

ОСОБЕННОСТИ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ВБЛИЗИ КОМБИНАЦИИ
КРЫЛО — КОРПУС, РАСПОЛОЖЕННОЙ ПОД УГЛОМ АТАКИ
К НАБЕГАЮЩЕМУ СВЕРХЗВУКОВОМУ ПОТОКУ

С. И. КУСАКИН

(Москва)

Для исследования интерференции крыла и фюзеляжа при сверхзвуковых скоростях полета наряду с численными методами расчета, использующими точные уравнения движения, эффективно применяется теория малых возмущений [1]. К этому направлению относятся, в частности, работы [2-4], в которых решение задачи строится в рамках линейной теории. В работе [5] результаты, полученные в первом приближении, уточняются путем привлечения следующего члена разложения потенциальной функции в ряд по малому параметру. В данной работе рассмотрены особенности поля скоростей вблизи произвольно профилированного крыла со сверхзвуковыми кромками, обусловленные наличием корпуса. Найден общий вид сингулярного члена асимптотического разложения решения линейного уравнения в окрестности конуса Маха, выходящего из точки пересечения передней кромки крыла с поверхностью корпуса. Построено равномерно точное решение нелинейного дифференциального уравнения для добавочного потенциала скорости. Определены положение и интенсивность скачка уплотнения на верхней поверхности крыла. Приведены аналитические зависимости и количественные оценки местных срывов потока под крылом в той области течения, где линейная теория приводит к наибольшим погрешностям. Полученные результаты важны для правильного определения аэродинамических характеристик летательных аппаратов, находящихся в трехмерном поле скоростей, индуцируемых комбинацией крыло — фюзеляж.

1. Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим задачу об обтекании конфигурации, которая составлена из тела вращения и произвольно профилированного треугольного крыла со сверхзвуковыми кромками, установленного на корпусе в среднем положении так, что ось корпуса лежит в плоскости, относительно которой отсчитываются координаты верхней и нижней поверхностей крыла. При этом корпус в той области, где к нему примыкает крыло, представляет собой правильный круговой цилиндр, радиус которого равен r_b .

Выберем прямоугольную систему координат x, y, z , связанную с обтекаемой конфигурацией (фиг. 1). Пусть V характеризует величину скорости набегающего потока, а α обозначает угол атаки между вектором V и осью x . В случае сверхзвукового стационарного трехмерного безвихревого течения потенциал скоростей Φ в системе координат x, y, z удовлетворяет следующему квазилинейному дифференциальному уравнению гиперболического типа:

$$(1.1) \quad (a^2 - \Phi_x^2) \Phi_{xx} + (a^2 - \Phi_y^2) \Phi_{yy} + (a^2 - \Phi_z^2) \Phi_{zz} - \\ - 2\Phi_x \Phi_y \Phi_{xy} - 2\Phi_x \Phi_z \Phi_{xz} - 2\Phi_y \Phi_z \Phi_{yz} = 0$$

где a — местная скорость звука, нижние индексы означают дифференцирование по соответствующей переменной.

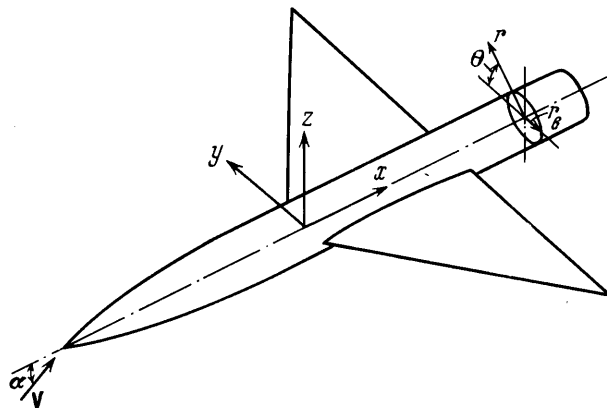
При этом должны быть выполнены необходимые соотношения между газодинамическими величинами на поверхностях сильного разрыва и вол-

нах разрежения, формирующихся в возмущенной области течения, а также условие непротекания газа через поверхность рассматриваемого тела.

Для описания поля течения введем цилиндрическую систему координат x, r, θ и представим потенциал скоростей в виде

$$(1.2) \quad \Phi = V(x + \alpha r \sin \theta + \varphi), \quad \varphi = \varphi_b + f$$

Добавочный потенциал φ_b соответствует возмущениям, создаваемым изолированным корпусом в набегающем потоке, а потенциальная функция f определяет дополнительные возмущения, индуцируемые крылом и корпу-



Фиг. 1

сом, в области влияния крыла. Из условия непротекания следует, что в плоскости крыла и на поверхности корпуса выполняются соотношения:

$$(1.3) \quad (\partial f / \partial z)_{z=0} = \tau(x, y) - \alpha - (\partial \varphi_b / \partial z)_{z=0} + \tau (\partial \varphi / \partial x)_{z=0} + \partial z_w / \partial y (\partial \varphi / \partial y)_{z=0},$$

$$(1.4) \quad (\partial f / \partial r)_{r=r_b} = 0$$

Здесь $\tau = \partial z_w / \partial x$, $z_w(x, y)$ — уравнение поверхности крыла.

Как и в [5], решение задачи рассмотрим в случае, когда передняя часть корпуса достаточно сильно вытянута, чтобы возмущенное поле скоростей, индуцируемых корпусом в области расположения крыла, с необходимой точностью аппроксимировалось потенциальной функцией для бесконечного кругового цилиндра. В этом случае выражение для производной $\partial \varphi_b / \partial z$, входящей в граничное условие (1.3), имеет вид

$$(1.5) \quad (\partial \varphi_b / \partial z)_{z=0} = \alpha r_b^2 y^{-2}$$

На поверхности корпуса при $z = \sqrt{r_b^2 - y^2}$

$$(1.6) \quad \partial \varphi_b / \partial z = \alpha (2y^2 r_b^{-2} - 1).$$

Для решения уравнения (1.4) с заданными граничными условиями применим метод малого параметра, т. е. представим f в виде ряда

$$(1.7) \quad f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j$$

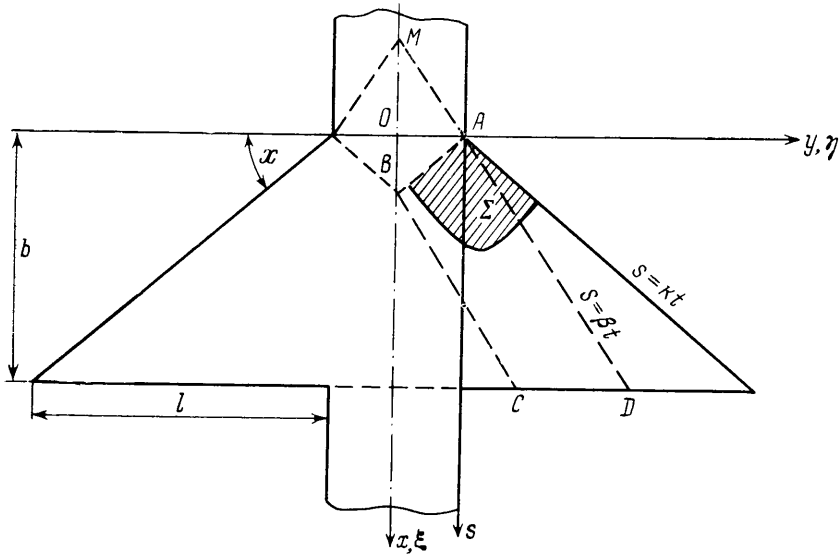
где нижний индекс указывает порядок величины.

В качестве малого параметра примем угол атаки α , совпадающий по порядку величины с местным углом наклона поверхности крыла к вектору скорости набегающего потока. При построении решения ограничимся первыми двумя членами разложения (1.7), что соответствует исследованию поля скоростей с учетом величин порядка $O(\alpha^2)$ включительно.

2. Решение задачи в первом приближении. В первом приближении потенциал скоростей f_1 удовлетворяет уравнению

$$(2.1) \quad \beta^2 f_{1xx} - f_{1yy} - f_{1zz} = 0, \quad \beta = \sqrt{M^2 - 1}$$

(M — число Маха набегающего потока), условию непротекания на поверхности комбинации крыло — корпус и условию непрерывности потенциала



Фиг. 2

при переходе через границу рассматриваемой области возмущений, которой в данном случае является огибающая конусов Маха, исходящих из передней и задней кромок крыла.

Потенциальную функцию f_1 представим в виде суммы

$$(2.2) \quad f_1 = \varphi_{w1} + g$$

Функция φ_{w1} описывает возмущенное течение, создаваемое изолированным крылом в потоке, возмущенном присутствием корпуса. При этом имеется в виду «распространенное» крыло, получаемое при продолжении действительно находящейся в потоке несущей поверхности также и на ту часть площади, которая закрывается корпусом (фиг. 2). Подфюзеляжная часть крыла получается зеркальным отражением соответствующих участков действительного крыла относительно плоскостей, касательных к поверхности корпуса в точках его пересечения с плоскостью $z=0$. Второй член суммы (2.2) представляет собой добавочный потенциал, характеризующий интерференционное воздействие крыла на корпус.

В первом приближении граничные условия (1.3), (1.4) на той части плоскости $z=0$, которая лежит внутри контура «распространенного» крыла, и на поверхности корпуса примут соответственно вид

$$(2.3) \quad (\partial \varphi_{w1} / \partial z)_{z=0} = \tau(x, y) - \alpha - (\partial \varphi_b / \partial z)_{z=0} - (\partial g / \partial z)_{z=0}$$

$$(2.4) \quad (\partial g / \partial r)_{r=r_b} = -(\partial \varphi_{w1} / \partial r)_{r=r_b}.$$

Используя свойство независимости течений в верхнем и нижнем полупространствах, добавочный потенциал скоростей g можно представить в виде [1]

$$(2.5) \quad g(x, r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{2n}(x, r) \cos 2n\theta.$$

Отсюда следует, что

$$(\partial g / \partial \theta)_{\theta=0} = (\partial g / \partial \theta)_{\theta=\pi} = 0$$

и граничное условие (2.3) приводится к виду

$$(\partial \varphi_{w1} / \partial z)_{z=0} = \tau(x, y) - \alpha - (\partial \varphi_b / \partial z)_{z=0}$$

причем производной $(\partial \varphi_b / \partial z)_{z=0}$ на подфюзеляжной части крыла приписывается значение, которое она принимает на поверхности корпуса.

Учитывая далее равенства (1.5), (1.6), получим окончательное выражение для производной $\partial \varphi_{w1} / \partial z$ на поверхности «распространенного» крыла

$$(2.6) \quad (\partial \varphi_{w1} / \partial z)_{z=0} = \begin{cases} \tau(x, 2r_b - y) - 2\alpha y^2 r_b^{-2}, & |y| \leq r_b \\ \tau(x, y) - \alpha(1 + r_b^2 y^{-2}), & |y| \geq r_b \end{cases}$$

Таким образом, определение φ_{w1} сводится к задаче о нахождении потенциала, соответствующего такому полю скоростей возмущений, окружающему данное крыло, для которого заданы значения скоростей, направленных по нормали к поверхности этого крыла. Решение этой задачи может быть записано в виде потенциала сверхзвуковых источников, расположенных в плоскости крыла:

$$(2.7) \quad \varphi_{w1}(x, y, z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Sigma} \frac{(\partial \varphi_{w1} / \partial z)_{z=0} d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2[(y-\eta)^2 + z^2]}}$$

Здесь Σ — часть плоскости «распространенного» крыла, вырезаемая обратным конусом влияния, выходящим из точки (x, y, z) (фиг. 2).

Дифференцируя (2.7) по координатам, найдем выражения для добавочных скоростей возмущений, индуцируемых изолированным крылом в неоднородном потоке, создаваемом корпусом. На правой стороне крыла в области, расположенной вне конуса Маха, выходящего из точки A , получим

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi_{w1}}{\partial x}\right)^* &= \left(\frac{\partial \varphi_1^w}{\partial x}\right)^* + \frac{r_b^2(\beta^2 y - ks_1)}{[\beta^2(y^2 + z^2) - s_1^2]^{3/2}} \\ \left(\frac{\partial \varphi_{w1}}{\partial y}\right)^* &= \left(\frac{\partial \varphi_1^w}{\partial y}\right)^* - \frac{r_b^2}{\sqrt{\beta^2(y^2 + z^2) - s_1^2}} \left[\frac{\beta^2 y T(s_1, y, z)}{\beta^2(y^2 + z^2) - s_1^2} - \frac{s_1(z^2 - y^2)}{(y^2 + z^2)^2} \right] + \frac{2r_b^2 y z}{(y^2 + z^2)^2} \\ \left(\frac{\partial \varphi_{w1}}{\partial z}\right)^* &= \left(\frac{\partial \varphi_1^w}{\partial z}\right)^* - \frac{r_b^2}{\sqrt{\beta^2(y^2 + z^2) - s_1^2}} \left[\frac{\beta^2 z T(s_1, y, z)}{\beta^2(y^2 + z^2) - s_1^2} + \frac{2s_1 y z}{(y^2 + z^2)^2} \right] + \frac{r_b^2(z^2 - y^2)}{(y^2 + z^2)^2} \end{aligned}$$

В (2.8) величины возмущенных скоростей отнесены к углу атаки α , $k = \operatorname{tg} \chi$, $s_1 = x + kr_b$, $T(s_1, y, z) = s_2 y / (y^2 + z^2) - k$. Добавочный потенциал $\varphi^w = \varphi_1^w + \varphi_2^w + \dots$ соответствует обтеканию изолированного крыла невозмущенным потоком и в первом приближении определяется по формуле

$$(2.9) \quad \varphi_1^w(x, y, z) = -\frac{1}{\pi} \iint_z \frac{[\tau(\xi, \eta) - \alpha] d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2[(y-\eta)^2 + z^2]}}$$

Аналогичным путем найдем выражения для добавочных скоростей в области, ограниченной конусами Маха, исходящими из точек A и B :

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi_{w1}}{\partial x}\right)^* &= \left(\frac{\partial \varphi_1^w}{\partial x}\right)^* + \frac{2}{\pi r_b^2 (\beta^2 - k^2)^{1/2}} \left\{ (\beta^2 y + ks_2)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\beta^2 - k^2)^2}{2} r_b^2 + \frac{\beta^2 [(x+kt)^2 - (\beta^2 - k^2) z^2]}{2} \right\} \left[\frac{\pi}{2} - P_1(x, t, z) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{r_b}{s_1^2 - \beta^2 (y^2 + z^2)} - \frac{1}{r_b^2 (\beta^2 - k^2)} \left[r_b + \frac{3(\beta^2 y + ks_2)}{\beta^2 - k^2} \right] \right\} \times \\ &\quad \times \frac{r_b^2 (\beta^2 y - ks_1)}{\pi [s_1^2 - \beta^2 (y^2 + z^2)]} P_4(x, y, z) \\ \left(\frac{\partial \varphi_{w1}}{\partial y}\right)^* &= \left(\frac{\partial \varphi_1^w}{\partial y}\right)^* + \frac{2k}{\pi r_b^2 (\beta^2 - k^2)^{1/2}} \left\{ \left[1 + \frac{\beta^2}{2(\beta^2 - k^2)} \right] \times \right. \\ &\quad \times [(x+kt)^2 - (\beta^2 - k^2) z^2] + \frac{(\beta^2 y + ks_2)^2}{\beta^2 - k^2} + \frac{(\beta^2 - k^2)}{2k} \times \\ &\quad \times [4t(x+kt) - kr_b^2] \left. \right\} \left[\frac{\pi}{2} - P_1(x, t, z) \right] - \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{2}{r_b^2 (\beta^2 - k^2)} \times \right. \\ &\quad \times \left[x+kt + \frac{kr_b}{2} + \frac{3k(\beta^2 y + ks_2)}{2(\beta^2 - k^2)} \right] + \frac{r_b s_1 y}{(y^2 + z^2) [s_1^2 - \beta^2 (y^2 + z^2)]} \left. \right\} \times \\ &\quad \times \sqrt{x^2 - \beta^2 (t^2 + z^2)} + \frac{1}{\pi} \left[1 + \frac{(y^2 - z^2) r_b^2}{(y^2 + z^2)^2} + \frac{2(z^2 - y^2)}{r_b^2} \right] \times \\ &\quad \times \operatorname{arch} \frac{x}{\beta \sqrt{t^2 + z^2}} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{2tz}{r_b^2} + \frac{r_b^2 yz}{(y^2 + z^2)^2} \right] \times \\ &\quad \times [P_2(x, t, z) - P_2(x, t, -z)] - \frac{r_b^2 yz}{\pi (y^2 + z^2)} [P_3(x, t, z, k) - \\ &\quad - P_3(x, t, -z, k) - 2\pi] + \frac{2tz}{\pi r_b^2} [P_3(x, t, -z, -k) - P_3(x, t, z, -k)] + \\ &\quad + \frac{r_b^2}{\pi (y^2 + z^2)} \left[\frac{s_1 y (\beta^2 y - ks_1)}{s_1^2 - \beta^2 (y^2 + z^2)} + (s_1 + ky) - \frac{2s_1 y^2}{y^2 + z^2} \right] P_4(x, y, z) \\ \left(\frac{\partial \varphi_{w1}}{\partial z}\right)^* &= \left(\frac{\partial \varphi_1^w}{\partial z}\right)^* - \frac{2z}{\pi r_b^2 \sqrt{\beta^2 - k^2}} \left[x+kt + k \left(\frac{\beta^2 y + ks_2}{\beta^2 - k^2} + y \right) \right] \times \\ &\quad \times \left[\frac{\pi}{2} - P_1(x, t, z) \right] + \frac{1}{2\pi} \left[1 + \frac{r_b^2 (y^2 - z^2)}{(y^2 + z^2)^2} + \frac{2(z^2 - y^2)}{r_b^2} \right] \times \\ &\quad \times [P_2(x, t, z) - P_2(x, t, -z)] + \frac{1}{2\pi} \left[1 + \frac{(y^2 - z^2) r_b^2}{(y^2 + z^2)^2} \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times [P_3(x, t, z, k) - P_3(x, t, -z, k) - 2\pi] + \frac{z^2 - y^2}{\pi r_b^2} [P_3(x, t, z, -k) - \\ & - P_3(x, t, -z, -k)] + \frac{z}{\pi} \left\{ \frac{2k}{r_b^2(\beta^2 - k^2)} - \frac{r_b s_1}{(y^2 + z^2)[s_1^2 - \beta^2(y^2 + z^2)]} \right\} \times \\ & \times \sqrt{x^2 - \beta^2(t^2 + z^2)} + \frac{2yz}{\pi} \left[\frac{r_b^2}{(y^2 + z^2)^2} + \frac{2}{r_b^2} \right] \operatorname{arch} \frac{x}{\beta \sqrt{t^2 + z^2}} + \\ & + \frac{r_b^2 z}{\pi(y^2 + z^2)} \left[\frac{s_1(\beta^2 y - k s_1)}{s_1^2 - \beta^2(y^2 + z^2)} + k - \frac{2s_1 y}{y^2 + z^2} \right] P_4(x, y, z), \quad s_2 = x - k r_b, \quad t = y - r_b \end{aligned}$$

$$P_1(x, t, z) = \arcsin \frac{\beta^2 t + kx}{\beta \sqrt{(x + kt)^2 - (\beta^2 - k^2)z^2}}, \quad P_2(x, t, z) = \arcsin \frac{\beta(t^2 + z^2) + xz}{(x + \beta z) \sqrt{t^2 + z^2}}$$

$$P_3(x, t, z, k) = \arcsin \frac{(x - \beta z)(\beta t + kz) - k\beta t^2}{(x - \beta z) \sqrt{(x - kt)^2 - (\beta^2 - k^2)z^2}}$$

$$P_4(x, y, z) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\beta^2(y^2 + z^2) - s_1^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x^2 - \beta^2(t^2 + z^2) - (\beta^2 t - kx)r_b}{\beta r_b \sqrt{(x - kt)^2 - (\beta^2 - k^2)z^2}} \right], & s_1^2 - \beta^2(y^2 + z^2) \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{s_1^2 - \beta^2(y^2 + z^2)}} \ln \frac{x^2 - \beta^2(t^2 + z^2) - (\beta^2 t - kx)r_b + \sqrt{[x^2 - \beta^2(t^2 + z^2)][s_1^2 - \beta^2(y^2 + z^2)]}}{\beta r_b \sqrt{(x - kt)^2 - (\beta^2 - k^2)z^2}}, & s_1^2 - \beta^2(y^2 + z^2) > 0 \end{cases}$$

Используя (2.10), найдем нормальную компоненту скорости, индуцируемой крылом на поверхности корпуса:

$$R(x, \theta) = (\partial \varphi_{w1} / \partial y)_{r=r_b} \cos \theta + (\partial \varphi_{w1} / \partial z)_{r=r_b} \sin \theta$$

При данном выборе подфюзеляжной части крыла нормальная компонента скорости $R(x, \theta)$, а также ее производные $\partial^n R / \partial x^n$ обращаются в нуль в точке пересечения передней кромки крыла с поверхностью корпуса.

Поскольку кромки крыла сверхзвуковые, представим функцию $R(x, \theta)$, входящую в правую часть граничного условия (2.4), на отрезке $0 \leq \theta \leq \pi$ в виде ряда Фурье по косинусам, в котором вследствие симметрии функции $R(x, \theta)$ относительно плоскости $\theta = \pi/2$ присутствуют лишь члены с четными значениями аргумента:

$$R(x, \theta) = \frac{a_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}(x) \cos 2n\theta,$$

(2.11)

$$a_{2n} = \frac{4}{\pi} (-1)^n \int_0^{\pi/2} R \left(x, \frac{\pi}{2} + \omega \right) \cos 2n\omega \, d\omega, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Учитывая далее, что каждый член суммы (2.5) должен удовлетворять волновому уравнению (2.1), получим, что функция $g(x, r, \theta)$ представляет собой потенциал возмущений от системы мультиполей с интенсивностями g_{2n} , распределенных вдоль оси симметрии корпуса и начинающихся

в точке M (фиг. 2)

$$(2.12) \quad g = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{2n} r^{2n} \cos 2n\theta$$

где

$$Q_{2n} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{2n} Q, \quad Q = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{v-\beta r} \frac{g_{2n}(\xi) d\xi}{\sqrt{(v-\xi)^2 - \beta^2 r^2}}, \quad v = x + \beta r_b$$

Рассмотрим случай, когда отношение радиуса корпуса к длине бортовой хорды крыла b мало по сравнению с единицей. Обозначим это отношение через ε , не делая каких-либо предположений о соотношении между параметром ε и углом атаки α .

Тогда, проводя разложение ряда (2.12) при малых r в области, расположенной вблизи поверхности корпуса, и дифференцируя затем по r , получим

$$(2.13) \quad \frac{\partial g}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{g_0(x)}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 g_{2n}(x)}{r^{2n+1}} \cos 2n\theta \right]$$

Удовлетворим условию непротекания газа через поверхность корпуса. После подстановки рядов (2.11) и (2.13) в (2.4), найдем выражения для неизвестных функций g_{2n} :

$$(2.14) \quad g_0(x) = -4r_b \int_0^{\pi/2} R\left(x, \frac{\pi}{2} + \omega\right) d\omega,$$

$$g_{2n}(x) = \frac{2(-1)^{n+1} r_b^{2n+1}}{n^2} \int_0^{\pi/2} R\left(x, \frac{\pi}{2} + \omega\right) \cos 2n\omega d\omega, \quad n=1, 2, \dots$$

Из (2.14) следует, что величины интенсивностей мультиполей g_{2n} порядка $O(\alpha \varepsilon^{2n+1})$, поскольку нормальная компонента скорости $R(x, \theta)$, индуцируемая на корпусе системой источников, расположенных в плоскости крыла, есть величина первого порядка малости.

Как и в задаче об обтекании изолированного крыла [6, 7], разложение (1.7) не является равномерно пригодным во всей возмущенной области течения. Из формул (2.10) видно, что градиенты возмущенных скоростей в первом приближении стремятся к бесконечности на конусе Маха, выходящем из точки пересечения передней кромки крыла с поверхностью корпуса.

Для построения равномерно точного решения применим метод перенормировки [8], согласно которому формально вычисленный ряд по малому параметру перестраивается затем в новых независимых переменных, уточняющих границы области существования приближенного решения.

3. Общий вид сингулярного члена и построение решения в области неравномерности. Рассмотрим асимптотическое представление приближенного решения вблизи поверхности, ограничивающей область взаимного влияния корпуса и крыла и выходящей из точки пересечения передней кромки крыла с поверхностью корпуса. В случае сверхзвуковых передних кромок крыла такой границей является на верхней поверхности скачок уплотнения, а на нижней — характеристическая поверхность возмущенного течения. Область, расположенную справа от указанной границы,

назовем внешней, а слева от нее — внутренней. Приближенные решения f_i в этих областях обозначим соответственно внешним f_i^e и внутренним f_i^i решениями.

В линейной теории граница внутренней области течения совпадает с характеристическим конусом Маха с вершиной в точке A (фиг. 2), который в переменных s, ρ, ϑ , вводимых по формулам

$$s=x, \rho=\beta\sqrt{t^2+z^2}/x, \vartheta=\text{arctg } z/t$$

описывается уравнением $\rho=1$.

Рассмотрим окрестность конуса Маха, в которой разность $\delta=1-\rho$ мала по сравнению с единицей. Проводя разложение решения (2.12) при малых δ и учитывая, что интенсивности мультиполей и их производные $\partial^n g_{2n}/\partial \xi^n$ в точке M равны нулю, найдем, что первый член асимптотического представления потенциала возмущений от системы мультиполей вблизи поверхности $\rho=1$ имеет вид

$$g(s, \rho, \vartheta) = sh\delta^{3/2} + O(\alpha\epsilon^3\delta^{3/2}, \alpha\epsilon\delta^{5/2})$$

где величина h имеет порядок $O(\alpha\epsilon)$. Аналогичным путем получим, что добавочный потенциал φ_{w1} с внутренней стороны характеристического конуса $\rho=1$ определяется выражением

$$\varphi_{w1}^i(s, \rho, \vartheta) = \varphi_{w1}^e(s, \rho, \vartheta) + \frac{4}{3} sA(\vartheta)\delta^{3/2} + O(\alpha\delta^{5/2}),$$

$$A(\vartheta) = \frac{\sqrt{2}k(\tau_0 - 2\alpha)}{\pi(\beta^2 \cos^2 \vartheta - k^2)}$$

где $\tau_0 = \tau(0, r_b)$ есть тангенс угла наклона поверхности крыла к оси s в точке A .

Таким образом, в первом приближении асимптотическое разложение внутреннего решения вблизи поверхности $\rho=1$ представляется в виде суммы

$$f_1^i(s, \rho, \vartheta) = f_1^e(s, \rho, \vartheta) + p$$

первый член которой, равный $\varphi_{w1}^e(s, \rho, \vartheta)$, является неособым и определяется путем решения задачи во внешней области, а сингулярный член в конических переменных имеет общий вид

$$p(s, \rho, \vartheta) = \frac{4}{3} sA(\vartheta)\delta^{3/2} + O(\alpha\epsilon\delta^{3/2}, \alpha\delta^{5/2})$$

Перейдем к анализу решения во втором приближении. Уравнение для добавочного потенциала f_2 с помощью подстановки $f_2 = \psi_2 + M^2 f_{1xx}$ приводится к виду

$$(3.1) \quad \beta^2 \psi_{2xx} - \psi_{2yy} - \psi_{2zz} = -M^4 (\kappa + 1) f_{1x} f_{1xx} - 2M^2 \alpha f_{1xx}$$

Записывая уравнение (3.1) в конических переменных вблизи поверхности $\rho=1$ и отыскивая особую часть внутреннего решения в виде разложения по степеням $\sqrt{\delta}$, окончательно получим

$$\psi_2^i(s, \rho, \vartheta) = \psi_2^e(s, \rho, \vartheta) + b_1 \sqrt{\delta} + b_1 \delta + O(\alpha^2 \delta^{3/2})$$

$$b_1(s, \vartheta) = -\frac{M^4 (\kappa + 1)}{\beta^2} A(\vartheta) \int_0^{\xi} \frac{\partial \varphi_{w1}^e}{\partial x}(\xi, 1, \vartheta) d\xi,$$

$$b_2(s, \vartheta) = - \frac{2M^4(\kappa+1)A^2(\vartheta)s}{\beta^2}$$

Для построения решения, регулярного в рассматриваемой области течения, запишем разложение (1.7) в новых независимых переменных

$$f = F_1(s, R, \vartheta) + F_2(s, R, \vartheta) + \dots$$

наложив на преобразование координат

$$\rho = R + \rho_1(s, R, \vartheta) + \rho_2(s, R, \vartheta) + \dots$$

требование совмещения в каждом приближении характеристической поверхности линейного уравнения в пространстве переменных s, R, ϑ и точной характеристической поверхности в физическом пространстве.

Функции F_1 и F_2 определяются формулами [8]

$$(3.2) \quad F_1(s, R, \vartheta) = f_1(s, \rho, \vartheta) \Big|_{\rho=R}$$

$$F_2(s, R, \vartheta) = f_2(s, \rho, \vartheta) \Big|_{\rho=R+\rho_1(s, R, \vartheta)} f_{10} \Big|_{\rho=R}$$

в которых функция ρ_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial s}(s\rho_1) = - \frac{M^4(\kappa+1)}{2\beta^2} \frac{\partial \varphi_{w1}^e}{\partial x} + M^2 \frac{\partial \varphi_{w1}^e}{\partial s} + \frac{M^2}{\beta} \alpha \sin \vartheta$$

Здесь $\rho = 1 + \rho_1(s, 1, \vartheta)$ есть уравнение характеристической поверхности возмущенного течения, рассчитанной с учетом величин первого порядка малости.

После вычисления второго приближения по формуле (3.2) получим, что решение $F_2^i(s, R, \vartheta)$ не является особым в физической области течения

$$(3.3) \quad F_2^i(s, R, \vartheta) = F_2^e(s, R, \vartheta) + b_2(1-R) + O[\alpha^2(1-R)^{3/2}]$$

Удовлетворим с помощью найденного решения граничному условию на скачке уплотнения, которое в данном случае имеет вид

$$(3.4) \quad \left[\frac{\partial F_1}{\partial R} \right] + \left[\frac{\partial F_2}{\partial R} \right] = \frac{4\beta^2 s}{(\kappa+1)M^4} \frac{\partial}{\partial s} [s(\rho_w - \rho_c)]$$

где $\rho_w(s, \vartheta) = \rho_c + \gamma(s, \vartheta)$ — уравнение скачка уплотнения, $\rho_c(s, \vartheta) = 1 + \rho_1(s, 1, \vartheta) + \rho_2(s, 1, \vartheta)$ — координата вычисленной во втором приближении характеристической поверхности, соответствующей параметрам потока перед скачком уплотнения.

В зависимости от знака вертикального скоса потока, индуцируемого крылом в точке пересечения его передней кромки с поверхностью корпуса, уравнение (3.4), которое служит для определения функции $\gamma(s, \vartheta)$, имеет два решения, соответствующие двум физически возможным типам течений в окрестности границы области взаимного влияния корпуса и крыла.

При $A(\vartheta) < 0$, что соответствует обтеканию верхней поверхности крыла, реализуется течение сжатия, в котором происходит скачкообразное изменение давления на величину

$$(3.5) \quad [c_p] = 6M^4(\kappa+1)\beta^{-2}A^2(\vartheta)$$

а положение поверхности сильного разрыва определяется уравнением

$$\rho_w(s, \vartheta) = \rho_c(s, \vartheta) + \frac{3}{4} \frac{(\kappa+1)^2 M^8}{\beta^4} A^2(\vartheta)$$

Отношение величины скачка давления (3.5), которую обозначим через $[c_p]_{w+b}$, к соответствующему значению $[c_p]_w$ для изолированного треугольного крыла, получающегося при стремлении радиуса корпуса к нулю, равно

$$(3.6) \quad \frac{[c_p]_{w+b}}{[c_p]_w} = \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha - \tau_0}\right)^2$$

Таким образом, интенсивность скачка уплотнения, формирующегося в центральной области течения на верхней поверхности крыла, в присутствии корпуса больше, чем в случае обтекания изолированного крыла, что очевидно и из физических соображений, так как наличие корпуса приводит к увеличению местного угла атаки в точке пересечения передней кромки крыла с поверхностью корпуса. Для плоского крыла, например, скачок давления $[c_p]_{w+b}$ в 4 раза превышает соответствующее значение для изолированного крыла, так как интенсивность сверхзвукового источника в точке A в присутствии корпуса удваивается.

При $A(\vartheta) > 0$, когда рассматривается течение на нижней поверхности крыла, $\gamma(s, \vartheta) = 0$. Вблизи границы внутренней и внешней областей, совпадающей с характеристической поверхностью $\rho = \rho_c(s, \vartheta)$, имеет место течение расширения, в котором величины возмущенных скоростей изменяются непрерывным образом и имеют следующий вид:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_{w1}^e}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{w2}^e}{\partial x} + 2A(\vartheta)q \\ \frac{\partial \varphi^i}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi_{w1}^e}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_{w2}^e}{\partial y} - \frac{2\alpha r_b^2 yz}{(y^2 + z^2)^2} - 2A(\vartheta)\beta \cos \vartheta q \\ \frac{\partial \varphi^i}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi_{w1}^e}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_{w2}^e}{\partial z} - \frac{\alpha r_b^2 (z^2 - y^2)}{(y^2 + z^2)^2} - 2A(\vartheta)\beta \sin \vartheta q \\ q(s, \rho, \vartheta) &= \sqrt{\rho_c(s, \vartheta) - \rho + \frac{(\kappa + 1)^2 M^8}{\beta^4} A^2(\vartheta) - \frac{(\kappa + 1) M^4}{\beta^2} A(\vartheta)} \\ y &= \frac{s\rho \cos \vartheta}{\beta} + r_b, \quad z = \frac{s\rho \sin \vartheta}{\beta} \end{aligned}$$

В правые части соотношений (3.7) входят значения добавочных скоростей, индуцируемых крылом в потоке, возмущенном передней частью корпуса. Величины этих скоростей определяются с помощью формального разложения внешнего решения в ряд по малому параметру и в первом приближении имеют вид (2.8), а во втором — вычисляются после решения линейного неоднородного уравнения (3.1) во внешней области течения.

4. Определение второго приближения во внешней области и результаты расчетов. Граничными условиями для уравнения (3.1) во внешней области являются условие равенства нулю добавочного потенциала $f_2 = \varphi_{w2}(x, y, z)$ на характеристической поверхности, огибающей конуса Маха, выходящие из передней кромки крыла, и условие непротекания газа через поверхность крыла, которое во втором приближении имеет вид

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi_{w2}}{\partial z}\right)_{z=0} &= -M^2 \left(\frac{\partial \varphi_{w1}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{w1}}{\partial z} + \varphi_{w1} \frac{\partial \varphi_{w1}}{\partial x \partial z}\right)_{z=0} + \\ &+ \tau \left(\frac{\partial \varphi_{w1}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_b}{\partial x}\right)_{z=0} + \frac{\partial z_w}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi_{w1}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_b}{\partial y}\right)_{z=0} \end{aligned}$$

С помощью метода Вольтерра решение уравнения (3.1) представим в виде

$$(4.2) \quad \psi_{w2}(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \iint_{\Sigma} V_1 \left(\frac{\partial \psi_{w2}}{\partial z} \right)_{z=0} d\xi d\eta - \\ - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\iiint_{\omega_1} V_1 F(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta + \iiint_{\omega_2} V_2 F(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \right)$$

где $V_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ — функция Вольтерра, $V_2 = V_1(x, y, -z, \xi, \eta, \zeta)$, $F(x, y, z)$ — правая часть уравнения (3.1), ω_1 — объем, ограниченный волновой поверхностью, выходящей из передней кромки крыла, обратным конусом влияния с вершиной в точке (x, y, z) и плоскостью $z=0$, ω_2 — часть объема, отсекаемая от ω_1 обратным конусом влияния, выходящим из точки $(x, y, -z)$.

Оценим величины интегралов, стоящих в правой части (4.2). Добавочный потенциал φ_{w1} во внешней области возмущенного течения можно представить в виде суммы

$$\varphi_{w1}(\xi, \eta, \zeta) = \varphi_1^w(\xi, \eta, \zeta) + \alpha \frac{r_b^2}{\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}} B(\xi, \eta, \zeta)$$

Здесь второе слагаемое обусловлено наличием корпуса и имеет величину порядка $O(\alpha \varepsilon^2 / \mu)$, где $\mu = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2} / b$.

С учетом этого для величин, входящих в подынтегральные выражения равенства (4.2), получим следующие оценки:

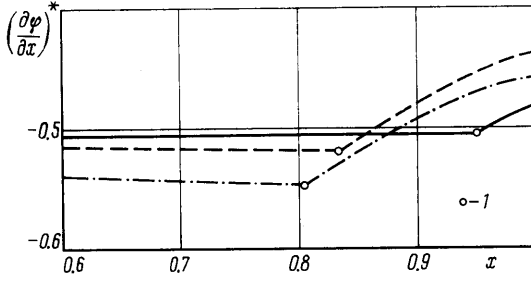
$$\left(\frac{\partial \psi_{w2}}{\partial z} \right)_{z=0} = \left(\frac{\partial \psi_2^w}{\partial z} \right)_{z=0} + O(\alpha^2 \varepsilon^2 / \mu^2, \alpha^2 \varepsilon^4 / \mu^4) \\ V_1 = O(1), \quad V_2 = O(1) \\ F(\xi, \eta, \zeta) = F^w(\xi, \eta, \zeta) + O(\alpha^2 \varepsilon^2 / \mu^3, \alpha^2 \varepsilon^4 / \mu^5)$$

где функции $(\partial \psi_2^w / \partial z)_{z=0}$ и $F^w(x, y, z)$ представляют собой правые части (4.1) и (3.1) соответственно, в которые вместо φ_{w1} подставлен добавочный потенциал $\varphi_1^w(x, y, z)$.

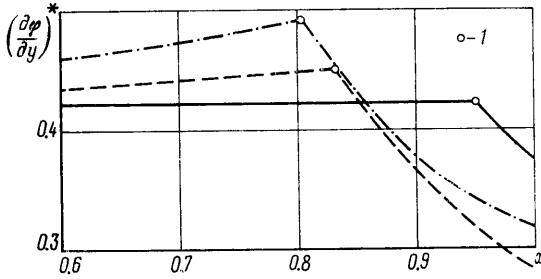
Если далее учесть, что на тех участках интегрирования, где переменная $\mu = O(\varepsilon)$, величины соответствующих площадей и объемов имеют порядки, равные $O(\varepsilon^2)$ и $O(\varepsilon^3)$, то для внешнего решения задачи во втором приближении окончательно получим

$$(4.3) \quad \varphi_{w2}(x, y, z) = \varphi_2^w(x, y, z) + O(\alpha^2 \varepsilon) \\ \varphi_2^w(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \iint_{\Sigma} V_1 \left(\frac{\partial \psi_2^w}{\partial z} \right)_{z=0} d\xi d\eta + M^2 \varphi_1^w \frac{\partial \varphi_1^w}{\partial x} - \\ (4.4) \quad - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\iiint_{\omega_1} V_1 F^w d\xi d\eta d\zeta + \iiint_{\omega_2} V_2 F^w d\xi d\eta d\zeta \right)$$

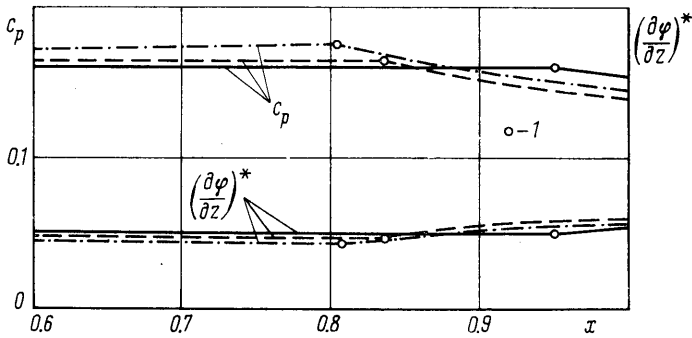
Из равенства (4.3) следует, что расчет добавочных скоростей, индуцируемых комбинацией крыло — корпус во внешней области течения, во втором приближении сводится к задаче об определении поля скоростей возмущений, создаваемых изолированным крылом в невозмущенном потоке. Решение этой задачи выражается через интегралы (2.9) и (4.4), которые вычисляются по заданному распределению местных углов наклона



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

поверхности крыла к вектору скорости набегающего потока. Во внутренней области течения значения добавочных скоростей определяются по равномерно точному решению (3.2) и в случае течения расширения на границе внутренней и внешней областей рассчитываются с помощью асимптотических разложений (3.7).

Результаты расчетов местных скосов потока под крылом в зависимости от отношения радиуса корпуса к длине бортовой хорды крыла представлены на фиг. 3—5. Координаты x и z отнесены к b , а координата y — к l (фиг. 2). Коэффициент давления c_p , приведенный на фиг. 5, вычислялся с точностью до величин второго порядка малости включительно.

Расчеты проводились для плоского крыла при числе $M=2.3$, $\alpha=8^\circ$, $\chi=40^\circ$, $y=0.5$, $z=0.05$. Сплошной линией нанесены результаты, соответствующие случаю обтекания изолированного крыла, а пунктиром и штрихпунктиром — данные расчета для комбинации крыло — корпус при $\epsilon=0.1$ и 0.2 соответственно.

Наличие корпуса приводит к изменению поведения местных скосов потока во внешней области течения и к расширению центральной области возмущений, граница которой обозначена точками 1. Если в поле скоростей возмущений, создаваемых изолированным крылом, скосы потока во внешней области течения постоянны, то при наличии корпуса наблюдается некоторое увеличение абсолютных значений возмущенных скоростей по мере движения от скачка уплотнения, присоединенного к передней кромке крыла, к характеристической поверхности с вершиной в точке A , после прохождения которой происходит резкое падение добавочных скоростей в зоне расширения сверхзвукового потока. Увеличение радиуса корпуса при неизменных геометрических параметрах крыла сопровождается ростом абсолютных величин продольной и боковой составляющих возмущенной скорости, в то время как вертикальный скос потока меняется незначительно. Максимальное приращение бокового скоса потока имеет место вблизи границы внутренней и внешней областей и при $\epsilon=0.2$ составляет примерно 16% от величины бокового скоса, индуцируемого изолированным крылом в той же точке.

В заключение автор выражает благодарность М. Ф. Притуло за обсуждение результатов работы.

Поступила 16 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Аэродинамика частей самолета при больших скоростях. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
2. Ferrari C. Interference between wing and body at supersonic speeds. Theory and numerical application. J. Aero Sci., 1948, vol. 15, No. 6.
3. Morikawa G. K. A non-planar boundary problem for the wave equation. Quart. Appl. Math., 1952, vol. 10, No 2.
4. Woodward F. A., Tinoco E. N., Larsen J. W. Analysis and design of supersonic wing-body combinations including flow properties in the near flow field. Pt 1. Theory and applications. NASA, CR, 1967, No. 73106.
5. Коринский С. А., Кусакин С. И., Притуло М. Ф. Метод равномерно точных рядов в решении задач обтекания крыла и крыла с корпусом сверхзвуковым потоком газа. Тр. ЦАГИ, 1976, вып. 1788.
6. Кусакин С. И., Притуло М. Ф. Метод деформированных координат в задаче обтекания крыла сверхзвуковым потоком газа. В сб.: Аэромеханика, М., «Наука», 1976.
7. Кусакин С. И. Расчет поля скоростей вблизи крыла со сверхзвуковыми передними кромками в теории малых возмущений. Тр. ЦАГИ, 1979, вып. 1991.
8. Притуло М. Ф. Об определении равномерно точных решений дифференциальных уравнений методом возмущения координат. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3.