

**О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЗАРЯДОВ НА ПОВЕРХНОСТИ ПРЕГРАДЫ  
В СТРУЙНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ**

**А. В. РУБИНОВСКИЙ**

(Казань)

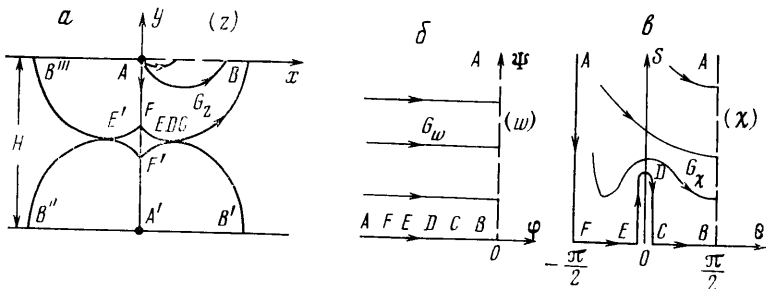
Для расчета действия взрыва М. А. Лаврентьевым предложена твердо-жидкостная модель (см., например, [1]), согласно которой в области, где модуль скорости частиц среды больше некоторого критического значения, среда считается идеальной несжимаемой жидкостью, вне этой области она ведет себя как абсолютно твердое тело, граница раздела считается линией тока с постоянной на ней скоростью.

Применение этой модели позволяет свести исходную задачу оценки эффекта взрыва к краевой задаче для уравнения Лапласа  $\Delta\varphi=0$ , где  $\varphi=-\Pi/\rho$ ,  $\Pi$  — импульс давления,  $\rho$  — плотность среды.

В работах [2, 3] с использованием этой модели исследованы задачи о пробивании преград одиночными шнуровыми зарядами. Взаимодействие зарядов при взрыве на выброс в грунте изучалось в [4, 5].

Ниже в рамках твердо-жидкостной модели рассматриваются плоские задачи о пробивании преграды взаимодействующими поверхностными шнуровыми зарядами. Исследуется влияние геометрических и физических параметров на форму и размеры пробоины. Приводятся числовые расчеты.

1. Пусть при взрыве двух точечных шнуровых зарядов, расположенных с противоположных сторон преграды в точках  $A$  и  $A'$  (фиг. 1,  $a$ ), образовалась пробоина  $BB'V'B'''$  с зоной покоя  $FEF'E'$ . (Введение зоны покоя при взаимодействии зарядов обосновано в работе [5].) Каждый из



Фиг. 1

зарядов будем считать диполем с моментом  $M$ . Такой заряд эквивалентен некоторому определенному заряду круглого сечения, заглубленному на величину диаметра. Обозначим через  $H$  толщину преграды, а через  $v_0$  — критическую скорость, характеризующую ее прочностные свойства. В силу симметрии физической области относительно прямых  $x=0$  и  $y=-H/2$  будем рассматривать лишь ее правую верхнюю четверть, которую обозначим  $G_2$ , а ее границу —  $\Gamma_2$ .

Требуется найти комплексный потенциал течения  $w(z)=\varphi(x, y)+i\psi(x, y)$  (где  $\psi(x, y)$  — функция тока) и построить границу  $\Gamma_2$ , считая участок  $AB$  эквипотенциалью, а участок  $AFECB$  линией тока, причем на

$FE$  и  $CB$ , согласно предпосылкам модели (см. например, [2]), скорость по модулю считается постоянной и равной критической скорости  $v_0$ .

Заметим, что поставленная задача эквивалентна задаче о взрыве одиночного точечного шнурового заряда при наличии непробиваемого дна, расположенного на прямой  $y = -H/2$ .

Если перейти к безразмерным переменным  $z^* = z/H$ ,  $v^* = v/v_0$ ,  $w^* = w/Hv_0$ , то решение задачи будет зависеть от одного параметра  $M^*$ . В дальнейшем знак \* у безразмерных переменных писать не будем.

Как обычно при решении гидродинамических задач теории струй [6], введем в рассмотрение логарифмы комплексной скорости течения (функцию Жуковского)

$$(1.1) \quad \chi = i \ln \left( \frac{dw}{dz} \right) = \theta + iS$$

Здесь  $\theta$  — угол между вектором скорости и осью  $x$ ,  $S = \ln v$ . На отдельных участках  $\Gamma_z$  для функций  $w(z)$  и  $\chi(z)$  имеем следующие граничные условия:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \varphi=0, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad z \in AB; \quad \psi=0, \quad S=0 \quad z \in BC, EF \\ \psi=0, \quad \theta=0 \quad z \in CE; \quad \psi=0, \quad \theta = -\frac{\pi}{2} \quad z \in FA \end{aligned}$$

В плоскостях  $w$  и  $\chi$  с учетом условий (1.2) области  $G_z$  будут соответствовать области  $G_w$  и  $G_\chi$  (фиг. 1, б и фиг. 1, в; соответственные точки в названных областях обозначены одинаковыми буквами,  $D$  — точка, в которой скорость  $v$  достигает максимального значения на прямолинейном участке  $CE$  границы  $\Gamma_z$ ). Значения потенциала в точках  $F, E, D, C$  и скорость в точке  $D$  пока неизвестны, они определяются в процессе решения задачи.

Отобразим конформно полуплоскость  $\text{Im } \zeta > 0$  ( $\zeta = \xi + i\eta$ ) на области  $G_w$  и  $G_\chi$  функциями

$$(1.3) \quad w = \sqrt{k(\text{ch } d - \xi)}, \quad \chi = \arcsin \sqrt{\xi^2 - \text{sh}^2 d}$$

где  $d = \ln v_D$ ,  $v_D$  — скорость в точке  $D$ ,  $k > 0$  — неопределенная постоянная. Точкам  $F, E, D, C, B, A$  будут соответствовать точки оси  $\xi$ :  $-\text{ch } d, -\text{sh } d, 0, \text{sh } d, \text{ch } d, \infty$ . Необходимо отметить, что в предельном случае, когда  $d=0$ , заряды не взаимодействуют и исследуемая задача переходит в задачу об определении выемки выброса при взрыве одиночного шнурового заряда, расположенного на поверхности полупространства. Вычисляя производную функции  $w(\zeta)$  и используя (1.1) и (1.3), получим

$$(1.4) \quad z(\zeta) = \frac{\sqrt{k}}{2} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\sqrt{\tau^2 - \text{ch}^2 d} - \sqrt{\tau^2 - \text{sh}^2 d}}{\sqrt{\tau - \text{ch } d}} d\tau$$

В выражение для  $z(\zeta)$  входят два параметра ( $k, d$ ). Параметр  $k$  можно выразить непосредственно через момент диполя  $M$  следующим образом. Если в точке  $z_0$  находится диполь, то

$$(1.5) \quad iM = 2\pi \lim_{z \rightarrow z_0} [(z_0 - z)w(z)]$$

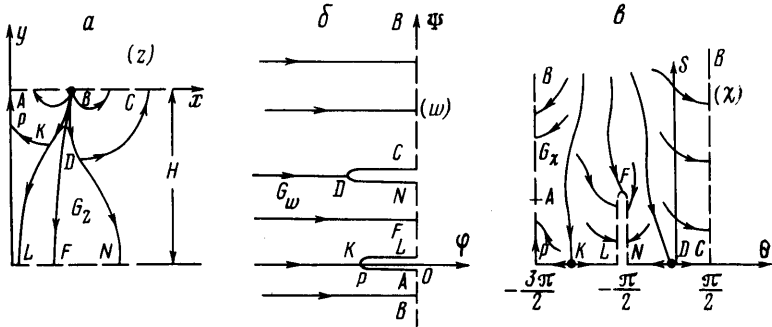
Раскрывая неопределенность и учитывая, что в точке  $A$  области  $G_z$ , где находится диполь, соответствует бесконечно удаленная точка оси  $\xi$ , получим  $M = k\lambda$ .

Параметр  $d$  определим из условия  $\text{Im } z(\text{sh } d) = -1/2$ , которое с учетом  $M = k\pi$  запишем в следующем виде:

$$(1.6) \quad I(d) = \sqrt{\frac{M}{\pi}} \int_{\text{sh } d}^{\text{ch } d} \frac{\sqrt{\tau^2 - \text{sh}^2 d}}{\sqrt{\text{ch } d - \tau}} d\tau = 1$$

Зная значение параметра  $d$ , по формуле (1.4) можно построить границу  $\Gamma_z$ .

2. Исследуем уравнение (1.6). Рассмотрим функцию  $\Phi(d) = 1/2(I(d) - 1)$ . Определим значения  $\Phi(0)$  и  $\Phi(\infty)$ .  $\Phi(0) = 2/3\sqrt{M/\pi} - 1/2$ . Введя в  $I(d)$



Фиг. 2

новую переменную интегрирования  $t = \sqrt{\text{ch } d - \tau}$ , получим

$$\Phi(d) = \sqrt{\frac{M}{\pi}} \int_0^{t_0} \frac{\sqrt{t^4 - 2t^2 \text{ch } d + 1}}{t} dt - \frac{1}{2}, \quad t_0 = \sqrt{\text{ch } d - \text{sh } d}$$

Из этого выражения следует:  $\Phi(\infty) = -1/2$ .

Уравнение (1.6) будет иметь решение при  $M \geq 9\pi/16$ . Действительно, в этом случае  $\Phi(0) \geq 0$  и, значит, функция  $\Phi(d)$ , при  $d=0$  и  $d \rightarrow \infty$  имеет разные знаки. Решение будет единственным, так как

$$\Phi(d) = -\sqrt{\frac{M}{\pi}} \int_0^{t_0} \frac{t^2 \text{sh } d dt}{\sqrt{t^4 - 2t^2 \text{ch } d + 1}} < 0, \quad 0 \leq d < \infty$$

Таким образом, при всех  $M \geq 9\pi/16$  поставленная задача имеет единственное решение, причем при  $M = 9\pi/16$  участок  $EC$  границы  $\Gamma_z$  стягивается в точку, так как в этом случае  $d=0$ .

Если перейти к размерным переменным, то условие разрешимости запишется следующим образом:

$$(2.1) \quad M \geq 9\pi H^2 v_0 / 16$$

Неравенство (2.1) является одновременно и условием пробивания.

Выразим момент диполя  $M$  через потенциал на заряде конечного радиуса. Пусть диполь с моментом  $M$  расположен в точке  $A$  на свободной поверхности. Линиями равного потенциала будет семейство окружностей, касающихся свободной поверхности в точке  $A$ . Выберем одну из окружностей радиуса  $r$  со значением потенциала на ней  $\varphi = -\varphi_0$ . Известно, что комплексный потенциал диполя определяется формулой  $w(z) = -Mi/2\pi z$ . Подставляя в нее  $z = -2ir$ ,  $w = -\varphi_0$ , получим  $M = -4\pi\varphi_0 r$ .

Учитывая последнюю формулу и выражение  $\varphi_0$  через импульс давления  $\Pi$ , запишем условие пробивания в окончательном виде  $\Pi r \geq \geq 9H^2 v_0 \rho / 64$ .

3. Рассмотрим пробивание преграды, когда оба заряда расположены на одной ее стороне. Толщину преграды  $H$ , критическую скорость  $v_0$  и расстояние между зарядами  $2l$  считаем известными. Заряды, как и в предыдущей задаче, — диполи с равными моментами  $M$ . В силу симметрии физической области будем рассматривать лишь ее правую половину (фиг. 2, а), которую обозначим  $G_z$ , а ее границу —  $\Gamma_z$  ( $LKP$  — граница зоны покоя). Как и выше, заметим, что эта задача соответствует взрыву одиночного заряда на преграде, присоединенной к непробиваемой стенке  $x=0$ . Задачу будем решать в безразмерных переменных, введенных в пункте 1. На отдельных участках  $\Gamma_z$  для функций  $w(z)$  и  $\chi(z)$  будем иметь следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \varphi=0, \quad \theta &= \frac{\pi}{2} \quad z \in BC; \quad \psi=\psi_1, \quad S=0 \quad z \in CDN \\ (3.1) \quad \varphi=0, \quad \theta &= -\frac{\pi}{2} \quad z \in NL; \quad \psi=0, \quad S=0 \quad z \in LKP \\ \psi=0, \quad \theta &= -\frac{3\pi}{2} \quad z \in PA; \quad \varphi=0, \quad \theta = -\frac{3\pi}{2} \quad z \in AB \end{aligned}$$

где  $\psi_1$  — значение функции тока на границе пробойны, которое определим в процессе решения.

В плоскостях  $w$  и  $\chi$  с учетом условий (3.1) области  $G_z$  будут соответствовать области  $G_w$  и  $G_\chi$  (фиг. 2, б и в), соответственные точки в названных областях обозначены одинаковыми буквами,  $F$  — точка, в которой скорость  $v$  достигает максимального значения на прямолинейном участке  $LN$  границы  $\Gamma_z$ . Положения точек  $C, D, N, F, K, P$  в плоскости  $w$  и положение точек  $D, F, K, A$  в плоскости  $\chi$  заранее неизвестны. Они определяются в процессе решения задачи.

Отобразим конформно полуплоскость  $\text{Im } \zeta_1 > 0$  ( $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ ), на области  $G_w$  и  $G_\chi$  функциями

$$(3.2) \quad w(\zeta_1) = iT \int_a^{\xi_1} \frac{(\tau-d)(\tau-k)d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - \text{sh}^2 m)(\tau - \text{ch } m)(\tau - a)}}$$

$$(3.3) \quad \chi = 2 \arcsin \sqrt{\zeta_1^2 - \text{sh}^2 m} - \frac{\pi}{2}$$

При этом точкам  $A, P, K, L, F, N, D, C, B$  будут соответствовать точки оси  $\xi_1$ :  $a, -\text{ch } m, k, -\text{sh } m, 0, \text{sh } m, d, \text{ch } m, \infty$ , причем  $m > 0, a \leq -\text{ch } m < < k < -\text{sh } m, \text{sh } m < d < \text{ch } m$ . В предельном случае, когда  $a = -\text{ch } m$ , заряды не взаимодействуют и поставленная задача переходит в задачу о пробивании преграды одиночным шнуровым зарядом. Подобная задача рассматривалась в работах [2, 3].

Дифференцируя  $w(\zeta)$  и используя формулы (1.1) и (3.3), получим

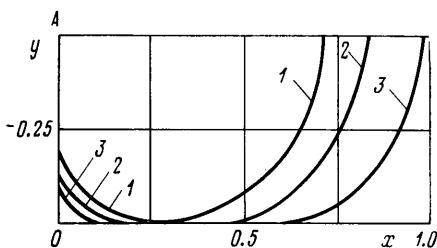
$$(3.4) \quad z(\zeta_1) = -T \int_a^{\xi_1} \frac{(\tau-d)(\tau-k) \sqrt{\tau^2 - \text{sh}^2 m} - \sqrt{\tau^2 - \text{ch}^2 m}}{\sqrt{(\tau^2 - \text{sh}^2 m)(\tau - \text{ch } m)(\tau - a)}} d\tau$$

В выражение для  $z(\xi_1)$  входят пять параметров ( $T, a, m, d, k$ ), для определения которых имеем систему четырех нелинейных уравнений:

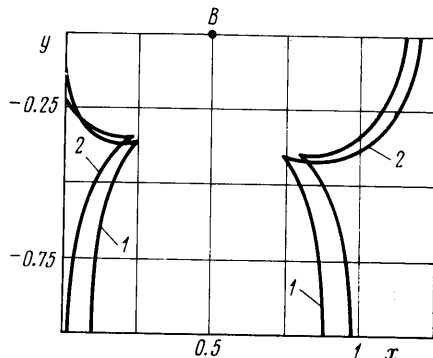
$$(3.5) \quad \operatorname{Re} w(\operatorname{ch} m) = \operatorname{Re} w(\operatorname{sh} m), \quad \operatorname{Re} z(-\infty) = -l$$

$$\operatorname{Re} w(a) = \operatorname{Re} w(-\operatorname{sh} m), \quad \operatorname{Im} z(\operatorname{sh} m) = -1$$

и условие (1.5), которое после подстановки в него (3.2), (3.4) и несложных выкладок приводится к простому виду  $M = \pi T^2/2$ . После того как из



Фиг. 3



Фиг. 4

системы (3.5) определены параметры  $d, k, m, a$ , по формуле (3.4) можно построить границу  $\Gamma_2$ .

4. На фиг. 3 приведены результаты числовых расчетов по первой задаче. Кривые 1–3 показаны формы пробоины для значений безразмерного момента диполя, равных соответственно  $9\pi/16, 2.50$  и  $4.00$ . (Кривая 1 соответствует предельному случаю, когда  $d=0$ .) Из приведенных примеров видно, что с ростом  $M$  растут длины прямолинейных участков  $AF$  и  $CE$ , а величина зоны покоя уменьшается и стремится к нулю.

Расчеты по задаче 2 проводились в полуобратной постановке, т. е. так, что значения параметров  $a$  и  $m$  задавались заранее, а величины  $M$  и  $l$  отыскивались в процессе решения. Результаты расчетов для  $l=0.5$  приведены на фиг. 4. Кривые 1 и 2 соответствуют значениям  $M=1.979$  и  $2.390$ . Из расчетов следует, что с ростом  $M$  растет ширина пробоины и длина прямолинейного участка  $AP$ , а ширина зоны покоя на нижней свободной поверхности убывает и стремится к нулю.

Вычисления проводились на ЭВМ М-222 с использованием стандартной процедуры вычисления интеграла, причем для увеличения точности расчетов особенности у подынтегральных функций выделялись. Программы составлялись на входном языке транслятора ТА-1М.

В заключение автор выражает благодарность Н. Б. Ильинскому за постановку задачи и научное руководство.

Поступила 7 IV 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., «Наука», 1977.
2. Кузнецов В. М. О взрыве на поверхности пластинки. ПМТФ, 1962, № 3.
3. Ильинский Н. Б., Поташев А. В., Рубиновский А. В., Фищенко П. А. Решение некоторых задач теории взрыва в импульсно-гидродинамической постановке. Тр. семинара по краевым задачам, вып. 14. Казань, Изд. Казанск. ун-та, 1977.
4. Кузнецов В. М., Поляк Э. Б., Шер Е. Н. О гидродинамическом взаимодействии шнуровых зарядов ВВ. ПМТФ, 1975, № 5.
5. Ильинский Н. Б., Якимов Н. Д. О взаимодействии двух плоских шнуровых зарядов при взрыве на поверхности грунта, ПМТФ, 1977, № 1.
6. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., «Наука», 1979.