

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ВОЗДУХА
И ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ В ДАЛЬНОМ СЛЕДЕ

И. Н. ПИЛЮГИН, С. Г. ТИХОМИРОВ, С. Ю. ЧЕРНЯВСКИЙ

(Москва)

Определение параметров дальнего химически неравновесного вязкого следа за телом, летящим в газе с гиперзвуковой скоростью, представляет интерес для интерпретации экспериментальных данных. Для расчета этих параметров используются конечно-разностные [1, 2] и интегральные [3, 4] методы решения уравнений осесимметричного пограничного слоя. Аппроксимация результатов численного решения задачи в виде критериальных зависимостей от определяющих безразмерных параметров весьма затруднена. Кроме того, в связи с отсутствием полного решения задачи о неравновесном течении в ближнем следе за телом распределение параметров в начальном сечении дальнего следа известно с невысокой степенью точности. Поэтому при исследовании дальнего следа целесообразно развивать приближенные методы решения.

В данной работе предложен приближенный метод решения задачи о следе, позволяющий учесть основные особенности течения со сложной химической кинетикой. Получены аналитические зависимости для распределений параметров газа и интенсивности излучения, а также критерии подобия. Установлено удовлетворительное согласие результатов расчета и эксперимента по всем измеренным в настоящее время параметрам.

1. Система безразмерных уравнений пограничного слоя, описывающая течение газа с неравновесными химическими реакциями в осесимметричном вязком следе за телом, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho ur) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho vr) = 0, \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\mu r}{Pr} \left[\frac{\partial H}{\partial r} + (Pr-1) u \frac{\partial u}{\partial r} \right] \right\}$$

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda}, \quad H = \sum_{i=1}^N h_i c_i + \frac{u^2}{2} = h + \frac{u^2}{2}, \quad h_i = \int_0^T C_{pi} dT + h_i^\circ$$

$$\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu r}{Sc_i} \frac{\partial c_i}{\partial r} \right) + W_i$$

$$p = \rho T M_\infty \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{M_i}$$

$$W_i = \frac{dM_i}{\rho_\infty V_\infty} \sum_{k=1}^{N_r} (b_{ik} - a_{ik}) \left\{ k_{jk} \prod_{h=1}^{\bar{N}} [X_j]^{a_{jh}} - \right.$$

$$\left. - k_{bh} \prod_{j=1}^N [X_j]^{b_{jk}} \right\}, \quad \sum_{i=1}^N c_i = 1$$

$$(1.1) \quad \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{M_i} c_i = 0, \quad [X_i] = \frac{c_i}{M_i} \rho \rho_\infty, \quad C_p = \sum_{i=1}^N c_i C_{pi}, \quad Sc_i = \frac{\mu}{\rho D_i}$$

$$\sum_{j=1}^N a_{jk} A_j \xrightleftharpoons[k_{bk}]{k_{fk}} \sum_{j=1}^N b_{jk} A_j$$

Здесь N и N_r — соответственно число компонентов и реакций; xd , rd — осевая и радиальная координаты; uV_∞ , vV_∞ — составляющие вектора скорости вдоль x и r ; $\rho\rho_\infty$, hV_∞^2 , HV_∞^2 , TT_∞ , pp_∞ — плотность, энтальпия, полная энтальпия, температура и давление газа; c_i , M_i , $h_iV_\infty^2$, e_i — массовая концентрация, молекулярный вес, энтальпия и заряд i -го компонента; $\mu\rho_\infty V_\infty d$, $\lambda\rho_\infty V_\infty^3 d/T_\infty$ — коэффициенты вязкости и теплопроводности; $C_p V_\infty^2/T_\infty$ — теплоемкость; $D_i V_\infty d$ — эффективные амбиполярные коэффициенты диффузии; $h_i^\circ V_\infty^2$, $C_{pi} V_\infty^2/T_\infty$ — энтальпия образования и теплоемкость i -го компонента; Pr , Sc_i — числа Прандтля и Шмидта; k_{fk} , k_{bk} — константы прямой и обратной k -й реакции; a_{ik} , b_{ik} — стехиометрические коэффициенты; $[X_i]$, $W_i \frac{\rho_\infty V_\infty}{d}$ — мольно-объемная концентрация и скорость

образования i -го компонента; d — размерный диаметр тела; p_∞ , V_∞ , ρ_∞ , T_∞ , M_∞ — давление, скорость, плотность, температура и средний молекулярный вес набегающего потока газа; A_i — химические символы компонентов.

Согласно расчетам [1-3], давление в области дальнего следа $x \gg 50$ практически постоянно. Поэтому в уравнениях (1.1) опущен член, содержащий градиент давления. В правой части уравнения для H опущено малое для дальнего следа слагаемое, связанное с переносом тепла диффундирующими компонентами. В области следа числа Pr , Sc_i полагались постоянными в основном из-за слабой температурной зависимости. При турбулентном режиме течения рассматривались осредненные характеристики среды, а функции W_i вычислялись при осредненных значениях температуры и концентраций. В системе (1.1) отсутствует уравнение для электромагнитного поля, так как в рассматриваемой области следа выполняется условие квазинейтральности.

Выделяя независимые компоненты (в качестве которых можно принять N_g химических элементов), все остальные компоненты (продукты реакций) A_i ($i=1, \dots, N_L$, $N_L=N-N_g$) можно выразить через компоненты

$$A_j \quad (j=N_L+1, \dots, N) \text{ в следующем виде [5]: } A_j = \sum_{j=N_L+1}^N v_{ij} A_j, \quad \text{где } v_{ij} -$$

стехиометрические коэффициенты. Умножив каждое уравнение диффузии компонентов в (1.1) на $v_{ij} M_j / M_i$ ($i=1, \dots, N$, $j=N_L+1, \dots, N$, $v_{ij} = \delta_{ij}$ при $i > N_L$) и сложив результаты, с учетом сохранения элементов в химических

реакциях $\sum_{i=1}^N v_{ij} M_j W_i / M_i = 0$ получим уравнения диффузии элементов

$$\rho u \frac{\partial c_j^*}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_j^*}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{c_j^*}{Sc_j^*} \right) \right]$$

$$(1.2) \quad c_j^* = c_j + \sum_{i=1}^{N_L} v_{ij} \frac{M_j}{M_i} c_i$$

$$Sc_j^* = Sc_j c_j^* \left(c_j + \sum_{i=1}^{N_L} v_{ij} \frac{M_j}{M_i} \frac{Sc_j}{Sc_i} c_i \right)^{-1}, \quad \sum_{j=N_L+1}^N c_j^* = 1,$$

$$\sum_{j=N_L+1}^N \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{c_j^*}{Sc_j^*} \right) = 0$$

В области дальнего следа ударная волна слабая и мало изменяет параметры равномерного внешнего потока. Поэтому можно положить $r \rightarrow \infty$, $u \rightarrow 1$, $H \rightarrow H_\infty$, $c_i \rightarrow c_{i\infty}$ ($i=1, \dots, N_L$), $c_j^* \rightarrow c_{j\infty}^*$ ($j=N_L+1, \dots, N$). На оси следа справедливы соотношения: $r=0$, $\partial u / \partial r = \partial H / \partial r = \partial c_i / \partial r = v = 0$.

Начальные условия имеют вид $x = x_H$, $u = u_H(r)$, $H = H_H(r)$, $c_i = c_{iH}(r)$, где индекс H относится к начальному сечению. Для дальнейшего анализа получим интегральные соотношения из системы (1.1). Путем интегрирования уравнений (1.1) по r от $r=0$ до ∞ с учетом условий

$$r \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\partial c_i}{\partial r} = v = 0$$

используя законы сохранения массы, количества движения и энергии для контрольной поверхности, охватывающей тело, получим

$$(1.3) \quad C_x = 16 \int_0^\infty \rho u (1-u) r dr$$

$$(1.4) \quad C_H = 16 \int_0^\infty \rho u (H_\infty - H) r dr$$

где C_x , C_H — коэффициенты сопротивления и теплообмена обтекаемого тела.

Аналогично из уравнения диффузии элементов (1.2) следует

$$(1.5) \quad \int_0^\infty \rho u (c_j^* - c_{j\infty}^*) r dr = C_{3j}^*, \quad j = N_L + 1, \dots, N$$

где C_{3j}^* — константа, определяемая из начальных условий и пропорциональная коэффициенту массопереноса обтекаемого тела. Из уравнений диффузии компонентов получим

$$(1.6) \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \rho u (c_i - c_{i\infty}) r dr = \int_0^\infty W_i r dr$$

В случае замороженных химических реакций (1.6) дает

$$(1.7) \quad \int_0^\infty \rho u (c_i - c_{i\infty}) r dr = C_{3i}$$

где C_{3i} — константа для i -го компонента, определяемая из начальных условий.

Введем новые независимые переменные

$$(1.8) \quad s=x, \quad z = \int_0^r \frac{\rho r dr}{R^2(x)}, \quad R(x) = \left(\int_0^{r_0} \rho r dr \right)^{1/2}$$

где r_0 — характерная полуширина следа.

Из (1.8) следуют соотношения

$$(1.9) \quad \frac{r^2}{2} = R^2(x) \int_0^z \frac{dz}{\rho}, \quad \frac{r_0^2}{2} = R^2(x) \int_0^1 \frac{dz}{\rho}$$

Решение уравнений (1.1) ищем в виде [3]

$$(1.10) \quad u=1-u_0(x)f(z), \quad h=h_\infty+h_0(x)\varphi(z), \quad c_i=c_{i\infty}+\psi_i(x)F_i(z).$$

В дальнейшем следе дефект скорости мал по сравнению со скоростью набегающего потока $u_0(x) \ll 1$. Преобразуем уравнения (1.1) и интегральные соотношения (1.3)–(1.7), подставляя в них (1.10) и оставляя главные члены по u_0 . Потребуем, чтобы решение (1.10) удовлетворяло как преобразованным уравнениям при $r=0$, так и интегральным соотношениям. Тогда из (1.3), (1.4), (1.7) получим

$$(1.11) \quad u_0(x) = \frac{C_x}{16R^2(x)J_1}, \quad J_1 = \int_0^\infty f(z) dz$$

$$(1.12) \quad h_0(x) = u_0(x) \left(1 - \frac{C_H}{C_x} \right) \frac{J_1}{J_2}, \quad J_2 = \int_0^\infty \varphi(z) dz$$

$$(1.13) \quad \Psi_i(x) = \frac{C_{3i}}{R^2(x)J_{3i}}, \quad J_{3i} = \int_0^\infty F_i(z) dz$$

Дифференцирование (1.11)–(1.13) по x дает

$$(1.14) \quad \frac{u_0'R}{u_0R'} = \frac{h_0'R}{h_0R'} = \frac{\psi_i'R}{\psi_iR'} = -2$$

Здесь штрих означает дифференцирование по x . Записывая уравнение импульсов при $r=0$, с учетом (1.9), (1.10) получим

$$(1.15) \quad R' = -\frac{\mu_0}{R} \left(\frac{d \ln f}{dz} \right)_{z=0} = \frac{B\mu_0}{R}, \quad x=x_H, \quad R_H=R(x_H)$$

Из этого уравнения при известной функции $\mu_0(x)$ находим зависимость $R(x)$ как для ламинарного, так и турбулентного режимов течения. В дальнейшем вязком следе ($x \geq 10^2$) турбулентный режим наступает при $Re \geq 10^5$ [6–8], где число Рейнольдса вычислено по параметрам набегающего потока и диаметру тела. В этом случае коэффициент вязкости имеет вид [3] $\mu = \mu_0(x) = kRu_0$ (k — эмпирическая константа) и (1.15) дает

$$(1.16) \quad R(x) = [R_H^3 + 3kC_x B(x - x_H)/16J_1]^{1/3}$$

Из выражения для μ_0 и соотношений (1.11), (1.16) видно, что $\mu_0 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Поэтому, строго говоря, асимптотика осесимметричного следа при $x \rightarrow \infty$ для любого конечного значения Re определяется молекулярной вязкостью. Однако для $Re \geq 5 \cdot 10^5$ вплоть до расстояния от тела $x \leq 10^4$ молекулярная вязкость пренебрежимо мала по сравнению с турбулентной.

При еще больших расстояниях от тела дальний след становится ламинарным. В дальнейшем рассмотрим решение задачи для турбулентного режима течения.

Переходя к новым координатам (1.8) и используя (1.9)–(1.14), с точностью до членов $O(u_0)$ получим из (1.1)

$$(1.17) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(Bfz + \rho \frac{df}{dz} \int_0^z \frac{dz}{\rho} \right) = 0$$

$$(1.18) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(B\varphi z + \frac{\rho}{Pr} \frac{d\varphi}{dz} \int_0^z \frac{dz}{\rho} \right) = 0$$

$$(1.19) \quad F_i \psi_i' - 2 \frac{R'}{R} \psi_i z \frac{dF_i}{dz} = 2 \frac{R'}{R} \psi_i \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho}{B Sc_i} \frac{dF_i}{dz} \int_0^z \frac{dz}{\rho} \right) + \frac{W_i}{\rho}$$

Граничные условия запишем в форме

$$(1.20) \quad rd\Phi/dz=0, \quad z=0.$$

при $z \rightarrow \infty$, $\Phi=0$, где Φ — любая из функций f, φ, F_i .

Интегрируя (1.17)–(1.19) по z (при $W_i=0$) с учетом (1.20), получим

$$\Phi = \exp \left(-\alpha B \int_0^z \left[\rho \int_0^{z'} \frac{dz''}{\rho} \right]^{-1} z' dz' \right)$$

где $\alpha=1, Pr, Sc_i$ соответственно.

Вблизи оси следа $\rho \approx \rho_0(x)$ и решения принимают вид

$$(1.21) \quad \Phi = \exp(-\alpha Bz), \quad z=r^2/r_e^2$$

С учетом (1.21) получим значения интегралов $J_1=B^{-1}$, $J_2=(B Pr)^{-1}$, $J_{3i}=(B Sc_i)^{-1}$. В области дальнего следа при $x \rightarrow \infty$ малое влияние начальных условий на распределение параметров и рост ширины следа $R(x)$, что позволяет пренебречь величинами R_H и x_H (1.16). Используя найденное значение J_1 , получим

$$(1.22) \quad R(x) = \left(\frac{3kC_x B^2}{16} \right)^{1/4} x^{1/4}, \quad u_0(x) = \left(\frac{C_x}{144k^2 B} \right)^{1/4} x^{-1/4}$$

Для определения параметра B использованы измерения радиального распределения скорости газа в турбулентном следе за сферой [9] при числах Маха $M=3.5-12.8$ и Рейнольдса $Re=(0.1-1) \cdot 10^6$. Для расстояний $x=300-2000$ с погрешностью менее 10% эти измерения аппроксимированы [9] кривой

$$(1.23) \quad f = \exp(-r^2/r_v^2), \quad r_v = 0.305x^{1/4}$$

Здесь r_v — радиус, на котором дефект скорости уменьшается в e раз. Сравнивая (1.21) с (1.23), при $r=r_v$ находим

$$(1.24) \quad B = 3.36 \cdot 10^{-3} k^{-2}, \quad r_e = \sqrt{B} r_v$$

Подставляя B в (1.22), получим соотношение $u_0(x) = 1.27 C_x^{1/4} x^{-2/3}$, которое удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными [9]

при $x \geq 10^3$. Вводя по аналогии с r_V радиусы следа для дефектов энтальпии r_h и концентрации i -го компонента r_{c_i} , из (1.21) с учетом (1.24) находим $r_h = r_V (\text{Pr})^{-1/2}$, $r_{c_i} = r_V (\text{Sc}_i)^{-1/2}$. Уравнение химической кинетики на оси следа имеет вид

$$(1.25) \quad \frac{d\psi_i}{dx} = \frac{2R'}{R} \frac{\psi_i}{B \text{Sc}_i} \left(\frac{dF_i}{dz} \right)_{z=0} + \frac{W_{i0}}{\rho_0}$$

Подставляя (1.25) в (1.19), перегруппировав слагаемые и полагая под интегралами $\rho = \rho_0(x)$, получим соотношение

$$(1.26) \quad \left(\frac{W_i}{\rho} - \frac{W_{i0}}{\rho_0} F_i \right) \frac{R}{2R' \psi_i} = \frac{F_i}{B \text{Sc}_i} \left(\frac{dF_i}{dz} \right)_{z=0} - z \frac{dF_i}{dz} - \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{B \text{Sc}_i} \frac{dF_i}{dz} \right)$$

Левая часть (1.26) зависит от x и z , а правая — только от z . Поэтому необходимо обе эти части приравнять к нулю, что дает радиальное распределение компонентов в виде (1.21) и соотношение $W_i = W_{i0} F / \rho_0$. Полученное решение позволяет свести (1.25) к уравнению

$$(1.27) \quad \frac{d\psi_i}{dx} + 2 \frac{R'}{R} \Psi_i = \frac{W_{i0}}{\rho_0}$$

Интегральное соотношение (1.6) удовлетворяется при этом автоматически. Этот результат отражает физическую особенность исследуемого течения, состоящую в том, что дефекты концентраций химических компонентов и температура убывают в поперечном направлении значительно быстрее, чем в осевом [10–12]. Поэтому химические реакции протекают в основном лишь на оси следа [7].

Формулы (1.21) позволяют путем сопоставления с экспериментально измеренными радиальными распределениями параметров течения в дальнем следе получать значения турбулентных коэффициентов переноса газа Sc_i , Pr . Из [10] получим значение эффективного амбиполярного числа Шмидта ионного компонента $\text{Sc} = 0.4$. В силу квазинейтральности для электронов $\text{Sc} = 0.4$. Для нейтральных компонентов число Шмидта, рассчитанное по эффективному амбиполярному коэффициенту диффузии, составляет тогда $\text{Sc} = 0.8$ [5]. С помощью данных [11] определим турбулентное число Прандтля $\text{Pr} = 0.8$. Полученные решения для \bar{R} , u_0 , h_0 , f , φ , F_i позволяют свести задачу о течении многокомпонентного химически неравновесного вязкого газа в дальнем турбулентном следе за телом к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (1.27) при $R'/R = 1/3$ и начальных условиях $x = x_H$, $\psi_i = \psi_{iH}$. Концентрации химических элементов на оси следа можно представить в виде $c_j^* = c_{j\infty}^* + \psi_j^*$ ($j = -N_L + 1, \dots, N$). Из (1.27) следуют уравнения диффузии элементов на оси следа

$$\frac{d\psi_j^*}{dx} + \frac{3}{2} \frac{\psi_j^*}{x} = 0, \quad x = x_H, \quad \psi_j^* = \psi_{jH}^* \quad (j = N_L + 1, \dots, N)$$

Аналитическое решение этих уравнений $\psi_j^* = \psi_{jH}^* (x/x_H)^{-2/3}$ позволяет сократить число дифференциальных уравнений (1.27) до N_L . Концентрации остальных N_g компонентов находим из соотношений

$$(1.28) \quad \psi_j = \psi_j^* - \sum_{i=1}^{N_L} v_{ij} \frac{M_j}{M_i} \psi_i$$

В общем случае распределение температуры на оси следа T_0 определяется с помощью (1.12) из соотношения

$$(1.29) \quad h_\infty + h_0(x) = \sum_{i=1}^N \left(\int_0^x C_{pi} dT + h_i^\circ \right) (c_{i\infty} + \psi_i(x))$$

а плотность ρ_0 — из уравнения состояния.

2. В измерениях [13] наблюдалось медленное уменьшение температуры с расстоянием x вдоль оси. Поэтому далее с целью получения аналитического решения температура полагалась постоянной.

В качестве примера рассмотрим течение в следе за телом, летящим в воздухе. Путем анализа химической кинетики, приведенной в [1, 2, 6], выявлены основные для аэробаллистического эксперимента реакции, дающие вклад в W_{10} не менее 10% при температурах 1000–3000° К (см. таблицу). Константы скоростей реакций имеют вид $k_i = aT^b e^{c/T}$, $[T] = K$,

№	Реакция	$k_i (T)$		
		a	b	c
1	$O+O+O_2 \rightarrow O_2+O_2$	2(22)	-2.7	0
2	$O+O+O \rightarrow O_2+O$	6.16(22)	-2.7	0
3	$O+O+N_2 \rightarrow O_2+N_2$	5.07(21)	-2.7	0
4	$N+NO \rightarrow N_2+O$	1.5(13)	0	0
5	$N+O_2 \rightarrow O+NO$	1.8(8)	1.5	-3300
6	$O+NO_2 \rightarrow NO+O_2$	1.8(13)	0	-550
7	$NO++e \rightarrow N+O$	1.8(21)	-1.5	0
8	$NO+O \rightarrow NO_2+h\nu$	3(11)	-1.55	0

$[k_i] = (см^3/моль)^{q-1} сек^{-1}$, q — порядок реакции. Для величины a использовано обозначение $\xi(n) = \xi \cdot 10^n$. Реакции рекомбинации азота отсутствуют, так как массовая концентрация атомарного азота в следе мала [6]. Введем новые переменные $\theta_i = \psi_i / \psi_{iH}$, где $i=1-8$ соответствуют $O_2, O, N_2, NO_2, NO, NO^+, e, N$; $y = x/x_H$.

Упростим выражения для W_{10} в (1.27), опуская члены малой величины. Решения уравнений для концентраций компонентов, влияющих на распределение электронов и излучение в турбулентном следе, имеют вид:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \theta_2 &= y^{-2/3} \{ 1 - 3\Gamma_2 [y^{1/3} - 1 + \alpha_1 (1 - y^{-1/3})] \} \\ \theta_4 &= \theta_5 = y^{-2/3}, \quad \theta_6 = y^{-2/3} [3\Gamma_6 y^{1/3} + 1 - 3\Gamma_6]^{-1} \\ \Gamma_2 &= x_H \frac{2dp_\infty^2 M_\infty^2 \psi_2^H \rho_0^2}{a_\infty M R_A^2 T_\infty^2 M_2} \left[\frac{k_1 c_{1\infty}}{M_1} + \frac{k_3 c_{3\infty}}{M_3} \right] \\ \Gamma_6 &= x_H \frac{dp_\infty M_\infty \psi_6^H k_7 \rho_0}{a_\infty R_A T_\infty M_6 M}, \quad \alpha_1 = \frac{k_2 \psi_2^H}{M_2} \left[\frac{k_1 c_{1\infty}}{M_1} + \frac{k_3 c_{3\infty}}{M_3} \right]^{-1} \end{aligned}$$

Здесь a_∞ — скорость звука в набегающем потоке газа, R_A — универсальная газовая постоянная. Концентрация электронов на оси следа n_{e0} находилась из соотношения

$$(2.2) \quad n_{e0} = \frac{\rho_\infty \rho_0 N_A \psi_e^H}{M_e} \theta_8 = n_{e0}^H \theta_8$$

где N_A — число Авогадро, индекс e отмечает значения функций, описывающих поведение электронной концентрации.

Формула для интегральной плотности $\overline{N_e D_p}$, измеряемой в экспериментах, с учетом (1.8), (1.21), имеет вид

$$(2.3) \quad \overline{N_e D_p} = d \int_{-\infty}^{\infty} n_e dr = \frac{\sqrt{2} \rho_{\infty} N_A \psi_e R(x) d}{M_e} \int_0^{\infty} e^{-B Sc_e z} \left[\int_0^z \frac{dz'}{\rho} \right]^{-1} dz$$

Так как $\rho_0 \leq \rho \leq 1$, получим следующую оценку интеграла (2.3):

$$(2.4) \quad \sqrt{\pi} r_{ce} dn_{e0}^H \theta_6 / \sqrt{\rho_0} \leq \overline{N_e D_p} \leq \sqrt{\pi} r_{ce} dn_{e0}^H \theta_6 / \rho_0$$

На основе экспериментов [14] определяется величина $\overline{N_e}$, которая является концентрацией электронов, осредненной по поперечному сечению следа. С помощью (1.9), (1.10), (1.21) получим

$$(2.5) \quad \overline{N_e} = \frac{2}{r_{ce}^2} \int_0^{r_{ce}} n_e r dr = (1 - e^{-1}) \frac{n_{e0}}{\rho_0}$$

что с учетом (2.4) дает оценку для $\overline{D_p} = \overline{N_e D_p} / \overline{N_e}$:

$$(2.6) \quad \sqrt{\pi} \rho_0 (1 - e^{-1}) r_{ce} d / \sqrt{Sc_e} \leq \overline{D_p} \leq \sqrt{\pi} (1 - e^{-1}) r_{ce} d / \sqrt{Sc_e}$$

Используя соотношение из работы [15]: $r_{ce} d = 0.4\delta$ (δ — средний диаметр следа, измеренный шпирен-методом), преобразуем (2.6) при $Sc_e = 0.4$ к виду $0.708 \sqrt{\rho_0} \delta \leq \overline{D_p} \leq 0.708 \delta$. Эта оценка удовлетворительно согласуется с экспериментальной зависимостью [10] $\overline{D_p} = 0.75\delta$.

В следе за сферой, летящей в воздухе, рекомбинационное излучение определяется при $x \geq 200$ реакцией 8 [12, 16] из таблицы. Для суммарной интенсивности этого излучения на единицу длины следа справедлива формула

$$(2.7) \quad I = 2\pi d^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \int_0^{\infty} I_{\lambda} r dr$$

$$I_{\lambda} = 5.47 \cdot 10^{-17} \left(\frac{T}{300} \right)^{-1.55} \frac{n_{N_0} n_0 h c}{4\pi \lambda}$$

где λ_1, λ_2 — границы спектрального интервала, h — постоянная Планка, c — скорость света, $[T] = ^\circ K$, $[n_0] = [n_{N_0}] = \text{см}^{-3}$, $[I] = \text{вт}/\text{см} \cdot \text{стерад}$.

Из (2.7) с учетом (1.21), (2.1) при $T_0 = \text{const}$ следует

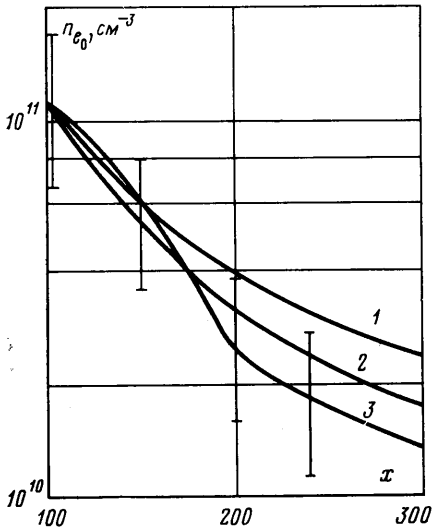
$$(2.8) \quad I/I_H = \theta_0 \theta_{N_0} y^{2/3} = \theta_0 =$$

$$= y^{-2/3} \{ 1 - 3\Gamma_2 [y^{1/3} - 1 + \alpha_1 (1 - y^{-1/3})] \}$$

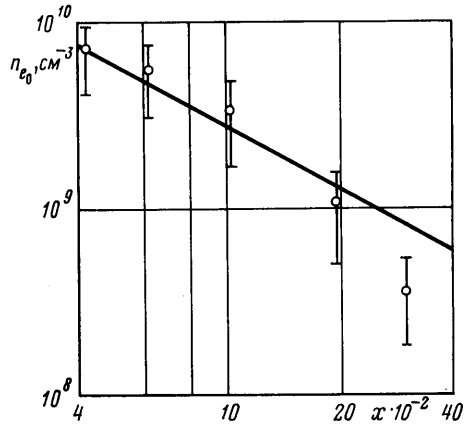
Видно, что распределение I/I_H вдоль оси следа совпадает с распределением атомарного кислорода $\theta_0(x)$, что согласуется с экспериментальными данными [12].

Осевое распределение электронной концентрации и интенсивности излучения зависит от безразмерных параметров Γ_6 и Γ_2 соответственно. Так как средняя температура газа в следе определяется в основном числом Маха M , для сохранения параметра Γ_6 должны выполняться соотношения $\rho_{\infty} d / a_{\infty} = \text{const}$, $M = \text{const}$ при неизменных остальных начальных условиях ($x_H, \psi_{iH}, T_{\infty}, M_{\infty}$). Этот закон моделирования согласуется с экспериментами для чистого воздуха и смеси его с химически инертным ксено-

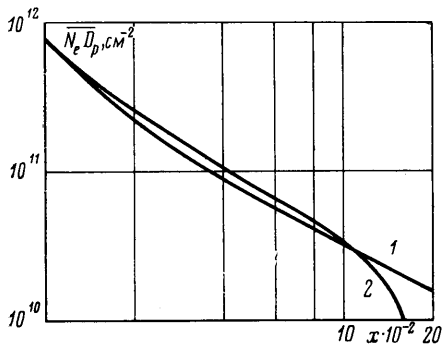
ном [17]. В последнем случае вместо p_∞ необходимо использовать величину парциального давления воздуха. Частный случай — бинарный закон подобия $p_\infty d = \text{const}$ — подтвержден экспериментально для воздуха в [10, 18]. Применение этого закона к следу за телами бóльшего размера, чем используемые в аэробаллистическом эксперименте, и движущимися с той же



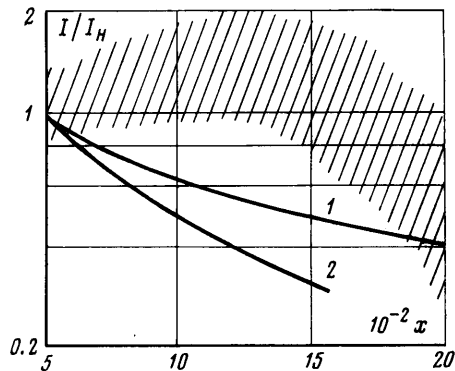
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

скоростью возможно при выполнении бинарного подобия для ψ_{IH} . Предполагая, что в ближнем следе течение химически заморожено [1], и используя результаты [19] для коротких затупленных тел, получим, что закон бинарного подобия для концентрации электронов выполняется в диапазоне $V_\infty < 7$ км/сек, $p_\infty d < 500$ (мм рт.ст.) · мм. Для распределения атомарного кислорода, определяющего интенсивность излучения, критериями подобия в дальнем следе будут $p_\infty^2 d / a_\infty = \text{const}$, $M = \text{const}$. Измерения [16] подтверждают подобие распределения интенсивности излучения в соответствии с параметром $p_\infty^2 d$ при сохранении значений T_∞ , M_∞ , V_∞ .

3. На фиг. 1–4 проведено сравнение полученных распределений параметров в дальнем турбулентном следе за неаблирующей сферой, движущейся в воздухе, с экспериментальными результатами. На фиг. 1 приведено рассчитанное распределение $n_{e0}(x)$ при $M=12$, $p_\infty d=212$ (мм рт.ст.) · мм

и температурах $T=1500^\circ\text{К}$ (кривая 1) и $T=1000^\circ\text{К}$ (кривая 2), оцененных по данным [13]. Кривая 3 соответствует результатам измерений [14]. На фиг. 2 показаны теоретическое ($T=1500^\circ\text{К}$) и экспериментальное [10] распределение $n_{e0}(x)$ для $p_\infty d=375$ (мм рт.ст.)·мм, $V_\infty=5.5$ км/сек. Расчетные значения $\overline{N_e D_p}$ приведены на фиг. 3 при $M=18.9$, $p_\infty d=375$ (мм рт.ст.)·мм, $x_H=100$, $T=1500^\circ\text{К}$; $n_{e0}^H=7.7\cdot 10^{11}$ см⁻³ (кривая 1). Экспериментальная кривая 2 заимствована из [18]. Видно, что расчетные и экспериментальные значения хорошо согласуются, за исключением области $x \geq 2000$, где на убыль электронов существенное влияние оказывает образование отрицательных ионов [6]. На фиг. 4 показано осевое распределение интенсивности хемилюминесцентного излучения в интервале длин вол $\lambda_1=0.6$, $\lambda_2=0.7$ мк при $M=18$, $p_\infty d=375$ (мм рт.ст.)·мм. Кривая 1 получена расчетом по формуле (2.8) при $T=1500^\circ\text{К}$. Там же приведена расчетная кривая 2 и экспериментальные данные (заштрихованная область) из [12]. Результаты расчетов по формуле (2.8) ближе к экспериментальным данным, чем полученные в [12]. Из сопоставления с результатами измерений, часть из которых представлена на фиг. 1–4, следует, что предложенная теория применима для описания течения в следе и излучения в диапазоне параметров: $100 \leq x \leq 2000$, $V_\infty < 7 \cdot 10^3$ м/сек, $p_\infty d \leq 500$ (мм рт.ст.)·мм. Вне этого диапазона необходимо уточнение модели химической кинетики и учет изменения температуры следа.

Авторы глубоко признательны Г. Ю. Степанову, В. П. Шкадовой и К. С. Хорошко за обсуждение результатов работы.

Поступила 25 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Хорошко К. С. Гиперзвуковой след за затупленными телами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
2. Скурин Л. И. Численное исследование параметров турбулентного дальнего следа в сжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 1.
3. Скурин Л. И. Асимптотика реагирующего дальнего следа. В сб.: Тепло- и массоперенос, т. 1, ч. 3. Минск, 1972.
4. Скурин Л. И. Определение параметров дальнего турбулентного следа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 6.
5. Суслев О. Н., Турский Г. А. Определение, свойства и вычисление эффективных амбиполярных коэффициентов диффузии в ламинарном многокомпонентном ионизованном пограничном слое. ПМТФ, 1970, № 4.
6. Sutton E. A. Chemistry of electrons in pure-air hypersonic wakes. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 10 (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 10).
7. Fernandez F. L., Levinsky E. S. Air ionization in the hypersonic laminar wake of sharp cones. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 10 (Рус. перев.: Ионизация воздуха в гиперзвуковом ламинарном следе за острыми конусами. Ракетная техника и космонавтика, 1964, т. 2, № 10).
8. Wilson L. N. Far wake behaviour of hypersonic spheres. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 7 (Рус. перев.: Течение в дальней части следа за сферами, движущимися с гиперзвуковыми скоростями. Ракетная техника и космонавтика, 1967, т. 5, № 7).
9. Lahaye C. Velocity distributions of spheres wake. Canad. J. Phys., 1974, vol. 52, No. 12.
10. French I. P., Arnold T. E., Hayami R. A. Ion distributions in nitrogen and air wakes behind hypersonic spheres. AIAA Paper, 1970, No. 87.
11. Demetriades A. Mean-flow measurements in an axisymmetric compressible turbulent wake. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 3 (Рус. перев.: Измерение средних величин при течении в осесимметричном турбулентном следе сжимаемой жидкости. Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 3).
12. Steinberg M., Wen K.-S., Chen T., Yang C. C. Ballistic range and theoretical studies of chemiluminescent processes in hypersonic turbulent wake flows. AIAA Paper, 1970, No. 729.
13. Mach H. Spektroskopische Untersuchungen am Nachlauf von ablatierenden Modellen von Hyperschallflugkörpern. Raumfahrtforschung, 1974, Bd 18, H. 1.

14. Баулин Н. Н., Дмитриев А. К., Иванчинов-Маринский Н. Н., Лопатин В. Е., Пиллюгин Н. Н., Чернявский С. Ю. Исследование течения за сферой при гиперзвуковой скорости полета в воздухе открытым СВЧ-резонатором. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 3.
15. Чернявский С. Ю. Исследование размеров следа и радиального распределения скорости газа в нем за затупленным телом, движущимся с гиперзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 3.
16. Reis V. H. Chemiluminescent radiation from the far wake of hypersonic spheres. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 11 (Рус. перев.: Хемилюминесценция в области дальнего следа за сферой, движущейся с гиперзвуковой скоростью. Ракетная техника и космонавтика, 1967, т. 5, № 11).
17. Баулин Н. Н., Дмитриев А. К., Загик С. Е., Лопатин В. Е., Любомский В. А., Пиллюгин Н. Н., Чернявский С. Ю. Исследование радиофизических параметров ионизованного газа методами радиодиагностики. В кн.: Сб. докл. 2-й Всесоюз. конф. по методам аэрофиз. исследований, Новосибирск, 1979. Новосибирск, 1979.
18. Hayami R. A., Primich R. I. Wake electron density measurements behind hypersonic spheres and cones. AGARD Conf. Proc., 1967, No. 19.
19. Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике. М., «Машиностроение», 1972.