

4. При расчете коэффициента сопротивления осесимметричных тел, обтекаемых со срывом струй, хорошие результаты дает способ, в котором распределение давления вдоль образующей тела берется из решения соответствующей плоской задачи [10]. По аналогии кажется правдоподобным использование такого способа и для расчета присоединенных масс. Простой пример показывает, что это не так: распределение импульсивного давления при ударе пластинки о поверхность жидкости дается соотношением [4] $p = \rho r_0 V_1 \sqrt{1 - \xi^2}$, $\xi = x_2 / r_0$ (здесь $2r_0$ — ширина пластинки), используя которое подсчитаем μ_1 при прямом ударе диска радиуса r_0 о поверхность жидкости

$$\mu_1 = \frac{K_1}{\rho V_1 r_0^3} = \frac{1}{\rho V_1 r_0^3} \int_{z_1} p d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \xi^2} \xi d\xi d\theta = \frac{2\pi}{3}$$

Как видно, эта величина в $\pi/2$ раза больше, чем действительное значение $\mu_1 = 4/3$ [12]. Аналогичный результат получается и для струйных течений.

Поступила 11 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. Удар пластинки при обтекании с отрывом струй. ПММ, 1952, т. 16, вып. 1.
2. Берман Я. Р. Удар клина при обтекании с отрывом струй. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
3. Пархомовский С. И. Удар решетки при симметричном кавитационном обтекании. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
4. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
5. Михлин С. Г. Линеинные уравнения в частных производных. М., «Высшая школа», 1977.
6. Сокольников И. С. Тензорный анализ. М., «Наука», 1971.
7. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного, М., «Наука», 1977.
8. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. М., «Наука», 1966.
9. Егоров И. Т., Садовников Ю. М., Исаев И. И., Басин М. А. Искусственная кавитация. Л., «Судостроение», 1971.
10. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., «Наука», 1979.
11. Агеев М. И., Марков Ю. И., Алиж В. П. Библиотека алгоритмов 516-1006, вып. 2. М., «Сов. радио», 1976.
12. Римап И. С., Крепс Р. Л. Присоединенные массы тел различной формы. Тр. ЦАГИ, 1947, № 635.
13. Логвинович Г. В., Якимов Ю. Л. Погружение тел в жидкость с большими скоростями. В кн.: Неустановившиеся течения воды с большими скоростями. М., «Наука», 1973.

УДК 532.516

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ПОДВИЖНОЙ И НЕПОДВИЖНОЙ СФЕРАМИ ПРИ НЕБОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

И. М. СТАРОВИН

(Москва)

В последние годы в связи с исследованием некоторых физиологических процессов, а также в связи с проблемой разработки и создания искусственного сердца получили широкое распространение работы, в которых течение крови в сердце, так же как и в крупных кровеносных сосудах, рассматривается как течение вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости. При этом относительно геометрии сердца допускаются различные предположения. Так, например, в [1, 2] моделью желудочка сердца служила сфера, влияние входного и выходного клапанов не учитывалось, а так как число Рейнольдса в норме довольно велико, то течение крови рассматривалось как течение идеальной несжимаемой жидкости. В экспериментальной работе [3] моделью желудочка сердца служил эллипсоид и учитывалось влияние входного лепесткового клапана, упрощенная цилиндрическая геометрия использовалась в [4].

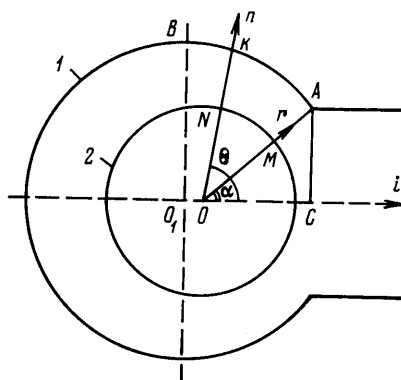
В данной работе моделью желудочка сердца является сфера. Учитывается влияние входного искусственного шарикового клапана. Такого рода конфигурации имеют место в искусственном сердце с гидравлическим приводом. Для использования дан-

ной задачи в качестве аналитического теста при дальнейшем проведении расчетов на ЭВМ при больших числах Рейнольдса, а также для получения аналитических оценок для траекторий лагранжевых частиц ограничимся рассмотрением только таких течений, для которых влиянием нелинейных членов в уравнениях Навье — Стокса можно пренебречь.

1. Рассмотрим движение ньютоновской жидкости в наполняющейся сферической камере (1) с шариковым входным клапаном (2) (фиг. 1). В открытом положении клапан неподвижен и покоится на ограничителях хода — тонких металлических дужках, прикрепленных к входному кольцу, влиянием которых на поток можно пренебречь. На фиг. 1 отмечены: $NK=h$ — расстояние между поверхностями камеры и клапана, $O_1B=R$ — радиус камеры, $ON=r_v$ — радиус клапана, $O_1O=e$ — расстояние между центрами камеры и клапана, $AC=r_0$ — радиус входного отверстия. Будем считать, что при наполнении камера сохраняет сферическую форму. Исходя из этого предположения определим скорость точек поверхности камеры. Систему координат (r, θ) поместим в неподвижном центре клапана — точке O . Полная скорость точки K поверхности камеры складывается из радиальной скорости относительно ее центра и скорости центра относительно неподвижной точки O . Учитывая, что $r \sin \alpha = r_0 = \text{const}$, для полной скорости v и для нормальной скорости v_n , будем иметь

$$(1.1) \quad v = \frac{dR}{dt} \mathbf{n} - \frac{d(R \cos \alpha)}{dt} \mathbf{i}$$

$$v_n = \frac{dR}{dt} \left(1 - \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} \right), \quad \alpha \leq \theta \leq \pi$$



Фиг. 1

Ограничимся изучением начальной стадии наполнения камеры, когда зазор между ее стенкой и клапаном невелик. За характерный размер зазора выберем величину MA (фиг. 1) и обозначим ее через a . Условимся считать, что в открытом положении клапан отходит от входного кольца на такое расстояние, что площадь входного отверстия и площадь боковой поверхности усеченного конуса с образующей a одинаковы. Исходя из этого получим

$$(1.2) \quad \chi = \frac{\sigma}{2} - 1 + \left(1 + \frac{\sigma^2}{4} \right)^{1/2}, \quad \chi = \frac{a}{r_v}, \quad \sigma = \frac{r_0}{r_v}$$

Оказывается, что для реальных σ выполняется $\chi^2 \ll 1$. Для простоты будем считать, что расход жидкости через входное отверстие камеры равен постоянной величине $Q = \pi r_0^2 U$, где U — средняя скорость. Введем замену переменной $r = r_0 + a + \delta \rho$. Здесь ρ — безразмерная переменная, изменяющаяся от нуля до h , а для δ справедливо равенство $\delta/a = O(1)$. С учетом данной замены уравнение для безразмерной функции тока $\psi_* = \psi / \pi \delta^2 U$ приводится к виду

$$(1.3) \quad -\text{Sh Re} \frac{\partial D\psi}{\partial t} + DD\psi = \text{Re} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial D\psi}{\partial \rho} - \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \frac{\partial D\psi}{\partial \theta} \right) +$$

$$+ \text{Re} \varepsilon^3 \frac{2D\psi}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1 + \varepsilon \rho}{\varepsilon} \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)$$

$$D = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \varepsilon^2 \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad \varepsilon = \frac{\delta}{r_v + a}$$

Здесь $\text{Re} = U\delta/\nu$ — число Рейнольдса, $\text{Sh} = \delta/UT$ — число Струхали. В формуле (1.3) и далее индекс * у безразмерной функции тока будем опускать. Время T , входящее в число Струхали, есть время, за которое в камеру поступает объем жидкости, увеличивающий ее радиус на величину δ . Изменение объема полости камеры при увеличении ее радиуса от величины $r_m = r_v + a$ до величины $R = r_v + a + \delta$ равно

$$(1.4) \quad \Delta V = \pi r_m^2 \delta (2 + \cos \alpha + \cos^{-1} \alpha), \quad \sqrt{r_m^2 - r_0^2} = r_m \cos \alpha$$

Таким образом, учитывая (1.4) и равенство $\Delta V = QT$, для числа Струхали будем иметь

$$\text{Sh} = \frac{\sin^2 \alpha}{2 + \cos \alpha + \cos^{-1} \alpha}, \quad \frac{r_0^2}{r_m^2} = \sin^2 \alpha, \quad \sin \alpha = \frac{\sigma}{1 + \chi}$$

$$\cos \alpha = (1 + \chi) \sqrt{1 - \sigma^2 / (1 + \chi)^2}$$

Для реальных σ оказывается, что $\text{Sh} \ll 1$ ($\sigma = 0.6 - 0.8$). Итак, для $\text{Re} \leq 1$ конвективными членами в (1.3) можно пренебречь, поскольку $\text{Re Sh} \ll 1$, $\text{Re} \varepsilon^2 \ll 1$, $\text{Re} \varepsilon^3 \ll 1$. В результате получим упрощенное уравнение:

$$(1.6) \quad \frac{\partial^4 \psi}{\partial \rho^4} = 0, \quad \psi(0, \theta) = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}(0, \theta) = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}(h, \theta) = 0, \quad \psi(h, \theta) = \psi_0(\theta)$$

Для окончательного определения задачи (1.6) необходимо иметь выражения для функций $h(\theta)$ и $\psi_0(\theta)$. Функцию $h(\theta)$ вычислим по теореме косинусов из треугольника O_1OK (фиг. 1). Пренебрегая членами порядка δ^2 и учитывая $a = R - r_m - e \cos \alpha$, получим $h = 1 + k(\cos \alpha - \cos \theta)$, где $k = e/a$. Функцию $\psi_0(\theta)$ определим из закона сохранения массы и из граничного условия $\psi(0, \theta) = 0$:

$$(1.7) \quad \psi_0(\theta) = -Q_* \left(1 + \cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{2 \cos \alpha} \right) \left(1 + \frac{\cos \alpha}{2} + \frac{1}{2 \cos \alpha} \right)^{-1}$$

Теперь решение задачи (1.6) имеет вид

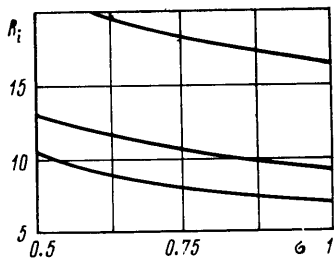
$$(1.8) \quad \psi = \psi_0(\theta) \frac{\rho^2}{h^2} \left(3 - \frac{2\rho}{h} \right)$$

Из уравнений Навье - Стокса и (1.8) с точностью до членов порядка ε^2 следует $p_0 = 12\psi_0(\theta)/h \sin \theta$. Здесь p_0 - градиент давления, обезразмеренный относительно величины $\pi U \mu / \delta^2$. Для получения расходной характеристики камеры в изучаемом диапазоне чисел Рейнольдса необходимо вычислить перепад давления между входным отверстием и поверхностью камеры. Интегрируя p_0 от α до π , получим:

$$(1.9) \quad \Delta p_* = \left(\frac{1}{m^3} \ln \frac{\text{tg}^2 \beta}{b^2 + \text{tg}^2 \beta} + \frac{(m-n)^2}{2mn^4} \frac{1}{(b^2 + \text{tg}^2 \beta)^2} - \frac{m^2 - n^2}{m^2 n^3} \frac{1}{b^2 + \text{tg}^2 \beta} + \frac{1-n^2}{n^2} \frac{1}{4k \cos \alpha} \right) \frac{24 \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2} Q_*$$

$$m = 1 - k + k \cos \alpha, \quad n = 1 + k + k \cos \alpha, \quad \beta = \frac{d}{2}, \quad b^2 = \frac{m}{n}, \quad Q_* = \frac{Q}{\pi \delta^2 U}$$

На фиг. 2 показаны зависимости входного гидродинамического сопротивления камеры $R_i = |\Delta p_*|/Q_*$ от параметров σ и k (верхняя кривая - $k=0.1$; средняя - $k=0.6$; нижняя - $k=1$). Видно, что входное сопротивление значительно уменьшается с ростом σ . Изменение R_i для $k=0.1$ при увеличении σ от 0.5 до 1 составляет примерно 25%. Параметр k также в значительной мере влияет на изменение R_i . При увеличении k от 0 до 1 ($\sigma=1$) R_i уменьшается на 65%. Практически зависимость R_i от k эквивалентна зависимости этой величины от времени, поскольку с точностью до ε^2 справедливо равенство



Фиг. 2

эти эффекты роли не играют, но даже и в этом случае зависимость Δp_* от времени или, что то же самое, от степени наполнения камеры сохраняется, что следует из (1.9) и (1.10).

2. Отметим еще одну интересную особенность изучаемого течения. Рассмотрим уравнения траекторий частиц жидкости:

$$(2.1) \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\varepsilon \psi_0 \rho}{h^2 \sin \theta} \left(1 - \frac{\rho}{h} \right), \quad \frac{d\rho}{dt} = \varepsilon^2 \frac{d\psi_0}{d\theta} \frac{\rho^2}{h^2 \sin \theta} \left(3 - \frac{2\rho}{h} \right)$$

$$(1.10) \quad k = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha (2 + \cos^{-1} \alpha + \cos \alpha)} t$$

Здесь предполагается, что время t принадлежит интервалу $(0, 1)$. В отличие от [1, 2], где в приближении потенциальной жидкости было показано, что вклад инерционных эффектов в Δp_* довольно велик, при небольших числах Рейнольдса

Будем следить за движением частиц, находящихся вблизи стенки камеры на расстоянии x от нее. Величина x мала по сравнению с h , т. е. справедливо неравенство $x/h \ll 1$. Тогда получим

$$(2.2) \quad \frac{d\theta}{dt} = -\varepsilon \frac{6\psi_0}{\sin \theta} \frac{x}{h^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \text{Sh} \left(1 - \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} \right)$$

Для реальных α (максимальный угол α_m равен 38° , $\sigma=1$) выполняется условие $\text{Sh} \ll 1$. Поэтому система (2.2) сводится к виду:

$$(2.3) \quad \frac{d\theta}{dt} = -\varepsilon \frac{6\psi_0(\theta)}{\sin \theta} x_0, \quad x = x_0 = \text{const}$$

В результате интегрирования уравнения (2.3) получим

$$(2.4) \quad \cos \theta = \frac{f(\theta_0) e^{\gamma t} (1 + 2 \cos \alpha) - 1}{f(\theta_0) e^{\gamma t} + 1}, \quad f(\theta_0) = (1 + \cos \theta_0) (1 + 2 \cos \alpha - \cos \theta_0)^{-1}$$

$$\gamma = \frac{6x_0}{\varepsilon} \frac{1 + \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha}$$

Здесь θ_0 и x_0 — начальные координаты частицы. Из (2.4) следует, что частицы, находящиеся вблизи поверхности камеры, дрейфуют в сторону входного отверстия, что может вызвать скопление у входного кольца находящихся в них форменных элементов крови эритроцитов, а затем и последующее их разрушение вследствие удара о входное кольцо закрывающегося клапана. Из (2.4) получим ограничения на начальные координаты частицы θ_0 , x_0 , необходимые для того, чтобы частица не достигла входного кольца вплоть до момента $t=1$:

$$(2.5) \quad \cos \theta_0 \leq \frac{1 + 2 \cos \alpha - e^\gamma}{1 + e^\gamma}$$

При очень малых α (при малых σ) практически все частицы жидкости достигают входного кольца, поэтому более предпочтительно использование камер с σ , стремящемся к единице, т. е. с $\alpha \rightarrow \alpha_m$. Предельные значения координат θ_0 и x_0 (для $\alpha = \alpha_m$), при которых еще выполняется неравенство (2.5), приведены ниже:

x_0	0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
θ_0°	38	80.9	109.4	130.2	145.1	155.7

Поступила 15 II 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Wang C. Y., Sonnenblick E. H. Dynamic pressure distribution inside a spherical ventricle. *J. Biomechanics*, 1979, vol. 12, No. 1.
2. Pedley T. Y., Seed W. A. The fluid mechanics of left ventricular ejection In: Cardiovascular and pulmonary dynamics colloquium INSERM — EUROMECH 92. Compiègne, 1977. Paris, 1978.
3. Bellhouse B. J. Fluid mechanics of a model mitral valve and left ventricle. *Cardiovascular res.*, 1972, vol. 6, No. 2.
4. Oddou C., Brun P., Dantan P., Beraldo E., Kulas A., Vernejoul F. The fluid mechanics in the human left ventricle during cardiac filling phase In: Cardiovascular and pulmonary dynamics colloquium INSERM — EUROMECH 92. Compiègne, 1977. Paris, 1978.