

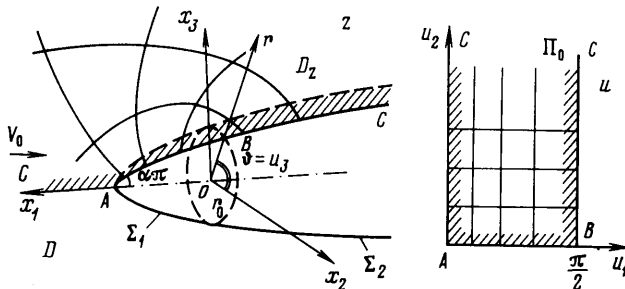
УДАР ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ, ОБТЕКАЕМОГО СО СРЫВОМ СТРУЙ

Д. Г. ШИМКОВИЧ

(Москва)

Вопросы ударного взаимодействия тел с жидкостью при струйном обтекании рассматривались в работах [1-3 и др.]. При этом исследование проводилось в плоской постановке.

В данной работе рассматривается пространственная задача об ударе тела вращения, обтекаемого со срывом струй идеальной несжимаемой жидкостью по схеме Кирхгофа. Для ударного потенциала течения формулируется краевая задача, которая решается с помощью функции Грина. Описывается методика построения функ-



Фиг. 1

ции Грина. Приводятся выражения для коэффициентов присоединенных масс. Даются результаты расчетов на ЭВМ указанных коэффициентов в случае конуса с использованием геометрии течения соответствующей плоской задачи.

1. Рассмотрим некоторое неподвижное тело вращения, обтекаемое неограниченным потоком идеальной несжимаемой жидкости со срывом струй (схема Кирхгофа), имеющим скорость V_0 в бесконечности (фиг. 1). Пусть в результате удара скорости точек тела стали равны $V(M)$. Считаем, что непосредственно после удара поверхность $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ не изменилась (Σ_1 — смоченная поверхность тела, Σ_2 — свободная поверхность). Из [4] следует, что течение, вызванное ударом тела о несжимаемую жидкость, будет обладать потенциалом Φ , который связан с величиной импульсивного давления p , возникшего в жидкости, соотношением $p = -\rho\Phi$, где ρ — плотность жидкости.

Так как на свободной поверхности $p|_{\Sigma_2} = 0$, то и $\Phi|_{\Sigma_2} = 0$. Совместно с условием непротекания на Σ_1 это приводит к смешанной краевой задаче для уравнения Лапласа

$$(1.1) \quad \Delta\Phi = 0, \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_{\Sigma_1} = Vn, \quad \Phi|_{\Sigma_2} = 0$$

где n — нормаль к Σ_1 , направленная внутрь жидкости.

Для решения (1.1) построим функцию Грина G , которую определим как обобщенную функцию (функционал над некоторым пространством $P(D)$ основных функций [5]), удовлетворяющую следующей краевой задаче:

$$(1.2) \quad -\Delta G = \delta, \quad \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\Sigma_1} = 0, \quad G|_{\Sigma_2} = 0$$

где δ — дельта-функция Дирака. Если G известна, то решение (1.1), очевидно, будет иметь вид

$$(1.3) \quad \Phi(M) = - \int_{\Sigma_1} G(M, N) \nabla n \, d\sigma$$

В качестве пространства $P(D)$ возьмем множество финитных непрерывно дифференцируемых в D функций, равных нулю на Σ_2 . Множество $P^*(D)$ линейных ограниченных функционалов над $P(D)$ назовем обобщенными функциями, которые будем записывать в виде (f, η) , $\eta \in P(D)$, $f \in P^*(D)$.

Используя формулы Грина [5], нетрудно убедиться, что задача (1.2) эквивалентна следующему обобщенному уравнению:

$$(1.4) \quad (\nabla G, \nabla \eta) = (\delta, \eta), \quad \forall \eta \in P(D)$$

причем G берется из множества $P_0^*(D) \subset P^*(D)$ функций, обращающихся в ноль на Σ_2 . Воспользовавшись свойством плотности $P(D)$ в $P^*(D)$ [5], запишем G в виде $G = c_k \psi_k$, $k=1, 2, \dots$ (здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам производится суммирование), где ψ_k — система функций, плотная в $P(D)$. Для выполнения (1.4) достаточно, чтобы оно выполнялось для какой-либо плотной в $P(D)$ системы функций. Тогда, полагая в (1.4) $\eta = \psi_n$ и $G = c_k \psi_k$, $n, k=1, 2, \dots$, получим систему линейных уравнений относительно c_k :

$$(1.5) \quad a_{nk} c_k = \psi_n(M), \quad a_{nk} = (\nabla \psi_n, \nabla \psi_k), \quad A = \{a_{nk}\}$$

решая которую, найдем

$$(1.6) \quad G(M, N) = s_{kn} \psi_n(M) \psi_k(N), \quad S = \{s_{nk}\} = A^{-1}$$

(предполагая, что A имеет обратную матрицу). Таким образом, для построения функции Грина достаточно найти ψ_k .

Удобно ввести криволинейные координаты u_1, u_2, u_3 , преобразующие D в область более простого вида. Положим $u_3 = \phi$, а в качестве u_1 и u_2 выберем образ прямоугольной сетки в полуполосе Π_0 на комплексной плоскости $u = u_1 + iu_2$ при конформном отображении $z(u)$ этой полуполосы на область D_z (фиг. 1). Связь между x_1, x_2, x_3 и u_1, u_2, u_3 запишется следующим образом:

$$x_1 = x(u_1, u_2), \quad x_2 = r(u_1, u_2) \cos u_3, \quad x_3 = r(u_1, u_2) \sin u_3$$

$$r(u_1, u_2) = \operatorname{Re} z(u), \quad x(u_1, u_2) = \operatorname{Im} z(u)$$

Таким образом, область D преобразована в полубесконечный цилиндр (в переменных u_1, u_2, u_3) с римановой метрикой, определяемой метрическим тензором g_{nk} [6], который, как нетрудно установить, имеет вид

$$g_{nk} = 0 \quad (n \neq k), \quad g_{11} = g_{22} = g^2, \quad g_{33} = r^2, \quad g = |dz| du|$$

Отсюда следует, что u_1, u_2, u_3 — ортогональные координаты. В силу конформности отображения $z(u)$ образы линий $u_1 = \text{const}$ при $u_2 \rightarrow 0$ будут совпадать с нормальными к Σ_1 , что не повлечет изменения вида условия на Σ_1 при переходе к криволинейным координатам.

Используя симметрию функции Грина, запишем (1.6) в виде

$$(1.7) \quad G(M, N) = s_{nk}^m \Phi_n^m(u_1, u_2) \Phi_k^m(\xi_1, \xi_2) \cos m(u_3 - \xi_3)$$

где Φ_n^m — плотная в $P(\Pi_0)$ система функций, $n, k=1, 2, \dots, m=0, 1, \dots$. Функция Грина как сингулярное решение уравнения Лапласа имеет вид [5] $G \sim R^{-1}$ при $R \rightarrow \infty$, где R — расстояние между двумя точками $M, N \in D$. Этот факт желательно учесть при построении функций Φ_n^m . При больших $|z|$ отображение $z(u)$ имеет тот же порядок, что и отображение полуполосы на полуплоскость [7] $z(u) \sim i \exp(-i2u)$. Отсюда $R \sim \exp(2u_2)$, а $G \sim \exp(-2u_2)$ при $|u| \rightarrow \infty$. Исходя из этого, будем искать Φ_n^m в виде

$$(1.8) \quad \Phi_n^m(u_1, u_2) = S_n^m(u_1, u_2) / \operatorname{ch}(2u_2)$$

где система функций S_n^m должна удовлетворять тем же требованиям, что и Φ_n^m . Используя (1.7), из (1.5) получим

$$(1.9) \quad a_{nk}^m = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \left\{ \frac{\partial \Phi_n^m}{\partial u_1} \frac{\partial \Phi_k^m}{\partial u_1} + \frac{\partial \Phi_n^m}{\partial u_2} \frac{\partial \Phi_k^m}{\partial u_2} + m^2 q^2 \Phi_n^m \Phi_k^m \right\} r \, du_1 \, du_2$$

$$q^2 = g^2 / r^2, \quad s_{nk}^m = \delta^m \{a_{nk}^m\}^{-1}, \quad \delta^0 = (2\pi)^{-1}, \quad \delta^m = \pi^{-1} \quad (m > 0)$$

$n, k=1, 2, \dots, m=0, 1, \dots$ (по m — не суммировать).

При $u_1 \rightarrow 0$ функция $r \rightarrow 0$, вследствие чего $q^2 \rightarrow \infty$ в этих точках. Оценим порядок q^2 при $u_1 \rightarrow 0$. Вблизи т. А (фиг. 1), которую в общем случае считаем угловой, отображение $z(u)$ имеет вид $z(u) = Bu^{2(1-\alpha)} + \dots$, где B — некоторая константа. Отсюда $r(u_1, 0) \sim u_1^{2(1-\alpha)}$, $g(u_1, 0) \sim u_1^{1-2\alpha}$ и $q^2 \sim u_1^{-2}$ при $u_1 \rightarrow 0$. При $u_2 \rightarrow \infty$ и $u_1 \rightarrow 0$ имеем $z(u) \sim i \exp(-i2u)$, откуда $z(u) \sim u_1 \exp(2u_2)$, так что и в этом случае $q^2 \sim u_1^{-2}$.

Из сказанного вытекает дополнительное требование к Φ_n^m , связанное с выбором системы координат u_1, u_2, u_3 : необходимо, чтобы отношение $|\Phi_n^m(u_1, u_2) / u_1|$ для $m > 0$ оставалось ограниченным при $u_1 \rightarrow 0$. Сделав замену переменной $u_2 = \operatorname{tg} v_2$, нетрудно убедиться, что (1.9) сохраняет смысл для функций вида (1.8) и при отходе от финитности последних. Перечисленным выше требованиям можно удовлетворить, выбрав S_n^m в виде [8]

$$(1.10) \quad S_n^m(u_1, u_2) = \frac{J_m(\gamma_j^m 2u_1/\pi) \cos 2(l-1) \operatorname{arctg} u_2}{\sqrt{1+u_2^2}}$$

где J_m — функция Бесселя порядка m , γ_j^m — j -й нуль функции J_m , $j(n), l(n) = 1, 2, \dots, m=0, 1, \dots$. Система (1.8), (1.10) использовалась в приводимых ниже расчетах.

2. Рассмотрим условие на Σ_1 . Считая тело абсолютно жестким, запишем $V(M)$ ($M \in \Sigma_1$) в виде

$$\begin{aligned} V(M) &= \delta_j(M) V_j, \quad j=1, 2, 3, 4, 5 \\ \delta_j &= e_j \quad (j=1, 2, 3), \quad \delta_4 = e_2 \times r, \quad \delta_5 = e_3 \times r \\ r &= x(u_1, 0) e_1 + r(u_1, 0) (\cos u_3 e_2 + \sin u_3 e_3) \end{aligned}$$

где V_j — проекции векторов линейной (V_1, V_2, V_3) и угловой (V_4, V_5) скоростей точки O тела после удара соответственно на орты e_1, e_2, e_3, e_2, e_3 . Выражение для нормали n к Σ_1 запишется следующим образом:

$$n = \sin \Psi e_1 + \cos \Psi (\cos u_3 e_2 + \sin u_3 e_3)$$

где $\Psi = \Psi(u_1)$ — угол между касательной к образующей тела и $-x_1$.
В результате найдем, что

$$(2.1) \quad \begin{aligned} Vn &= V_k F_{ek} \varphi_l, \quad l=1, 2, 3, \quad k=1, 2, \dots, 5 \\ \varphi_1 &= 1, \quad \varphi_2 = \cos u_3, \quad \varphi_3 = \sin u_3 \\ F_{11} &= \sin \Psi, \quad F_{22} = F_{33} = \cos \Psi, \quad F_{25} = -F_{34} = x(u_1, 0) \cos \Psi - r(u_1, 0) \sin \Psi \end{aligned}$$

Причем $F_{lk} = 0$ для остальных l, k .

Подставляя (2.1) в (1.3), получим

$$(2.2) \quad p(M) = -\rho \Phi(M) = \rho V_k \int_{\Sigma_1} G(M, N) F_{lk}(N) \varphi_l(N) d\sigma$$

Вычислим импульс K и импульсивный момент B , действовавшие на тело со стороны жидкости:

$$K = - \int_{\Sigma_1} p n d\sigma, \quad B = - \int_{\Sigma_1} p (r \times n) d\sigma$$

Подставив сюда (2.2) и перейдя к безразмерным величинам

$$x^* = \frac{x}{r_0}, \quad r^* = \frac{r}{r_0}, \quad V_j^* = \frac{V_j}{V_0} \quad (j=1, 2, 3), \quad V_j^* = \frac{V_j r_0}{V_0} \quad (j=4, 5)$$

где r_0 — радиус миделя тела, окончательно получим (звездочки опущены):

$$(2.3) \quad K = \rho V_0 r_0^3 c_{lk}^a e_l V_k, \quad B = \rho V_0 r_0^4 m_{lk}^a e_l V_k$$

$$c_{lk}^a = - \int_{\Sigma_1} n_l(M) \left\{ \int_{\Sigma_1} G(M, N) F_{nk}(N) \varphi_n(N) d\sigma \right\} d\sigma$$

$$m_{lk}^a = - \int_{\Sigma_1} z_l(M) \left\{ \int_{\Sigma_1} G(M, N) F_{nk}(N) \varphi_n(N) d\sigma \right\} d\sigma$$

$$n_l = n e_l, \quad z_l = (r \times n) e_l, \quad k=1, 2, \dots, 5, \quad n, l=1, 2, 3$$

Используя (1.7) и (2.1), найдем, что матрицы c^a и m^a имеют следующий вид:

$$(2.4) \quad c_{lk}^a = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & \mu_3 \\ 0 & 0 & \mu_2 & -\mu_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_{lk}^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\zeta_1 & \zeta_2 & 0 \\ 0 & \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 \end{pmatrix}$$

Для вычисления коэффициентов (2.4) необходимо знать функцию $z(u)$, реализующую конформное отображение полулобуса Π_0 на область D_z (фиг. 1). Сравнивая профили пространственной и плоской каверн (см. рис. IV.7 и рис. IV.8 работы [9]), можно видеть, что они практически совпадают в части, примыкающей к обтекаемому телу и оказывающей наибольшее влияние на значения присоединенных масс при ударе [10]. Учитывая, что $z(u)$ как для пространственного, так и для плоского течений имеет одинаковый порядок при $u \rightarrow \infty$, из сказанного можно сделать вывод, что при приближенном расчете допустимо использовать функцию $z(u)$ плоской задачи (т. е. на фиг. 1 кривой BC будет соответствовать профиль каверны при плоском течении). Для конуса с углом при вершине равным 2α функция $z(u)$ плоской задачи [10] в зависимости от переменной u имеет вид

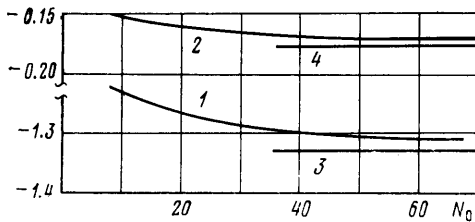
$$(2.5) \quad z(u) = ix_0 - ice^{i\alpha\pi} \int_0^u \sin 2v \left(\operatorname{ctg} \frac{v}{2} \right)^{2\alpha} dv$$

$$c = \left\{ \sin \alpha\pi \int_0^{\pi/2} \sin 2t \left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right)^{2\alpha} dt \right\}^{-1}$$

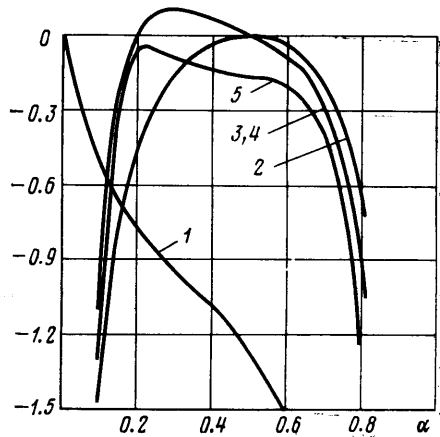
$$x_0 = \operatorname{ctg} \alpha\pi \quad (\alpha \leq 0.5), \quad x_0 = 0 \quad (\alpha > 0.5)$$

3. С использованием (2.5) и конечномерной аппроксимации функции Грина (т. е. в (1.5) — (1.6) $n, k=1, 2, \dots, N_0=N_1^2$, и в (1.10) $j, l=1, 2, \dots, N_1$; при этом из (2.3) следует, что для тела вращения в (1.7) достаточно использовать $m=0, 1$) был произведен расчет коэффициентов (2.3) на ЭВМ. Для вычисления интегралов в (1.9) и (2.3) отрезки интегрирования дробились на N_1 участков, в каждом из которых использовалась квадратурная формула Гаусса 4-го порядка. Обращение симметричной матрицы A (1.5) производилось по методу квадратных корней (алгоритм 666 [11]) с удвоенной точностью (ЕС ЭВМ).

На примере диска ($\alpha=0.5$) на фиг. 2 (здесь кривая 1 соответствует коэффициенту μ_1 , 2 — ζ_2) иллюстрируется характер



Фиг. 2



Фиг. 3

сходимости решения в зависимости от N_0 . Там же приводятся значения коэффициентов $\mu_1=4/3$ (3) и $\zeta_2=8/15$ (4), соответствующие удару диска о поверхность жидкости [12].

Присоединенные массы диска при ударе о поверхность жидкости и при струйном обтекании весьма близки [10, 13], поэтому такое сравнение позволяет оценить точность вычислений коэффициентов (2.4) при струйном обтекании. Как видно из фиг. 2, при $N_0=30-60$ погрешность не превышает 4–6%. При этом время счета на ЭВМ ЕС-1030 составило в среднем 1, 7, 50 минут соответственно при $N_0=9, 36, 64$ ($N_1=3, 6, 8$). Для других α характер сходимости аналогичный. Результаты расчетов коэффициентов $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \zeta_1, \zeta_2$ в зависимости от параметра конусности α при $N_0=36$ представлены на фиг. 3 (соответственно кривые 1, 2, 3, 4, 5).

4. При расчете коэффициента сопротивления осесимметричных тел, обтекаемых со срывом струй, хорошие результаты дает способ, в котором распределение давления вдоль образующей тела берется из решения соответствующей плоской задачи [10]. По аналогии кажется правдоподобным использование такого способа и для расчета присоединенных масс. Простой пример показывает, что это не так: распределение импульсивного давления при ударе пластинки о поверхность жидкости дается соотношением [4] $p = \rho r_0 V_1 \sqrt{1 - \xi^2}$, $\xi = x_2 / r_0$ (здесь $2r_0$ — ширина пластинки), используя которое подсчитаем μ_1 при прямом ударе диска радиуса r_0 о поверхность жидкости

$$\mu_1 = \frac{K_1}{\rho V_1 r_0^3} = \frac{1}{\rho V_1 r_0^3} \int_{z_1} p d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \xi^2} \xi d\xi d\theta = \frac{2\pi}{3}$$

Как видно, эта величина в $\pi/2$ раза больше, чем действительное значение $\mu_1 = 4/3$ [12]. Аналогичный результат получается и для струйных течений.

Поступила 11 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. Удар пластинки при обтекании с отрывом струй. ПММ, 1952, т. 16, вып. 1.
2. Берман Я. Р. Удар клина при обтекании с отрывом струй. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
3. Пархомовский С. И. Удар решетки при симметричном кавитационном обтекании. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
4. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
5. Михлин С. Г. Линеинные уравнения в частных производных. М., «Высшая школа», 1977.
6. Сокольников И. С. Тензорный анализ. М., «Наука», 1971.
7. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного, М., «Наука», 1977.
8. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. М., «Наука», 1966.
9. Егоров И. Т., Садовников Ю. М., Исаев И. И., Басин М. А. Искусственная кавитация. Л., «Судостроение», 1971.
10. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., «Наука», 1979.
11. Агеев М. И., Марков Ю. И., Алиж В. П. Библиотека алгоритмов 516-1006, вып. 2. М., «Сов. радио», 1976.
12. Римап И. С., Крепс Р. Л. Присоединенные массы тел различной формы. Тр. ЦАГИ, 1947, № 635.
13. Логвинович Г. В., Якимов Ю. Л. Погружение тел в жидкость с большими скоростями. В кн.: Неустановившиеся течения воды с большими скоростями. М., «Наука», 1973.

УДК 532.516

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ПОДВИЖНОЙ И НЕПОДВИЖНОЙ СФЕРАМИ ПРИ НЕБОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

И. М. СТАРОВИН

(Москва)

В последние годы в связи с исследованием некоторых физиологических процессов, а также в связи с проблемой разработки и создания искусственного сердца получили широкое распространение работы, в которых течение крови в сердце, так же как и в крупных кровеносных сосудах, рассматривается как течение вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости. При этом относительно геометрии сердца допускаются различные предположения. Так, например, в [1, 2] моделью желудочка сердца служила сфера, влияние входного и выходного клапанов не учитывалось, а так как число Рейнольдса в норме довольно велико, то течение крови рассматривалось как течение идеальной несжимаемой жидкости. В экспериментальной работе [3] моделью желудочка сердца служил эллипсоид и учитывалось влияние входного лепесткового клапана, упрощенная цилиндрическая геометрия использовалась в [4].

В данной работе моделью желудочка сердца является сфера. Учитывается влияние входного искусственного шарикового клапана. Такого рода конфигурации имеют место в искусственном сердце с гидравлическим приводом. Для использования дан-