

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В КАНАЛАХ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОЩАДИ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ЧАСТОТАХ, БЛИЗКИХ К ЧАСТОТЕ ОТСЕЧКИ

А. А. ОСИПОВ

(Москва)

Исследованы особенности распространения пространственных акустических возмущений в двумерном потоке газа в осесимметричных каналах переменной площади поперечного сечения при частотах, близких к частоте отсечки. Рассмотрен случай медленного изменения площади поперечного сечения канала по его длине. Полученные результаты представляют интерес, например с точки зрения оценки уровня шума, выносимого из воздушно-реактивного двигателя по его газовым трактам. Исследованы особенности решения, найденного ранее в работе [1] и представляющего собой по существу аналог ВКБ-приближения. Указанные особенности связаны с существованием точек поворота в теории ВКБ-приближения. С помощью аппарата этой теории [2] разработана методика расчета коэффициента отражения акустических возмущений, причем оказывается, что в рамках рассматриваемого приближения отражение существует только на тех участках канала, где частота близка к частоте отсечки. Приведены примеры расчета.

Следует отметить, что задаче о распространении пространственных акустических возмущений в различных каналах посвящено большое количество работ, причем в последнее время для ее решения широко используются численные методы (см., например, введение в [3]). В то же время среди этих исследований можно указать лишь несколько работ, в которых рассматриваются особенности, связанные с наличием точек поворота. Так, в работе [4] приведены качественные соображения, касающиеся явления отражения в геометрической акустике. В работе [5] найдено решение задачи о распространении трехмерных акустических волн в неоднородных волноводах (в покоящейся газе), справедливое и в окрестности точки поворота. Однако автору неизвестны работы, где была бы решена задача об отражении акустических волн в окрестности точек поворота при наличии неоднородного стационарного потока газа.

1. Как и в [1], рассматриваются гармонические по времени акустические колебания идеального газа в осесимметричном канале с изменяющейся по его длине площадью поперечного сечения. Средний по времени стационарный двумерный поток газа предполагается безвихревым и изэнтропическим. Все соотношения, описывающие движения газа, записываются в цилиндрической системе координат, ось x которой совпадает с осью симметрии канала. Обозначим через u, v, w составляющие возмущения вектора скорости газа соответственно вдоль осей x, r, φ , а через ρ — возмущение плотности газа.

Все переменные считаются безразмерными. Величины с размерностью длины отнесены к поперечному размеру канала в критическом сечении r_* , скорости — к критической скорости звука стационарного потока A_* , времени — к r_*/A_* , плотности — к критической плотности R_* .

Исследование ограничено рассмотрением каналов медленно изменяющегося поперечного сечения, таких, что $\delta = r_*/l_* \ll 1$, где l_* — масштаб длины, характеризующий пространственную неоднородность параметров стационарного потока. Для анализа акустических возмущений использовано

высокочастотное приближение, основанное на предположении о малом изменении параметров стационарного потока и формы канала на длинах порядка длины волны возмущения [6].

В рамках указанного приближения решение уравнений, описывающих рассматриваемые колебания и линеаризованных относительно малых возмущений параметров течения, с точностью до δ^0 можно записать в виде

$$(1.1) \quad \rho = DR_0 J_m e^{i\vartheta}, \quad u = -DA_0 J_m K e^{i\vartheta} / q$$

$$(1.2) \quad v = iDA_0 J_m' e^{i\vartheta} / q, \quad w = DA_0 J_m m e^{i\vartheta} / \Lambda q$$

$$\vartheta = \theta - \omega t - m\varphi, \quad K = (-\Omega M \pm \sqrt{\Omega^2 + M^2 - 1}) / (1 - M^2)$$

$$q = MK - \Omega, \quad \Omega = \omega / \lambda A_0, \quad \Lambda = \lambda r$$

Здесь использованы обозначения, совпадающие с обозначениями [1].

В формулах (1.1) и (1.2) $J_m = J_m(\Lambda)$ — функция Бесселя первого рода порядка m , J_m' — ее производная по Λ ; m — целое число, характеризующее периодичность возмущений по углу φ ; ω — частота колебаний по времени t ; R_0 , A_0 , M — соответственно плотность, скорость звука и число Маха стационарного потока газа, вычисленные в одномерном приближении; i — мнимая единица. Параметр λ находится из соотношения $J_m'(\lambda r_w) = 0$, где r_w — координата стенки канала. Параметр Ω является известной функцией M , которая в случае совершенного газа с постоянными теплоемкостями имеет вид

$$(1.3) \quad \Omega = \Omega_0 \left[\frac{2}{\kappa + 1} \left(\frac{1}{2} M^2 (\kappa - 1) + 1 \right) \right]^{(3\kappa - 1)/4(\kappa - 1)} M^{-1/2}$$

Здесь κ — отношение удельных теплоемкостей газа, $\Omega_0 = \omega / \Lambda_w$, где $\Lambda_w = \lambda r_w$. В силу определения λ величина Λ_w постоянна вдоль канала и характеризует поперечную моду колебания.

Фаза θ определяется равенством

$$(1.4) \quad \theta = \int^x \lambda K dx$$

В рамках использованного приближения параметры M , λ , r_w , K и Ω медленно изменяются вдоль канала и поэтому рассматриваются как функции переменной $\xi = \delta x$.

Параметр D также является функцией ξ , определяемой уравнением

$$(1.5) \quad \frac{d \ln D}{d \xi} = P \frac{d \ln M}{d \xi}$$

$$P = \frac{1}{2q^2 (\Omega^2 + M^2 - 1)} \{ N(1 - M^2) (\Omega^2 + M^2) - Mq(K - N_2 \Omega) +$$

$$+ q(K - Mq) [Kq(2MN_2 + 1) + M(K^2 N_1 - N_2 M)] \}$$

$$N = [(\kappa - 1)M^2 + 2]^{-1}, \quad N_1 = N[2 - (\kappa - 1)M^2], \quad N_2 = (\kappa - 1)MN$$

Отметим, что зависимость возмущений всех параметров, кроме w , от моды и частоты колебания в формулах (1.1) определяется единственным параметром Ω_0 . При заданном Ω_0 величина w зависит, кроме того, от параметра m/Λ_w . Решение (1.1) получено с учетом двумерности стационарного потока газа в первом приближении по малому параметру δ .

2. При дальнейшем исследовании выписанного выше решения весьма полезным окажется существование интеграла линеаризованных уравнений газовой динамики, который можно рассматривать как интеграл акустической энергии. В связи с этим приведем некоторые соотношения, которые будут использованы далее.

Плотность энергии акустического возмущения можно определить как разность значений плотности энергии газа в возмущенном и невозмущенном состояниях, вычисленную с точностью до величин, пропорциональных квадрату амплитуды возмущения. В случае однородной покоящейся среды, как показано в [6], плотность акустической энергии и плотность ее потока выражаются только через величины линейной акустики. При этом уравнение сохранения акустической энергии записывается в дивергентном виде и не содержит источниковых членов.

Если газовая среда, по которой распространяются звуковые волны, находится в движении, то в уравнении акустической энергии появляются, вообще говоря, источниковые члены. Однако, как показано в [7, 8], если течение газа безвихревое и с постоянной энтропией, то для осредненной по периоду колебаний плотности потока акустической энергии \mathbf{I} справедливо соотношение $\text{div } \mathbf{I} = 0$, а для самой величины \mathbf{I} можно получить следующее выражение, содержащее параметры только линейной акустики

$$(2.1) \quad \mathbf{I} = R A^3 \left[\langle \rho \mathbf{v} \rangle + \frac{\mathbf{V}}{A} \langle \rho^2 \rangle + \frac{\mathbf{V}}{A} \langle \rho \mathbf{V} \mathbf{v} \rangle + \frac{\rho}{A} \langle \mathbf{v} (\mathbf{V} \mathbf{v}) \rangle \right]$$

Здесь \mathbf{V} , A , R — вектор скорости, скорость звука и плотность невозмущенного потока, \mathbf{v} — линейное возмущение вектора скорости газа с составляющими u , v , w , ρ — линейное возмущение плотности, а $\langle f \rangle$ — осредненное по периоду колебаний значение f .

Как следует из результатов работы [6], величина \mathbf{I} , определяемая равенством (2.1), остается дивергентной и для высокочастотного приближения (геометрической акустики) в случае одиночной системы волн, распространяющейся в безграничном пространстве. Исследуемое в настоящей работе решение представляет собой суперпозицию двух систем таких волн, распространяющихся в противоположных направлениях относительно оси r . При этом радиальная компонента вектора \mathbf{I} оказывается равной нулю, а $\text{div } \mathbf{I} = O(\delta) \neq 0$. Однако расчеты показывают, что осредненный по периоду колебаний поток акустической энергии F через поперечное сечение канала, вычисленный с помощью (2.1), при этом сохраняется постоянным вдоль канала. Аналогичный результат в случае отсутствия потока газа в канале получен аналитически в [5].

С помощью (1.1) можно получить следующее выражение для F , справедливое при действительных значениях K :

$$(2.2) \quad F = \frac{1}{4} R_0 A_0^3 |D|^2 r_w^2 J_m^2(\Lambda_w) \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda_w^2} \right) \frac{\Omega}{q_2} (\pm \sqrt{\Omega^2 + M^2 - 1})$$

Знакам плюс и минус перед корнем в (2.2) и в выражении для K соответствуют две волны, одна из которых распространяется вниз по потоку, а другая — вверх по потоку. Если решение представляет собой суперпозицию указанных двух волн, то можно показать, что при частотах, больших частоты отсечки (при действительных K), суммарный средний по времени поток акустической энергии через поперечное сечение канала оказывается равным сумме потоков в каждой из волн, вычисленных по формуле (2.2). При частотах же, меньших частоты отсечки, для суммарного потока акустической энергии получается следующая формула:

$$(2.3) \quad F = -\frac{1}{2} r_w^2 J_m^2(\Lambda_w) \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda_w^2} \right) R_0 A_0^3 \Omega \times \\ \times \sqrt{|\Omega^2 + M^2 - 1|} \text{Im} \left[\frac{D^+}{q^+} \left(\frac{D^-}{q^-} \right)^* \right]$$

Здесь верхний индекс плюс (минус) обозначает параметры в волне, распространяющейся вниз (вверх) по потоку, а звездочка обозначает комплексно-сопряженную величину.

Из последней формулы следует, что перенос акустической энергии при частотах, меньших частоты отсечки, имеет место только в суперпозиции экспоненциально затухающей и растущей по длине канала волн. Если одна из указанных волн отсутствует, то переноса акустической энергии в среднем по времени в таком возмущении нет.

Отметим, что при вычислении потока акустической энергии F является существенным учет поперечной составляющей вектора скорости в стационарном потоке газа. Как показывают расчеты, проведенные автором, вычисление параметра D по формуле, полученной для чисто одномерного стационарного течения и приведенной в [1], приводит к тому, что величина F не сохраняется по длине канала.

3. Рассмотрим особенности решения [1], приведенного в п. 1 данной работы.

Для каждой m -й тангенциальной моды колебаний имеется дискретный набор значений $\Lambda_w = \Lambda_{wn}$, каждое из которых соответствует n -й радиальной моде. Таким образом, мода колебаний определяется, вообще говоря, тремя параметрами: ω , m и n . Однако, как видно из (1.5), указанные три параметра влияют на значения амплитуды возмущений $D(\xi)$ через единственный параметр $\Omega_0 = \omega/\Lambda_w$. Другими словами, особенности поведения функции $D(\xi)$ определяются не значениями ω , m и n в отдельности, а величиной обобщенного параметра Ω_0 . Поэтому задание конкретной моды колебания эквивалентно заданию значения Ω_0 . При этом большие значения Ω_0 соответствуют большим частотам или более низким тангенциальным и радиальным модам. Продольной волне соответствует $\Omega_0 = \infty$.

Пусть сначала $dr_w/dx \neq 0$ и все параметры, изменяющиеся вдоль канала, можно рассматривать как однозначные функции M . Тогда для фазы θ и амплитуды D , определяемых из (1.4) и (1.5), можно записать формулы

$$\begin{aligned} \theta &= ih \left(- \int^M M \Omega g dM \pm \int^M g \sqrt{Q} dM \right) \\ D &= \exp \int^M \frac{P}{M} dM \\ (3.1) \quad Q &= \Omega^2 + M^2 - 1, \quad g = \left[-2M \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2 \right) \frac{dr_w}{d\xi} \right], \quad h = \frac{\Lambda_w}{\delta} \end{aligned}$$

Здесь h — большой положительный параметр, а $g(M)$ — ограниченная однозначная функция. Знак плюс (минус) соответствует волне, распространяющейся по потоку (против потока) газа.

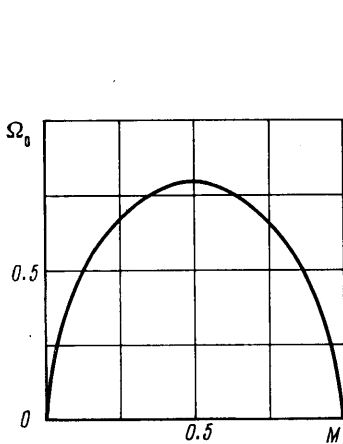
Рассмотрим функцию $y(M) = \exp \left[\int^M (P/M \pm ihg\sqrt{Q}) dM \right]$. Первое слагае-

мое в формуле (3.1) для θ является ограниченной и однозначной функцией M , не имеющей особенностей при $M > 0$. Поэтому $y(M)$ определяет особенности поведения решения (1.1) при перемещении вдоль канала. Метод, с помощью которого было найдено это решение, а также вид функции $y(M)$ позволяют утверждать, что в отношении зависимости от M решение (1.1) является аналогом ВКБ-решения [2]. Указанная аналогия следует также из результатов [5].

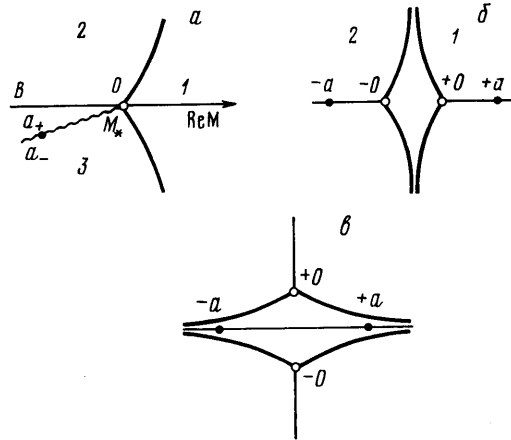
Далее нас будут интересовать особенности поведения $y(M)$ вблизи тех значений $M = M_*$, при которых $Q = 0$. Указанные значения аналогичны

точкам поворота ВКБ-решения. Согласно акустической терминологии, в точке поворота частота колебания равна местному значению частоты отсечки. Отражение возмущений, описываемых ВКБ-решением, становится существенным вблизи точек поворота, т. е. на тех участках канала, где частота близка к частоте отсечки.

Из (1.3) и (3.1) следует, что известное значение Ω_0 полностью определяет соответствующие точки поворота M_* . На фиг. 1 приведена кривая $M_*(\Omega_0)$, полученная в [1], с помощью которой будет проведено дальней-



Фиг. 1



Фиг. 2

шее исследование. В области под кривой выполняется неравенство $Q < 0$ и частота ниже частоты отсечки, а над кривой — $Q > 0$ и частота выше частоты отсечки. Распространению волны заданной моды и частоты, соответствующих некоторому значению Ω_0 , на участке канала от сечения с $M = M_1$ до сечения с $M = M_2$ соответствует отрезок прямой $\Omega_0 = \text{const}$ на фиг. 1, лежащий между прямыми $M = M_1$ и $M = M_2$. Точке поворота соответствует точка пересечения указанного отрезка с кривой $M_*(\Omega_0)$.

Так как вблизи точки поворота решение (1.1) непригодно, то для установления связи между решением справа и решением слева от точки поворота воспользуемся методом продолжения решения по контуру в комплексной плоскости M в обход точки поворота, применяемым в теории ВКБ-приближения. При этом, ввиду того что решение (1.1) является приближенным, особого рассмотрения требует погрешность такого продолжения, определяемая поведением функции $y(M)$ и, в частности, множителя e^ζ ,

$$\text{где } \zeta = ih \int^M g \sqrt{Q} dM.$$

Для наглядности рассмотрим задачу об отражении акустической волны от сужающегося участка канала, заключенного между сечениями с значениями числа Маха потока газа, равными 0.1 на входе и 0.5 на выходе. Пусть волна, распространяющаяся со стороны входа, характеризуется значением $\Omega_0 = 0.7$. Как видно из фиг. 1, координата M_* точки поворота в этом случае приблизительно равна 0.27.

Рассмотрим комплексную плоскость M , в которой рассматриваемому участку канала соответствует отрезок оси $\text{Re } M$ от 0.1 до 0.5. Из точки поворота M_* проведем разрез и выделим однозначную ветвь функции \sqrt{Q} . Далее введем так называемые сопряженные линии Стокса [2], определяе-

мые равенством $\text{Im} \int^M g\sqrt{Q} dM = 0$. Указанные линии разделяют области

возрастания и убывания e^{\pm} как функции расстояния от точки поворота в плоскости M . Так как производная $Q'(M_*)$ не равна нулю, то вблизи M_* можно положить $Q(M) \approx A(M - M_*)$, где A — отрицательная константа. Схема расположения сопряженных линий Стокса в окрестности точки поворота показана на фиг. 2, а. Линия OB соответствует участку канала, где частота выше частоты отсечки. Волнистой линией показан разрез комплексной плоскости.

На линии OB значение Q положительно, и вне малой окрестности точки поворота решение представляет собой суперпозицию двух бегущих волн — падающей и отраженной. На действительной оси справа от точки поворота, где $Q < 0$, имеется, вообще говоря, экспоненциально растущее и убывающее решения. Однако если ниже по потоку от сечения выхода источника возмущений и отражение приходящих волн отсутствуют, то в области 1 может существовать только убывающее решение. Как следует из теории ВКБ-приближения, убывающее в области 1 решение может быть продолжено через прилегающие сопряженные линии Стокса в области 2 и 3, где это решение становится возрастающим, и в конечном счете однозначно определяет падающую и отраженную волны на OB . При этом всюду в рассматриваемой области ошибка ВКБ-приближения имеет порядок $O(1/\hbar)$ по сравнению с главным членом.

Определим функции $y_1(M)$ и $y_2(M)$ по формулам

$$y_1 = \exp \int_{a_+}^M \left(\frac{P_1}{M} + ihg\sqrt{Q} \right) dM$$

$$y_2 = \exp \int_{a_-}^M \left(\frac{P_2}{M} - ihg\sqrt{Q} \right) dM$$

Здесь P_1 и P_2 — значения P в (1.5), отвечающие соответственно знаку плюс и минус в выражении для K в формулах (1.2). Точки a_+ и a_- суть точки a соответственно на нижней и на верхней сторонах разреза фиг. 2, а. Интегрирование проводится по контуру, не пересекающему разрез.

Выберем ветвь функции \sqrt{Q} , такую, чтобы y_1 в области 1 на фиг. 2, а была убывающим решением при удалении от точки поворота. Тогда с помощью процедуры, изложенной в [2], можно найти решение на OB , которое имеет вид $y_1 + y_2/\mu$. При сделанном выборе ветви функции \sqrt{Q} первое слагаемое есть отраженная волна, а второе — падающая. Если разрез совместить с OB , то коэффициент отражения μ в точке a действительной оси оказывается равным

$$\mu = \exp \int_{a_-}^{a_+} \left(\frac{P_1}{M} + ihg\sqrt{Q} \right) dM$$

Заметим, что величина интеграла в экспоненте не зависит от выбора пути интегрирования, если соответствующий замкнутый контур не охватывает других точек поворота, кроме рассматриваемой. При этом абсолютная величина коэффициента отражения определяется первым сомножителем, соответствующим первому слагаемому в подынтегральном выражении. Так как указанное слагаемое действительно на OB , то аргумент первого сомножителя не зависит от положения точки a на OB и, как показывают расчеты, оказывается равным $\pi/2$. Второе слагаемое в подынтегральном

выражении является на OB чисто мнимой величиной, а соответствующий ему множитель по абсолютной величине равен единице и определяет сдвиг по фазе между отраженной и падающей волной в точке a . Величина большого параметра h влияет, таким образом, только на указанный сдвиг фаз.

Так как справа от точки поворота имеется только убывающее решение, то, согласно формуле (2.3), поток акустической энергии здесь в среднем по времени равен нулю. Это означает, что весь поток энергии падающей волны отражается. При этом коэффициент отражения по амплитуде возмущений μ , вообще говоря, отличен от единицы из-за наличия сносящего потока.

Рассмотрим теперь распространение акустической волны той же моды, определяемой значением $\Omega_0=0.7$, на участке канала с монотонно растущим по длине числом Маха потока газа от $M_1=0.1$ до $M_2=0.9$. В этом случае помимо рассмотренной выше точки поворота $M_* \approx 0.27$, как видно из фиг. 1, имеется еще одна точка поворота $M_* \approx 0.72$. Отрезок оси $\text{Re } M$ между точками поворота соответствует участку канала, где частота ниже частоты отсечки. Указанные точки поворота расположены достаточно далеко друг от друга и их взаимное влияние пренебрежимо мало. Однако если распространяющаяся волна характеризуется несколько большим значением Ω_0 , например 0.78, то точки поворота расположены близко друг от друга и возникает необходимость их совместного рассмотрения. Такая задача аналогична задаче о плотном потенциальном барьере в теории ВКБ-приближения. Схема расположения сопряженных линий Стокса в этом случае показана на фиг. 2, б.

Рассмотрим задачу об отражении акустической волны, распространяющейся вниз по потоку и приходящей на барьер слева. Тогда справа от барьера может существовать только уходящая волна. Как показано в [2], убывающее в области 1 решение можно продолжить вдоль контура, обходящего обе точки поворота, и получить на действительной оси в области 2 решение для отраженной волны.

Проведем разрезы комплексной плоскости M из точек поворота $+O$ и $-O$ вдоль действительной оси соответственно вправо и влево. Возьмем точку $+a$ на верхней стороне разреза справа от точки поворота $+O$, а точку $-a$ — на верхней стороне разреза слева от точки поворота $-O$. Рассмотрим функцию y_1 , определяемую по формуле

$$y_1 = \exp \int_{+a}^M \left(\frac{P_1}{M} + ihg\sqrt{Q} \right) dM$$

Выберем ветвь функции \sqrt{Q} , такую, чтобы y_1 в точке $+a$ описывало уходящую волну. Тогда в области 1 y_1 будет убывающим решением. Продолжая y_1 в верхней полуплоскости, получим в точке $-a$ уходящую, т. е. отраженную волну. Отношение σ амплитуды возмущения в отраженной волне к амплитуде в прошедшей волне оказывается равным

$$\sigma = \exp \left[\int_{+a}^{-a} \left(\frac{P_1}{M} + ihg\sqrt{Q} \right) dM \right]$$

Для вычисления коэффициента отражения воспользуемся свойством сохранения полного среднего по времени потока акустической энергии F , определяемого соотношением (2.2). Тогда можно записать равенство

$$F_i + F_r = F_t$$

Здесь индексы i и r приписаны значениям F соответственно в падающей и отраженной волне в точке $-a$, а t — в прошедшей волне в точке $+a$.

С помощью (2.2) получим следующие формулы для абсолютных величин коэффициентов отражения и прохождения:

$$(3.2) \quad |\mu| = \left(\frac{\sigma^2 \beta_i \alpha}{\beta_t - \beta_r \sigma^2 \alpha} \right)^{1/2}, \quad |v| = \left| \frac{\mu}{\sigma} \right|$$

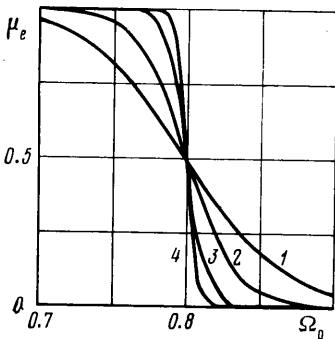
$$\alpha \equiv \left(\frac{A_0^2}{M} \right)_{-a} \left(\frac{M}{A_0^2} \right)_{+a}, \quad \beta \equiv M \left(1 + \frac{K^2}{q^2} \right) - \frac{K}{q} (1 + M^2)$$

Обозначим через μ_e и v_e коэффициенты отражения и прохождения, вычисленные по потокам акустической энергии. Тогда

$$(3.3) \quad \mu_e = |\mu|^2 \frac{\beta_r}{\beta_i}, \quad v_e = \frac{|v|^2}{\alpha} \frac{\beta_t}{\beta_i}$$

В отличие от случая изолированной точки поворота величина коэффициента отражения от барьера при фиксированных Ω_0 и значениях числа Маха потока газа на входе и на выходе зависит от моды возмущения и формы канала через параметр h и производную $dr_w/d\xi$ в каждом сечении канала.

Если проходящая акустическая волна характеризуется значением $\Omega_0 \approx 0.8$, равным максимуму кривой $\Omega_0(M_*)$, то, как видно из фиг. 1, две рассматриваемые точки поворота сливаются в одну двукратную точку поворота. При еще больших значениях Ω_0 , как показывает анализ функции комплексного переменного $Q(M)$, двукратная точка поворота вновь распадается на две теперь уже комплексные симметричные относительно действительной оси точки поворота. Соответствующая схема показана на фиг. 2, в. Возникает задача, аналогичная задаче о рассеянии в теории ВКБ-приближения. Используемый нами подход не требует специального рассмотрения указанных случаев, и формулы (3.2) и (3.3) остаются в силе.



Фиг. 3

Приведем некоторые результаты расчета. Рассмотрим сужающийся конический канал ($dr_w/d\xi = -1$) с значениями числа Маха потока газа на входе и на выходе равными соответственно 0.1 и 0.9. Пусть падающая волна распространяется от сечения входа вниз по потоку газа. Показатель адиабаты κ равен 1.4. На фиг. 3 представлены кривые значений коэффициента отражения μ_e , вычисленного по формуле (3.3) для разных частот и мод колебаний, что соответствует разным значениям Ω_0 . Кривые 1–4 на фиг. 3 соответствуют значениям $h=10, 20, 50, 100$. При заданных частоте ω , а также номерах m и n соответственно тангенциальной и радиальной моды параметр Ω_0 может быть легко найден как отношение ω/Λ_w , где Λ_w — n -й корень уравнения $J_m'(\Lambda_w) = 0$, являющийся табличной величиной. Например, моде $m=1$, $n=1$ при $\omega=1.5$ соответствует $\Omega_0 \approx 0.815$. При фиксированном Λ_w параметр $h \equiv \Lambda_w/\delta$ тем больше, чем медленнее изменяется площадь поперечного сечения по длине канала.

Как видно из фиг. 3, для параметра Ω_0 имеется характерное значение $\Omega_0 \approx 0.8$, соответствующее вершине кривой $\Omega_0(M_*)$ на фиг. 1, при котором коэффициент отражения равен 0.5. Около значения $\Omega_0 \approx 0.8$ имеется окрестность порядка $1/h$, в которой происходит монотонное уменьшение коэффициента отражения от 1 до 0. Возмущение любой моды и частоты, для

которых значение Ω_0 не попадает в указанную окрестность, либо полностью отражается на рассматриваемом участке канала, либо проходит сквозь него без отражения. В частности, продольная волна, для которой $\Omega_0 = \infty$, с точностью до погрешностей рассматриваемого приближения распространяется без отражения.

4. Интересно рассмотреть некоторые особенности, возникающие при немонотонном изменении числа Маха потока газа вдоль канала. В этом случае в качестве независимой переменной вместо M удобнее взять ξ . Тогда вместо (3.1) получим

$$\theta = ih \left[- \int_{\xi}^{\xi} \frac{M\Omega}{(1-M^2)r_w} d\xi \pm \int_{\xi}^{\xi} \frac{\sqrt{Q}}{(1-M^2)r_w} d\xi \right]$$

Рассмотрим канал, симметричный относительно сечения $\xi=0$, форма которого, или, что то же, $M(\xi)$ заданы соотношением

$$(4.1) \quad [M - (M_0 \pm R)]^2 + \xi^2 = R^2$$

Формула (4.1) в плоскости ξ , M определяет окружность с центром в точке $(0, M_0 \pm R)$ и радиусом R , причем мы будем рассматривать лишь небольшую дугу этой окружности около M_0 . Значение M_0 является максимальным (минимальным) значением M на этом участке, если в (4.1) взят знак минус (плюс).

Пусть Ω_0 значительно меньше 0,8, а M_0 есть максимальное значение M в рассматриваемом участке канала и расположено на оси M левее левой точки поворота, соответствующей заданному значению Ω_0 на фиг. 1. Это означает, что отрезок прямой $\Omega_0 = \text{const}$ в данном случае не пересекает кривую $M_*(\Omega_0)$ и в канале нет действительных точек поворота. Однако легко найти две мнимые точки поворота в комплексной плоскости ξ , симметричные относительно действительной оси. Из (4.1) получим

$$(4.2) \quad \xi^2 = -(M - M_0) [2R + (M - M_0)]$$

Будем рассматривать последнее соотношение как формулу, определяющую комплексную функцию $\xi(M)$. Выбранному значению Ω_0 соответствуют две действительные точки поворота в плоскости M : левая M_{*1} и правая M_{*2} . В рассматриваемом канале при действительных значениях ξ этих точек поворота, как уже было сказано, нет. Точки же поворота в комплексной плоскости ξ находятся из (4.2) как $\xi_* = \xi(M_*)$. В результате получим

$$(4.3) \quad \xi_{*1,2}^2 = -(M_{*1,2} - M_0) [2R + (M_{*1,2} - M_0)]$$

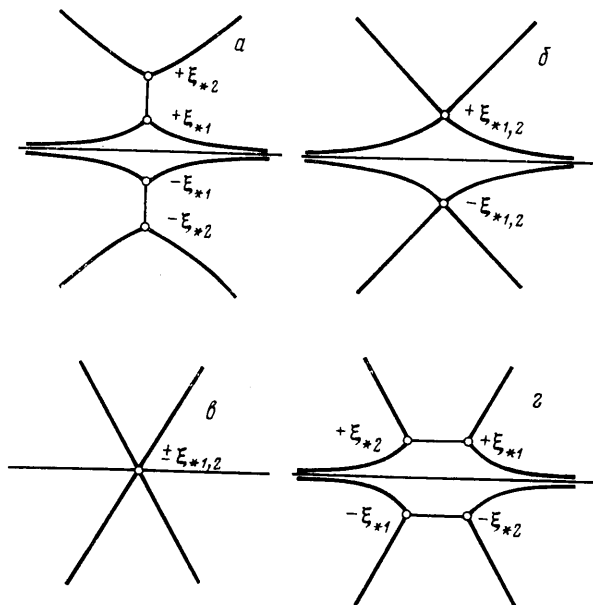
Так как, согласно нашему выбору, $M_0 < M_{*1}$, то $\xi_*^2 < 0$ и ξ_* — мнимая величина. Из (4.3) получаем две пары симметричных мнимых точек поворота $\pm \xi_{*1}$ и $\pm \xi_{*2}$. Если разность $M_{*1} - M_0$ мала, то вблизи горла канала мала $Q(M)$ и ВКБ-решение здесь неверно. Поэтому в таком канале имеет место отражение акустических возмущений. Схема расположения сопряженных линий Стокса в этом случае представлена на фиг. 4, а.

Если точки поворота M_{*1} и M_{*2} отстоят друг от друга достаточно далеко, то влиянием точек поворота $\pm \xi_{*2}$ можно пренебречь и задача сводится к случаю, изображенному на фиг. 2, в.

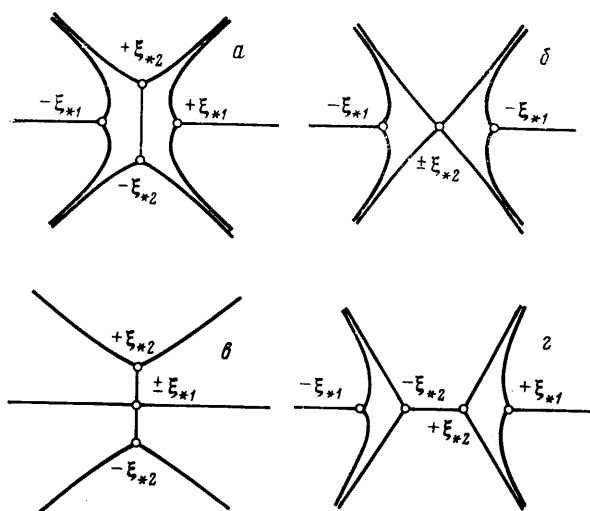
С увеличением Ω_0 при фиксированной разности $M_{*1} - M_0 > 0$ точки поворота ξ_{*1} и ξ_{*2} сближаются и при Ω_0 около 0,8 сливаются в две двукратные точки поворота, как показано на фиг. 4, б. Если теперь устремить к нулю разность $M_{*1} - M_0$, то две двукратные точки поворота сольются в одну четырехкратную на фиг. 4, в. При дальнейшем увеличении Ω_0 возникают четыре комплексные точки поворота, изображенные на фиг. 4, г.

Пусть теперь $\Omega_0 < 0,8$, M_0 — по-прежнему максимальное значение M и $M_{*2} > M_0 > M_{*1}$. Тогда существуют две действительные точки поворота $\pm \xi_{*1}$ и две мнимые $\pm \xi_{*2}$, как показано на фиг. 5, а. С увеличением Ω_0 действительные или мнимые точки поворота могут слиться в одну двукратную, как это видно на фиг. 5, б и в. Если $M_0 > M_{*2}$, то имеются четыре действительные точки поворота, изображенные на фиг. 5, г.

Рассмотренные выше схемы, возникающие при немонотонном изменении числа Маха потока газа по длине канала, в отношении расчета коэффициента отражения оказываются несколько более сложными, чем те, которые были исследованы в [2]. По этой причине использование методов, описанных в [2], в указанных случаях оказывается затруднительным и для решения задачи необходимо дальнейшее исследование.



Фиг. 4



Фиг. 5

Рассмотрим, наконец, случай, когда $\Omega_0 < 0.8$, M_0 — максимальное значение M , причем $M_0 > M_{*2}$, а значение M на входе и на выходе из канала находится между M_{*1} и M_{*2} . Этот случай аналогичен случаю гармонического осциллятора [2]. Соответствующая схема представлена средней частью схемы на фиг. 5, в (без точек поворота $\pm E_{*1}$). Если вне области между точками поворота источники возмущений отсутствуют, то справа и слева от этой области могут быть только затухающие при удалении от точек поворота решения. Тогда незатухающие по времени колебания в области между точками поворота имеют место только при специальном выборе формы канала или одного из параметров h , M_0 и Ω_0 . Если форма канала, h_0 и M_0 заданы, то в ней могут существовать лишь те моды, которые характеризуются вполне определенными значениями параметров Ω_0 . Такой канал можно рассматривать как акустический резонатор.

Заканчивая рассмотрение явления отражения, отметим еще следующее. Как следует из проведенного анализа, отражение становится существенным только тогда, когда траектория волны, представляемая соответствующим отрезком прямой $\Omega_0 = \text{const}$ на фиг. 1, либо пересекает кривую $M = M_*(\Omega_0)$, либо расположена достаточно близко к ней. Вдоль указанной кривой по обе ее стороны можно выделить полосы шириной порядка $1/h$, где необходимо учитывать отражение. Вне этой зоны акустические возмущения в рассматриваемом приближении распространяются без отражения в соответствии с соотношением (1.5).

Автор признателен А. Н. Крайко, указавшему на связь исследуемых в настоящей работе особенностей с точками поворота в теории ВКБ-приближения и предложившему использовать аппарат этой теории для вычисления коэффициента отражения. Обсуждения, которые автор имел с А. Н. Крайко в ходе выполнения работы, были очень полезными.

Поступила 8 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Осипов А. А. Распространение трехмерных акустических возмущений в осесимметричных каналах медленно изменяющегося поперечного сечения. Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 5.
2. Heading J. An introduction to phase-integral methods. L., Methuen, 1962 (рус. перев.: Хединг. Дж. Введение в метод фазовых интегралов. М., «Мир», 1965).
3. Astley R. J., Eversman W. A finite element method for transmission in nonuniform ducts without flow: comparison with the method of weighted residuals. J. Sound and Vibration, 1978, vol. 57, No. 3.
4. Candel S. M. Acoustic conservation principles and an application to plane and modal propagation in nozzles and diffusers. J. Sound and Vibration, 1975, vol. 41, No. 2.
5. Nayfeh A. H., Telionis D. P. Acoustic propagation in ducts with varying cross sections. J. Acoust. Soc. America, 1973, vol. 54, No. 6.
6. Блохинцев Д. П. Акустика неоднородностей движущейся среды. М.—Л., Гостехиздат, 1946.
7. Cantrell R. H., Hart R. W. Interaction between sound and flow in acoustic cavities: mass, momentum and energy considerations. J. Acoust. Soc. America, 1964, vol. 36, No. 4.
8. Morfey C. L. Acoustic energy in non-uniform flows. J. Sound and Vibration, 1971, vol. 14, No. 2.