

## О ВОЗНИКНОВЕНИИ КОНВЕКЦИИ В СМЕСЯХ С КОНЦЕНТРАЦИОННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

А. К. КОЛЕСНИКОВ, В. И. ЯКУШИН

(Пермь)

Определение условий возникновения конвекции в среде с внутренним тепловыделением представляет интерес как для оценки возможностей теплоотвода в различного рода реакторах и теплообменных устройствах [1, 2], так и в связи с некоторыми геофизическими и астрофизическими проблемами [3]. Конвекция, обусловленная внутренними источниками тепла, рассматривалась в ряде работ, обзор которых содержится в [4]. В большинстве из них тепловыделение в среде предполагается однородным, а сама среда — однокомпонентной. Однако во многих практически интересных процессах (например, отвод тепла от жидких радиоактивных отходов, протекание химических реакций, селективное светопоглощение [5]) тепловыделение, как правило, неоднородно и среда представляет собой многокомпонентную смесь. Интенсивность тепловыделения при этом можно считать пропорциональной концентрации «активной» компоненты (концентрационные источники тепла).

Очевидно, условия возникновения конвекции в этих случаях должны заметно отличаться от таковых для обычных жидкостей. Отличия могут быть вызваны, во-первых, характером распределения в среде температурных градиентов; во-вторых, возможностью термоконцентрационной неустойчивости и, в-третьих, диффузионным перераспределением внутренних источников.

В работе [6] исследовалась конвективная устойчивость горизонтального слоя бинарной смеси, в котором в состоянии равновесия поддерживается постоянный вертикальный градиент концентрации активной компоненты, причем максимум концентрации располагается на нижней границе. В результате численного решения линейной задачи для амплитуд нормальных возмущений были построены кривые нейтральной устойчивости при различных значениях числа Льюиса и диффузионного числа Релея. Вычисления показали, что при направленном вниз градиенте тепловыделяющей компоненты неустойчивость носит монотонный характер.

В настоящей работе рассматривается устойчивость горизонтального слоя двухкомпонентной смеси с градиентом концентрации активной компоненты, направленным вверх. Как оказывается, картина неустойчивости существенно зависит от направления градиента. Так, в исследуемом случае неустойчивость может иметь и монотонный, и колебательный характер. Особенностью задачи является также существование двух независимых нейтральных кривых, связанных с тепловым и концентрационным механизмами неустойчивости. С помощью метода пошагового интегрирования определены области возникновения монотонной и колебательной конвекции. Приведены графики амплитуд критических возмущений скорости, температуры и концентрации.

Рассмотрим конвективную устойчивость несжимаемой бинарной смеси, одна из компонент которой обуславливает внутреннее тепловыделение с удельной мощностью  $Q$ , пропорциональной концентрации  $C$  активной компоненты:  $Q=Q_0C$ . Такая зависимость  $Q(C)$  соответствует, например, экзотермической реакции первого порядка, когда скорость реакции слабо зависит от температуры. Изменение интенсивности тепловыделения в среде может происходить тогда гораздо медленнее, чем установление полей температуры и концентрации.

Пусть смесь заполняет бесконечный горизонтальный слой, ограниченный изотермическими плоскостями  $z=0$  и  $z=d$ , поддерживаемыми при одинаковой температуре  $T^0$ . В объеме слоя задается постоянный направленный вверх градиент концентрации тепловыделяющей компоненты  $A$ .

Выберем в качестве начала отсчета температуры величину  $T^0$ , а концентрации — ее значение на нижней границе слоя. Тогда краевые условия для температуры, концентрации и скорости запишем в виде

$$(1) \quad z=0: v=0, T=0, C=0; \quad z=d: v=0, T=0, C=Ad$$

В пренебрежении малыми эффектами термодиффузии и диффузионной теплопроводности стационарные распределения температуры и концентрации, соответствующие состоянию механического равновесия, имеют вид

$$(2) \quad C_0 = Az, \quad T_0 = \frac{Q_0 A}{6\chi\rho_0 c_p} z(d^2 - z^2)$$

Здесь  $\rho_0$  — средняя плотность смеси,  $\chi$  — коэффициент температуропроводности,  $c_p$  — удельная теплоемкость.

Исследуем устойчивость равновесных распределений (2) относительно малых нормальных возмущений скорости, температуры и концентрации, пропорциональных  $\exp[-\lambda t + i(k_1 x + k_2 y)]$ , где  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$  — комплексный декремент возмущений.

Система линеаризованных уравнений для амплитуд возмущений находится из полных уравнений конвекции в приближении Буссинеска для бинарной смеси с тепловыделением обычным образом [7, 6]. Выбирая в качестве единиц измерения расстояния  $d$ , времени  $d^2/\nu$  ( $\nu$  — кинематическая вязкость), скорости  $\chi/d$ , температуры  $Q_0 A d^2 / 6\rho_0 c_p \chi$ , концентрации  $Ad$  и давления  $\rho_0 \nu \chi / d^2$ , получим

$$(3) \quad \begin{aligned} -\lambda(w'' - k^2 w) &= (w^{1\nu} - 2k^2 w'' + k^4 w) - Rk^2 \theta - R_d k^2 \eta \\ -\lambda P \theta &= (\theta'' - k^2 \theta) + 6\eta - w T_0' \\ -\lambda P_d \eta &= (\eta'' - k^2 \eta) - \frac{P_d}{P} w C_0' \quad (k^2 = k_1^2 + k_2^2) \end{aligned}$$

$$R = \frac{g\beta_1 Q_0 A d^6}{6\rho_0 c_p \nu \chi^2}, \quad R_d = \frac{g\beta_2 A d^4}{\nu \chi}, \quad P = \frac{\nu}{\chi}, \quad P_d = \frac{\nu}{D}$$

$$\beta_1 = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{c,p}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{T,p}$$

В системе (3) через  $w(z)$ ,  $\theta(z)$  и  $\eta(z)$  обозначены соответственно амплитуды возмущений вертикальной составляющей скорости, температуры и концентрации;  $T_0(z)$  и  $C_0(z)$  — теперь безразмерные равновесные профили. Уравнения содержат четыре параметра подобия:  $R$  и  $R_d$  — тепловое и диффузионное числа Релея;  $P$  и  $P_d$  — тепловое и диффузионное числа Прандтля ( $P_d$  называют также числом Шмидта). Коэффициент  $\beta_1$  определяет тепловое расширение смеси, а  $\beta_2$  характеризует зависимость плотности от концентрации. Если тепловыделение обусловлено легкой компонентой то  $\beta_2 > 0$ ; для тяжелой активной составляющей  $\beta_2 < 0$ .

Ввиду того что на границах слоя поддерживаются равновесные значения скорости, температуры и концентрации, для  $w$ ,  $\theta$  и  $\eta$  выполняются условия

$$(4) \quad z=0; 1: w=w'=\theta=\eta=0.$$

Определение порога возникновения конвекции в смеси с концентрационными источниками тепла сводится к нахождению декрементов  $\lambda(P, P_d, R, R_d, k)$ , являющихся собственными значениями краевой задачи (3), (4). Границе устойчивости соответствуют  $\lambda_r = 0$  (нейтральные возмущения), при  $\lambda_r < 0$  возмущения нарастают, при  $\lambda_r > 0$  — затухают. Если для  $\lambda_r = 0$  значения  $\lambda_i \neq 0$ , то критические возмущения имеют колебательный характер, частота колебаний определяется величиной  $\lambda_i$ .

Решение задачи (3), (4) осуществлялось численно методом Рунге – Кутты – Мерсона с пошаговым анализом точности [8]. Этим методом строились четыре линейно-независимых частных решения, удовлетворяющих граничным условиям в начальной точке интегрирования. Характеристическое соотношение для нахождения комплексного декремента  $\lambda$  получается из требования существования нетривиального решения задачи и выполнения граничных условий в конечной точке интервала интегрирования.

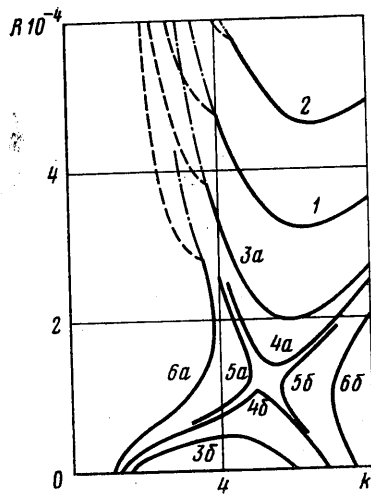
В качестве контрольного примера была определена критическая величина  $R_{d*}$  для концентрационного аналога известной задачи Релея, которая вытекает из (3), (4) при  $R=0$ . Полученное для  $P_d/P=1$  минимальное критическое значение  $R_{d*}=-1707.762$  полностью совпадает с приведенным в [7].

Перейдем к обсуждению результатов. Как следует из постановки задачи, в слое с концентрационными источниками тепла существуют два механизма стратификации плотности: тепловой и концентрационный. Из структуры равновесного профиля температуры (2) видно, что область потенциально неустойчивой стратификации, обусловленная температурным распределением, локализована в верхней части слоя. В зависимости от относительной плотности тепловыделяющей компоненты заданный в смеси постоянный градиент концентрации может оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее влияние на конвективную устойчивость.

На фиг. 1 приведено семейство нейтральных кривых  $R(k)$ , построенных при  $P=1$  и  $P_d=1.2$  для  $R_d=0, 5000, -3000, -3800, -3900, -5000$  (на фиг. 1 соответственно кривые 1–6). Сплошными линиями изображены границы монотонной неустойчивости, штриховыми – колебательной, штрихпунктирные дискриминантные кривые разделяют зоны нарастающих колебательных и монотонных возмущений. Из уравнений (3) следует, что граница монотонной неустойчивости зависит лишь от отношения чисел Прандтля  $P_d/P$ , называемого числом Льюиса  $L=\chi/D$ . Значения чисел Рэлея, при которых в области малых волновых чисел появляется колебательная неустойчивость, для всех  $R_d$  при указанных  $P$  и  $P_d$  превышают величины  $R$ , определяющие возникновение неустойчивости монотонного типа.

Рассмотрим вначале зависимость  $R(k)$  при  $R_d \geq 0$  (кривые 1, 2). Области неустойчивости находятся над нейтральными кривыми. При  $R_d=0$  ( $\beta_2=0$ , т. е. одинаковые плотности компонент смеси) стратификация среды связана только с градиентами температуры и зависимость  $R(k)$  характеризует начало конвекции в случае теплового механизма неустойчивости, осложненного диффузионным перераспределением внутренних источников тепла. Заметим, что чисто тепловая неустойчивость реализуется при  $R_d=0$  и  $P_d=0$ . Рост положительных  $R_d$  соответствует увеличению концентрации легкой компоненты в верхней части слоя, что оказывает стабилизирующее воздействие на устойчивость равновесия системы.

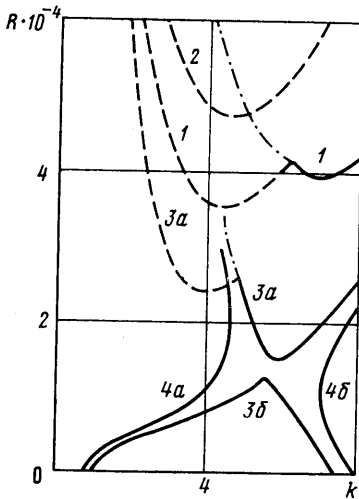
С уменьшением  $R_d$  в области  $R_d < 0$  (кривые 3–6) неустойчивость в слое наступает при все более низких значениях числа Рэлея. Отрицательные величины  $R_d$  означают, что тепловыделение обусловлено более тяжелой компонентой. При  $R_d=R_{d1}=-1708/L$  конвекция возникает и в отсутствие



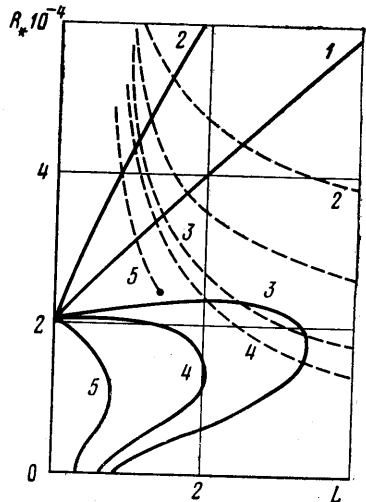
Фиг. 1

тепловых источников, т. е. при  $R=0$ . Возмущения, приводящие к срыву равновесия, имеют в этом случае концентрационную природу и развиваются во всем объеме слоя. Соответствующее критическое волновое число возмущений  $k_* = 3.12$  совпадает с величиной  $k_*$  в задаче Рэлея.

При  $R_d < R_{d1}$  неустойчивость концентрационного типа возможна и для  $R \neq 0$ , причем по отношению к целой группе возмущений с волновыми числами из интервала  $\Delta k(R)$ . Таким образом, для значений  $R_d < R_{d1}$  устойчивость системы характеризуется уже двумя нейтральными кривыми, каж-



Фиг. 2



Фиг. 3

дая из которых связана либо с тепловым, либо с концентрационным механизмом неустойчивости.

На фиг. 1 кривые 3, а и 4, а, построенные для  $R_d = -3000$  и  $-3800$ , описывают неустойчивость по отношению к тепловой моде; нейтральные кривые 3, б и 4, б, вычисленные для этих же значений  $R_d$ , ограничивают сверху зону нарастающих концентрационных возмущений. Как следует из графиков, с ростом интенсивности тепловыделения, т. е. с увеличением числа Рэлея, устойчивость равновесия по отношению к концентрационной моде повышается.

Из фигуры также видно, что области неустойчивости разделены интервалом  $\Delta R(k)$ , в котором возмущения обоих типов затухают. Минимальная величина  $\Delta R$  убывает с уменьшением  $R_d$  от величины  $R_1 \approx 26\,000$ , соответствующей значению  $R_{d1}$ , до нуля при  $R_d = R_{d2} \approx -3850$ . Для  $R_d < R_{d2}$  (зависимости 5, 6) равновесие становится неустойчивым при любых числах Рэлея («абсолютная» неустойчивость). Смыкание нейтральных кривых для числа Льюиса  $L = 1.2$  происходит при значениях числа Рэлея  $R = R_2 \approx 12700$ . Очевидно, при  $R \approx R_2$  и  $R_d \approx R_{d2}$  указать преобладающий механизм неустойчивости невозможно.

Расчеты, проведенные для различных чисел Прандтля и Шмидта, показали, что в зависимости от их величины картина неустойчивости изменяется. На фиг. 2 представлены нейтральные кривые для  $P = 1$ ,  $P_d = 2$  и  $R_d = 0, 5000, -3000, -3500$  (кривые 1–4 соответственно). Из графиков  $R(k)$  следует существование в этом случае интервала значений  $R_d$ , в котором наиболее опасными являются колебательные возмущения, обусловленные тепловым механизмом неустойчивости. Нарастающие возмущения

концентрационной природы по-прежнему имеют монотонный характер. Расположение зон неустойчивости качественно описанному для  $P=1$  и  $P_d=1.2$  на фиг. 1. Смыкание и перестройка обоих типов нейтральных кривых происходит при  $R_2 \approx 13600$  и  $R_{d2} \approx -3050$ .

Анализ условий возникновения конвекции в бинарных смесях удобно проводить на диаграммах устойчивости, показывающих зависимость критической величины одного из чисел Рэлея от остальных параметров задачи. Такая диаграмма устойчивости в координатах  $(R_*, L)$ , где  $R_*$  — экстремумы функций  $R(k)$ , изображена на фиг. 3. Представленные результаты получены при  $P=1$  и значениях числа Льюиса в интервале  $0 < L < 4$ , являющихся типичными для газовых смесей. Кривые 1—5 на фиг. 3 соответствуют значениям  $R_d=0, 5000, -2500, -3000, -5000$ . Сплошные линии  $R_*(L)$  отвечают границам монотонной неустойчивости, а штриховые колебательной.

Рассмотрим сначала на диаграмме фиг. 3 области монотонной неустойчивости. При  $R_d \geq 0$  устойчивому равновесию соответствуют зоны ниже кривых  $R_*(L)$ , для  $R_d < 0$  области устойчивости заключены между осями координат и графиками  $R_*(L)$ . В отсутствие диффузионного перераспределения внутренних источников тепла ( $L=0$ ) все зависимости начинаются в точке  $R_* = 2.03 \cdot 10^4$ . Это значение числа Рэлея определяет кризис равновесия в слое с тепловыделением, плотность которого равномерно возрастает с вертикальной координатой. Из графиков следует, что диффузия тепловых источников ( $L \neq 0$ ) оказывает существенное влияние на условия возникновения конвекции. Так, например, даже при  $R_d=0$  критические числа Рэлея для  $L=2$  и  $0$  отличаются в 2 раза. Для  $R_d \geq 0$  зависимости  $R_*(L)$  близки к линейным. При  $R_d < 0$  функции  $R_*(L)$  становятся неоднозначными, что означает появление в случае тяжелой активной составляющей двух нейтральных кривых (см. фиг. 1, 2). Верхняя ветвь  $R_*(L)$  связана с тепловым механизмом неустойчивости, нижняя — с концентрационным. Наличие замкнутой области устойчивости на плоскости  $(R_*, L)$  означает существование двух критических чисел Рэлея. Интересно отметить, что в некоторых случаях при  $R_d < 0$  для стабилизации равновесия оказывается необходимым увеличивать мощность внутреннего тепловыделения.

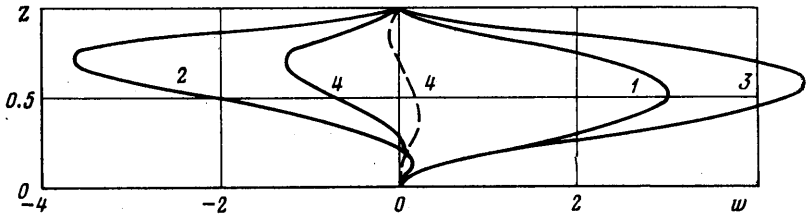
Пересечение характеристик  $R_*(L)$  с осью абсцисс возможно только при  $R_d < 0$  и происходит в точках, определяемых соотношением  $R_d L = -1708$ .

Отрицательные величины теплового числа Рэлея в принятой постановке задачи отвечают поглощению тепла активной составляющей смеси (эндотермические химические реакции). Устойчивость системы при  $R < 0$  в работе не рассматривается, поскольку соответствующие результаты могут быть получены из статьи [6] заменой в ней знаков  $R$  и  $R_d$ . Это обстоятельство является следствием определенной симметрии амплитудных уравнений, допускающих преобразование инверсии. При таком преобразовании спектральная задача (3), (4) остается неизменной, если вместе с направлением градиента концентрации активной компоненты, изменить также знаки обоих чисел Рэлея.

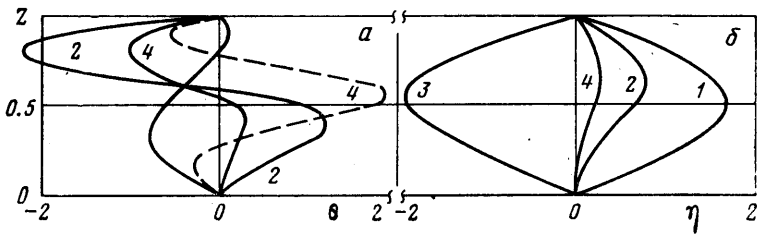
Перейдем теперь к рассмотрению на диаграмме  $(R_*, L)$  колебательной неустойчивости; на фиг. 3 ей соответствуют зоны, расположенные над пунктирными кривыми. Из графиков следует, что с ростом числа Льюиса значения «колебательных» чисел Рэлея уменьшаются. Напомним, что для монотонных возмущений  $R_*$  при  $R_d \geq 0$  растет с увеличением  $L$ . Пересечение кривых  $R_*(L)$ , определяющих границы нарастающих монотонных и колебательных возмущений, указывает на смену формы неустойчивости. Графики показывают, что возникновение конвекции в виде стационарных колебаний возможно лишь при  $L > 1$ , т. е. при  $\chi > D$ .

Из диаграммы видно, что имеется интервал значений  $\Delta L(R_a)$ , в котором равновесие неустойчиво по отношению к обоим типам возмущений. Определение характера возникающего в этом случае конвективного движения может быть произведено лишь на основе решения нелинейной системы уравнений конвекции.

В зависимости от величины диффузионного числа Рэлея в области  $R_a < 0$  графики  $R_*(L)$ , соответствующие монотонным и колебательным



Фиг. 4



Фиг. 5

возмущениям, пересекаются либо в двух точках, либо не пересекаются совсем. Пограничным в этом смысле является значение  $R_a \approx -2550$ , при котором кривые  $R_*(L)$  только касаются друг друга (близкий пример представлен на фиг. 3 кривыми 3).

Отметим еще одну особенность диаграммы устойчивости. При достаточно малом  $R_a < 0$  график  $R_*(L)$  для колебательных возмущений (кривая 5) имеет «концевую» точку. Отсутствие зависимости  $R_*(L)$  на остальной части плоскости  $(R_*, L)$  говорит о том, что при таких значениях  $R$  и  $L$  нейтральных колебательных возмущений в системе не существует. В этой области изменения параметров мнимая часть декремента  $\lambda_i$  становится отличной от нуля, когда  $\lambda_r$  уже отрицательно, т. е. монотонные возмущения непосредственно переходят в нарастающие колебания.

Из анализа спектров декрементов следует, что, по-видимому, подобные концевые точки существуют на колебательных нейтральных кривых и для других  $R_a < 0$ , но при больших значениях числа Льюиса.

Наряду с вычислением критических чисел Рэлея при определении условий возникновения конвекции представляет интерес также нахождение формы соответствующих возмущений. При малой надкритичности структура конвективного движения должна быть близка к возмущениям, приводящим к кризису равновесия. Для их определения необходимо кроме собственных значений отыскать собственные функции  $w$ ,  $\theta$  и  $\eta$  краевой задачи (3), (4). Эти функции строились в виде линейной комбинации четырех частных решений с коэффициентами, определенными из однородной системы алгебраических уравнений при условии равенства нулю ее определителя. Один из четырех коэффициентов произволен и задает

нормировку возмущений. В случае монотонной неустойчивости ( $\lambda = \lambda_r$ ) собственные функции являются вещественными.

На фиг. 4 представлены амплитуды нейтральных возмущений скорости, на фиг. 5 — температуры (а) и концентрации (б), с помощью которых можно построить изотермы, линии постоянной концентрации и распределения вертикальной компоненты скорости в конвективной ячейке. Кривые 1—4 на фигурах соответствуют следующим значениям параметров  $L, R, R_d, k$ : 1.2, 0, -1425, 3.1; 1.2, 20 000, -3000, 5.8; 1.2, 5000, -3000, 4.2; 2.0, 35 000, 0, 4.2 (в случае колебательной неустойчивости мнимые части амплитуд изображены штриховыми линиями). При построении графиков собственных функций для удобства использованы различные масштабы:  $w10^2, \eta10^3$ ;  $w10, \theta10^3, \eta10^2$ ;  $w10^2, \theta10^3, \eta10^3$ ;  $w, \theta, \eta$ ;  $w, \theta, \eta$ .

Для концентрационного аналога задачи Рэлея ( $R=0$ , график 1) распределения  $w(z)$  и  $\eta(z)$ , как и следовало ожидать, симметричны относительно середины слоя. Кривые 2 при  $R_d = -3000$  показывают пример амплитуд нейтральных возмущений, связанных преимущественно с тепловым механизмом неустойчивости. Из графиков видно, что конвекция развивается в верхней части слоя. Смена знака амплитуды скорости  $w$  означает, что возникающее движение имеет «двухэтажную» структуру, однако интенсивность конвекции у нижней границы весьма незначительна. Несколькo неожиданной представляется форма критического возмущения температуры: к неустойчивости приводит повышение температуры в нижней части слоя и одновременное понижение ее в верхней. Характер возмущений  $w, \theta$  и  $\eta$ , соответствующих неустойчивости концентрационной природы, при том же значении диффузионного числа Рэлея  $R_d = -3000$  показан кривыми 3. Как следует из графиков, эти возмущения, аналогично задаче Рэлея, развиваются во всем объеме слоя. Некоторая асимметрия функций  $w, \theta$  и  $\eta$  при  $R \neq 0$  объясняется влиянием тепловой неустойчивости. Пример графиков амплитуд колебательных возмущений представлен кривыми 4 (функции  $\eta_r$  и  $\eta_i$  в выбранном масштабе практически совпадают). Как уже отмечалось, колебательные возмущения связаны с тепловым механизмом неустойчивости ( $R_d = 0$ ), и зависимости  $w_r, \theta_r$  и  $\eta_r$  качественно согласуются с графиками 2.

Авторы благодарят Е. М. Жуховицкого за обсуждение результатов работы.

Поступила 19 VI 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kee R. J., Landram C. S., Miles J. C. Natural convection of a heat-generating fluid within closed vertical cylinders and spheres. Trans. ASME, Ser. C. J. Heat Transfer, 1976, vol. 98, № 1 (рус. перев.: Ки, Ландрам, Майлс. Свободная конвекция тепло выделяющей жидкости в закрытых вертикальных цилиндрических и сферических сосудах. Тр. Америк. общ. инж.-механ. Теплопередача, 1976, № 1).
2. Gasser R. D., Kazimi M. S. Onset of convection in a porous medium with internal heat generation. Trans. ASME, Ser. C, J. Heat Transfer, 1976, vol. C 98, N 1 (рус. перев.: Гассер, Казими. Возникновение конвекции в пористой среде с внутренним тепловыделением. Тр. Америк. общ. инж.-механ. Теплопередача, 1976, № 1).
3. Булашевич Ю. П., Хачай Ю. В. Конвективная устойчивость земных недр с радиоактивными источниками тепла. Изв. АН СССР, Физика Земли, 1975, № 12.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость. В сб.: Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа, т. 11. М., ВИНТИ, 1978.
5. Лысиков Ю. И., Пономарев О. А. Об одной модели нелинейного поглощения света. ПМТФ, 1974, № 1.
6. Колесников А. К., Якушин В. И. О конвективной неустойчивости смеси с концентрационными источниками тепла. Инж.-физ. ж., 1979, т. 36, № 4.
7. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
8. Ланс Дж. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М., Изд-во иностр. лит., 1962.