (2.7)–(2.12), (3.1) сохраняют силу. Рассмотрим течение с начальными условиями (3.9). Если в (3.10) $a_0=0$, то задача имеет стационарное решение $\Phi_*=\Phi_0$, $A=0$, $V^*=0$ – вихрь Хилла. При $a_0\neq0$ решение задачи нестационарно.

Особый интерес представляет случай $b_0=0$, когда в начальный момент окружающая вихрь жидкость покоится. При $\varepsilon=0$, $b_0=0$ находим

$$v<0:\quad 5\Phi_1=-a_0^2s(v+1),$$

$$\Phi_2=\left[-\frac{1}{25}G_2(s)(v+1)^2+\frac{1}{10}(1-3s^2)(v+1)+\frac{2}{75}\right]a_0^3$$

$$v>0:\quad 5\Phi_1=-a_0^2s(v+1)^{-4},$$

$$\Phi_2=\left[\frac{1}{15}(v+1)^{-3}+\frac{9}{350}G_2(s)(v+1)^{-5}\right]a_0^3$$

Для границы вихря и его скорости следуют уравнения

$$r=1-\frac{1}{10}(1-3s^2)a_0^2t^2+\frac{6}{35}s^3a_0^3t^3+o(t^3),$$

$$f'=-\frac{232}{525}a_0^3t^2+o(t^2)$$

Вихрь начинает двигаться вдоль оси x, вытягиваясь в направлении движения.

Ряды (3.3) (по крайней мере их первые члены) можно эффективно построить, когда $A_0(s)$ — многочлен. В этом случае $\Phi_0=F_0+$ $+0.1c_0[(v+1)^2-1]$ при $v<0$ и $\Phi_0=F_0-b_0(v+1)^{-3}$ при $v>0$, где F_0 — функция вида (3.8).

5. Эволюция жидкого «пятна» в жидкой среде. Пусть $\varepsilon\neq 0$, начальные условия $\Phi_0=A_0=V_0=f(0)=0$. Это означает, что в покоящейся в момент $t=0$ жидкой среде покоится жидкий шар, отличающийся плотностью от окружающей среды. Нас интересует эволюция его формы. Подобная задача об эволюции жидкого «пятна», но в устойчиво стратифицированной среде, изучалась численно в работе [4].

Уравнения (2.7)–(2.12) сохраняют силу, но в (2.7) и (2.14) следует положить $c_0=0$. Решение ищем в виде рядов (3.3), причем $\Phi_k=A_k=V_{k+1}=$ $=u_k=0$ при четных k. Для первых членов этих рядов получим

$$v<0:\ \Phi_1=c_1,\ \Phi_3=c_3s(v+1);\ v>0:\ \Phi_1=c_1(v+1)^{-3},$$

$$\Phi_3=c_3s(v+1)^{-4};$$

$$c_1=\varepsilon(3-\varepsilon)^{-1},\ c_3=3(1-\varepsilon)c_1^2(5-2\varepsilon)^{-1}>0,\ u_1=-2c_1,\ u_3=0,$$

$$V_2=0,\quad 4V_4=c_3(1-3s^2),\quad V_6=\gamma(\varepsilon)c_3^{3/2}s^3$$

Формула для $\gamma(\varepsilon)$ громоздка, так что приведем только несколько значений: $\gamma(-10)=1.388$, $\gamma(-0.9)=1.213$, $\gamma(-0.5)=1.175$, $\gamma(0.1)=-1{,}088$, $\gamma(0.5)=-0.995$, $\gamma(0.9)=-0.934$.

Граница «пятна» и его скорость определяются формулами

$$r=1+V_4t^4+V_6t^6+o(t^6),\ f'=-2c_1t+o(t^4)$$

На фигуре $\varepsilon=-0.9$, $t=0.7c_3^{-1/4}$ указана форма всплывающего «пятна» и мгновенная картина линий тока (качественно); уравнение этих линий $Q_ydx_1-Q_xdy_1=0$, составляющие Q_xQ_y скорости относительно осей x_1y_1 отыскиваются по функции Φ_*.

6. Цилиндрические вихри постоянной завихренности. В случае течения несжимаемой идеальной жидкости, параллельного плоскости xy, также существует функция тока ψ. Для плоского течения справедливы уравнения (1.1) и (1.2), если в них положить $k=0$. Смысл величин, входящих в эти уравнения, соответствует плоскому течению.

Из уравнений (1.1), (1.2) и (2.3) совместно с

$$(6.1)\qquad q_r=-\frac{\partial\psi}{r\partial\theta},\quad q_\theta=\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

$$\zeta=E^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}$$

определяются неизвестные функции ψ, P, ρ. Считая жидкость однородной, положим $\rho=1$. Дальнейшая постановка задачи о цилиндрических вихрях аналогична приведенной выше постановке задачи о вихрях типа сферического. Предполагается, что вихрь ограничен поверхностью $V\equiv r-1-V^*(\theta, t)=0$. Вводятся криволинейные координаты v, θ по формулам

$$x=f(t)+[v+1+V^*(\theta,t)]\cos\theta,\quad y=\varphi(t)+[v+1+V^*(\theta,t)]\sin\theta$$

На фигуре $\varphi=0$; при $\varphi\neq0$ ось x_1 параллельна x; $r=v+1+V^*$, θ — полярные координаты в плоскости x_1y_1 с полюсом o_1; $D_*=-(v+1+V^*)^{-1}$.

Уравнение (1.1) удовлетворяется в области $v\neq0$, если положить $\zeta=-A(\theta,t)(1+V^*)^{-1}\delta(v)+c_0e(v)$.

Соотношением $\psi=r\Phi$ введем функцию Φ вместо ψ. Из (6.1) для $\Phi_*(v,\theta,t)=\Phi(x,y,t)$ следует уравнение

$$L^2\Phi_*=-A(\theta,t)\delta(v)+c_0(v+1+V^*)e(v)\tag{6.2}$$

$$L^2\Phi_*=(v+1+V^*)^2\frac{\partial^2\Phi_*}{\partial v^2}+3(v+1+V^*)\frac{\partial\Phi_*}{\partial v}+\Phi_*+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Phi_*}{\partial\theta}-\frac{\partial V^*}{\partial\theta}\frac{\partial\Phi_*}{\partial v}\right)-\frac{\partial V^*}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\Phi_*}{\partial\theta}-\frac{\partial V^*}{\partial\theta}\frac{\partial\Phi_*}{\partial v}\right)$$

Уравнение (1.2) принимает вид

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[A\left(\frac{\partial\Phi_*}{\partial v_+}+\frac{\partial\Phi_*}{\partial v_-}+2\frac{\Phi_*^{+}+f'\sin\theta-\varphi'\cos\theta}{V^*+1}\right)\right]=0\tag{6.3}$$

Функция $V^*(\theta,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial V^*}{\partial t}+\frac{1}{V^*+1}\frac{\partial}{\partial\theta}[(V^*+1)(\Phi_*^{+}+f'\sin\theta-\varphi'\cos\theta)]=0\tag{6.4}$$

На функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ накладываются условия

$$\theta=0,\quad \theta=\pi/2,\ t\geqslant0,\quad \partial V^*/\partial\theta=0\tag{6.5}$$

Уравнения (6.2)—(6.5) аналогичны (2.7), (2.8), (2.11), (2.12). Граничные условия имеют вид (2.15), а начальные

$$t=0,\quad \Phi_*=\Phi_0(v,\theta),\quad A=A_0(\theta),\quad V^*=0,\quad f=\varphi=0\tag{6.6}$$

Вследствие (6.2) должно выполняться

$$L(\Phi_0)=-A_0(\theta)\delta(v)+c_0(1+v)e(v)\tag{6.7}$$

$$L(F)=(v+1)^2\frac{\partial^2F}{\partial v^2}+3(v+1)\frac{\partial F}{\partial v}+F+\frac{\partial^2F}{\partial\theta^2}$$

При построении решения задачи (6.2)—(6.6) используются аналогично (3.8) периодические по θ (с периодом 2π) с разделяющимися переменными решения уравнения $L(F)=0$. Нетрудно проверить, что $\Phi_0=F_0+0.25c_0(v+1)$ при $v<0$ и $\Phi_0=F_0+0.25c_0(v+1)^{-1}$ при $v>0$, где $L(F_0)=0$ в областях $v\neq0$.

При $A_0(\theta)=a_0+a_1\cos\theta$ получим

$$v<0:\quad \Phi_0=b_0\cos\theta+0.25c_0(v+1);$$

$$v>0:\quad \Phi_0=b_0\cos\theta(v+1)^{-2}+0.25c_0(v+1)^{-1};\qquad c_0=2a_0,\quad 2b_0=a_1$$

Начальными условиями определяется поле скоростей (относительно осей x_1, y_1) с составляющими $Q_r=0$, $Q_\theta=a_0r$ внутри вихря и $Q_x=0.5a_1r^{-2}\sin2\theta$, $Q_y=-0.5a_1(1+r^{-2}\cos2\theta)$ вне вихря. Начальная скорость вихря относительно покоящихся осей равна $0.5a_1$ и направлена параллельно оси y. Форма вихря и скорость связанных с ним осей определяются формулами

$$r=1+0.5a_1^2t^2\cos 2\theta+o(t^2),\qquad f'(t)=2a_0a_1^2t^2+o(t^2),$$

$$\varphi'(t)=\frac{1}{2}a_1\left[1+\frac{1}{8}a_1(9a_1-32a_0)t^2+o(t^2)\right]$$

Вихрь ускоряется, если $9a_1^2-32a_0a_1>0$; его скорость меняется по величине и направлению.

Поступила 5 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Милн-Томсон Л. И.* Теоретическая гидродинамика. М., «Мир», 1964.
2. *Simons G. A., Larson R. S.* Formation of vortex rings in a stratified atmosphere. Phys. Fluids, 1974, vol. 17, No. 1.
3. *Новиков Е. А.* Динамика и статистика системы вихрей. ЖЭТФ, 1975, т. 68, в. 5.
4. *Кузнецов Б. Г., Черных Г. Г.* Численное исследование поведения однородного «пятна» в идеальной стратифицированной по плотности жидкости. ПМТФ, 1973, № 3.