

К ОЦЕНКЕ ВЛИЯНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ВЫРЕЗОВ
НА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ КРЫЛА
КОНЕЧНОГО РАЗМАХА ПРИ СТАЦИОНАРНОМ
И НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ВБЛИЗИ СТЕНКИ

К. В. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ

(Ленинград)

Методом сращиваемых асимптотических разложений строится приближенное решение задачи о влиянии поперечных вырезов малой ширины на гидродинамические коэффициенты тонкого прямоугольного крыла, движущегося вблизи стенки. Течение в окрестности выреза описывается локальным асимптотическим решением, удовлетворяющим условию непрерывности давления на передней кромке выреза и сращиваемым с основным решением. Приведены результаты расчетов, иллюстрирующие влияние выреза на гидродинамические характеристики крыла при различных числах Струхала и удлинениях.

На основе асимптотической теории [1, 2] рассмотрим влияние расположенного вдоль всего размаха крыла единичного поперечного выреза малой ширины $\delta = \delta_0 h$, $\delta_0 = O(1)$ на гидродинамические характеристики бесконечно тонкого прямоугольного в плане крыла удлинения λ , движущегося на весьма малых относительных расстояниях ($h \ll 1$) от стенки в вязкой несжимаемой жидкости. Систему координат свяжем с крылом, причем оси x и z расположим в плоскости стенки, ось x направим по скорости движения U_0 , а ось y направим вверх через заднюю кромку корневой хорды. Пусть l — расстояние оси выреза от задней кромки крыла; $y_*(x) = h + \epsilon f(x)$ — уравнение поверхности крыла относительно стенки; ϵ — параметр, характеризующий возмущение (например, угол атаки, кривизна и т. д.); $\varphi_* = \epsilon \varphi$ — соответствующий потенциал вызванных скоростей. Все величины приведены к безразмерному виду по хорде крыла и скорости движения.

Задача состоит в определении потенциала скорости потока с помощью метода сращиваемых разложений, а затем поля давлений и гидродинамических коэффициентов.

В соответствии с методом сращиваемых разложений произведем построение разномасштабных асимптотических разложений единичного потенциала φ в различных частях потока: над крылом и вихревой пеленой и частью стенки вне тени крыла-пелены (зона D_u , $\varphi = \varphi_u$), под крылом-пеленой (зона D_l , $\varphi = \varphi_l$), вблизи кромок (зона D_e , $\varphi = \varphi_e$) и вблизи выреза (зона D_v , $\varphi = \varphi_v$). Единственность решения достигается путем гладкого сращивания полученных асимптотических разложений в областях общей пригодности. Подобное решение для случая крыла без выреза дано в [1].

Для учета влияния выреза на гидродинамические характеристики крыла необходимо рассмотреть локальное течение вблизи выреза, найти асимптотическое выражение для потенциала этого течения, а затем «срастить» его с основным течением.

При этом в соответствии с линейной по возмущениям теорией предполагается, что вихревая пелена, сходящая с передней кромки выреза,

остается в плоскости крыла. Вне области пересечения выреза с боковыми кромками крыла локальное течение будем рассматривать как двумерное в плоскостях $z = \text{const}$, перпендикулярных оси выреза.

Вблизи выреза (зона D_δ) введем местные растянутые координаты $y_1 = y/h$, $x_1 = x_\delta/h = (x-l)/h$, $z_1 = z$. При этом растянутая область течения примет вид, показанный на фиг. 1. Точки A, B, C, D на фиг. 1 ограничивают контуры крыла и выреза. Штрихом и двумя штрихами обозначены аналогичные точки на нижней поверхности крыла и поверхности экрана соответственно. В комплексной плоскости $Y = x_1 + iy_1$ комплексный потенциал течения вблизи выреза $F_\delta = \varphi_\delta + i\psi$ и комплексно-сопряженная скорость $w_\delta = dF_\delta/dY = u_\delta - iv_\delta$ есть аналитические функции, удовлетворяющие следующим граничным условиям.

На стенке ($y_1 = 0_+$)

а) $\text{Im } E_\delta = \psi_\delta = 0$ б) $\text{Im } w_\delta = -v_\delta = 0$

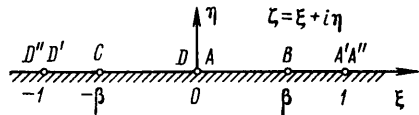
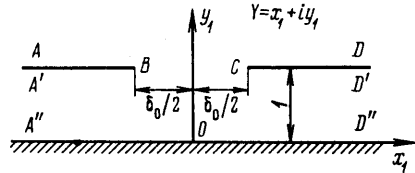
На крыле за вырезом ($y_1 = 1, x_1 < -\delta_0/2$)

а) $\text{Im } F_\delta = \psi_\delta = 1$ б) $\text{Im } w_\delta = -v_\delta = h\alpha_*(l_-, z, t)$

на крыле перед вырезом ($y_1 = 1_+, x_1 = \delta_0/2$)

а) $\text{Im } F_\delta = \psi_\delta = \kappa$ б) $\text{Im } w_\delta = -v_\delta = h\alpha_*(l_+, z, t)$

Здесь κ — неизвестная пока постоянная, связанная с расходом жидкости, протекающей через вырез; $\alpha_* = \partial f / \partial x - \partial f / \partial t$ — единичный снос потока на крыле вблизи передней $\alpha_*(l_+, z, t)$ и задней $\alpha_*(l_-, z, t)$ кромок выреза. Индексы «+» соответствуют точкам на верхней поверхности крыла или экрана, «-» соответствуют точкам на нижней поверхности крыла.



Фиг. 1

Общее решение для потенциала вызванных скоростей течения в окрестности выреза находим как линейную комбинацию частных решений, соответствующих условиям а) и б) с учетом процедуры срачивания.

Для получения этих решений преобразуем область течения вблизи выреза на верхнюю полуплоскость вспомогательной плоскости ζ . Соответствие точек показано на фиг. 1. Отображение найдено с помощью интеграла Кристоффеля — Шварца в виде

$$Y = i - \frac{2}{\pi(1-\beta^2)} \left[\frac{\beta^2}{\zeta} + \frac{1}{2} (1-\beta^2) \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right]$$

где параметр β связан с шириной выреза соотношением

$$\delta_0 = \frac{\delta}{h} = \frac{4}{\pi(1-\beta^2)} \left[\beta^2 + \frac{1}{2} (1-\beta^2) \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \right]$$

Попутно отметим, что при достаточно малых δ_0 ($\delta_0 < 0.5$) можно принять $\beta = \pi\delta_0/8$.

Решение задачи при условии а), которое, как нетрудно проверить, не нарушает условия непротекания в точках крыла, найдено в виде

$$F_{\delta 0} = \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{\zeta-1}{\zeta} + \kappa \ln \frac{\zeta}{\zeta+1} \right)$$

Потенциал скоростей на поверхности крыла вблизи выреза дается выражением

$$(1) \quad \varphi_{a0} = \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{1-\xi}{\xi} + \kappa \ln \frac{\xi}{1+\xi} \right)$$

Решение задачи при условии б) найдено с помощью интеграла для полуплоскости, дающего аналитическую функцию по ее мнимой части [3]

$$(2) \quad w_{b0} = u_{b0} - i v_{b0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } w_{b0}}{\zeta_1 - \zeta} d\zeta_1 + C = \\ = \frac{h}{\pi} \left[\alpha_s(l_-) \ln \frac{\zeta-1}{\zeta} + \alpha_s(l_+) \ln \frac{\zeta}{\zeta+1} \right] + C$$

Опуская действительную постоянную C и выделяя действительную часть выражения (2), имеем в точках крыла вблизи выреза

$$u_{b0} = \frac{h}{\pi} \left[\alpha_s(l_-) \ln \frac{1-\xi}{\xi} + \alpha_s(l_+) \ln \frac{\xi}{1-\xi} \right], \quad \varphi_{b0} = \int_0^{x_1} u_{b0} dx_1$$

Общее выражение для потенциала вызванных скоростей течения в окрестности выреза (зона D_0) запишем в виде

$$\varphi_0 = l_1 \varphi_{a0} + l_2 \varphi_{b0} + l_3 h x_1 + l_4$$

где параметры l_i должны определяться с помощью процедуры сращивания, причем l_3 и l_4 принимают сверху ($y_1=1_+$) и снизу ($y_1=1_-$) разные значения $l_3^+ \neq l_3^-$ и $l_4^+ \neq l_4^-$.

Константа κ , входящая в (1), найдена из условия ограниченности скорости на передней кромке выреза (точка C на фиг. 1) в виде $\kappa = (1-\beta)/(1+\beta)$. Можно показать, что при таком выборе величины κ скорость на задней кромке выреза (точка B на фиг. 1) имеет особенность типа $s^{-1/2}$ (где s — расстояние точки, в которой вычисляется скорость, от задней кромки выреза). Выпишем необходимые для сращивания с основным решением асимптотические представления потенциала скоростей φ_0 вдали от выреза ($x_1 \rightarrow \pm\infty$).

Вдали от выреза на верхней стороне крыла

$$(3) \quad \varphi_0 \approx \frac{2\beta l_1}{\pi(1+\beta)} \ln \frac{\pi(1-\beta^2)x_1}{2\beta^2} + \\ + \frac{\Delta\alpha_s}{\pi} h x_1 \left[\ln \frac{\pi(1-\beta^2)x_1}{2\beta^2} - 1 \right] + l_3^+ x_1 h + l_4^+ \\ \Delta\alpha_s = \alpha_s(l_-) - \alpha_s(l_+)$$

Вдали от выреза на нижней стороне крыла $y_1=1_-$ перед вырезом и за ним имеем соответственно

$$(4) \quad \varphi_0 \approx l_1 \left[x_1 \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right) + \frac{2\beta}{\pi(1+\beta)} \left(\ln 2 - \frac{\beta}{1+\beta} \right) \right] + \frac{h}{\pi} \left\{ \frac{\pi\alpha_s(l_+)x_1^2}{2} + \right. \\ \left. + x_1 \left[\Delta\alpha_s \ln 2 - \alpha_s(l_+) \frac{2\beta^2}{1-\beta^2} \right] \right\} + l_3^- h x_1 + l_4^- \quad x_1 \rightarrow +\infty, \quad y_1=1_+$$

$$(5) \quad \varphi_0 \approx l_1 \left[x_1 + \frac{2\beta}{\pi(1+\beta)} \left(\ln 2 + \frac{\beta}{1-\beta} \right) \right] + \frac{h}{\pi} \left\{ \frac{\pi\alpha_s(l_-)x_1^2}{2} + \right.$$

$$+ x_1 \left[\Delta \alpha_s \ln 2 + \alpha_s (l_-) \frac{2\beta^2}{1-\beta^2} \right] \} + l_3^- h x_1 + l_4^-$$

Далее необходимо построить потенциалы течений в зонах D_u , D_l и D_e . Ниже для краткости отметим лишь изменения, которые нужно внести в алгоритм получения этих потенциалов, подробно изложенный в [1].

Потенциал φ_u потока над крылом-пеленой (зона D_u) дается распределением по тени крыла-пелены слоя источников-стоков с учетом собственных решений на кромках и на оси выреза. Выражение (26) работы [1] для φ_u в рассматриваемом случае должно быть дополнено слагаемым

$$(6) \quad -\frac{1}{4\pi} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \frac{q_\delta(z_0, t)}{r} dz_0, \quad r = \sqrt{(x-l)^2 + (z-z_0)^2}$$

которое представляет собой потенциал линейного распределения источников с мощностью q_δ , моделирует истечение жидкости из под крыла через вырез и удовлетворяет условию срациваемости с решением Φ .

С учетом (6) асимптотическое представление потенциала φ_u потока над крылом-пеленой вблизи выреза найдено в виде

$$(7) \quad \varphi_u_{x \rightarrow l_\pm} \simeq \frac{q_\delta(z, t)}{2\pi} \ln x_\delta + \Delta \alpha_s \frac{x_\delta \ln x_\delta}{\pi} + \frac{L_1}{\pi} x_\delta + \frac{L_2}{\pi} + O(x_\delta^2)$$

Здесь величины L_1 и L_2 характеризуют влияние источников-стоков, удаленных от рассматриваемой точки линии $x=l$, выражения для них в силу громоздкости здесь не приводятся.

Потенциал φ_l потока под крылом-пеленой (зона D_l), как и в [1], ищется в виде разложения

$$\varphi_l = \frac{1}{h} \Phi + O(h) \simeq \frac{1}{h} \left(\Phi_1 + h \ln \frac{1}{h} \Phi_2 + h \Phi_3 \right)$$

Функция Φ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$(8) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \alpha_s(x, z, t) \quad \left(1 \geq x \geq 0; |z| \leq \frac{\lambda}{2} \right)$$

Краевые условия для уравнения (8) на передней, боковых и задней кромках даются формулами (35) и (44) работы [1], с той лишь разницей, что при определении входящих в эти формулы величин A_2 , B_1 и B_2 учитываются вклады в φ_u от дополнительного слагаемого (6).

Специфика получения потенциала потока под крылом в рассматриваемом случае крыла с вырезом заключается в том, что значения потенциала φ_l и соответствующих давлений p_l , вообще говоря, различны при подходе к линии $x=l$, $|z| \leq \lambda/2$ слева ($x \rightarrow l_-$) и справа ($x \rightarrow l_+$). Физически это обусловлено уносом массы и завихренности на верхнюю сторону крыла через вырез. Представление выражений (4) и (5) в зависимости от переменной $x_\delta = h x_1$ позволяет найти асимптотическую структуру параметра l_1 при стремлении x_δ к 0_+ и 0_- :

$$l_1 = l_{11} + l_{12} h \ln h^{-1} + h l_{13} + O(h^2)$$

а также характеристики потока под крылом в окрестности точки $x=l_\pm$

$$\Phi(l_+) = \Phi(l_-) - \frac{4\beta^2 h l_{11}}{\pi(1+\beta)(1-\beta^2)}$$

$$(9) \quad p_i(l_+) = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right) p(l_-) + \frac{4\beta}{\pi(1+\beta)} \left\{ l_3^- - \frac{\partial l_4^-}{\partial t} + \right. \\ \left. + \frac{2\beta}{1+\beta} (1-\ln 2) \frac{\partial l_{11}}{\partial t} + \Delta\alpha_s \ln 2 - \frac{\beta}{1-\beta} \left[\alpha_s(l_+) + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_s(l_-) \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \right] \right\}, \quad p_i = 2 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)$$

а также величину $l_{11} = \partial \Phi_1(l_-) / \partial x$.

Сравнение потенциалов φ_u и φ_s над вырезом осуществляется при сравнении выражений (3) и (7) в одних и тех же переменных (например, $x_1 = x_0/h$) и приводит к следующим результатам:

$$(10) \quad q_0 = \frac{4\beta l_{11}}{1+\beta}, \quad l_3^+ = \frac{1}{\pi} \left\{ L_1 - \Delta\alpha_s \left[\ln \frac{\pi(1-\beta^2)}{2\beta^2 h} - 1 \right] \right\}$$

$$(11) \quad l_4^+ = \frac{1}{\pi} \left[L_2 - \frac{2\beta l_{11}}{1+\beta} \ln \frac{\pi(1-\beta^2)}{2\beta^2 h} \right]$$

Наконец, применяя постулат Жуковского — Чаплыгина на передней кромке выреза (точка C) в виде условия непрерывности давления, можно получить

$$(12) \quad l_3^- + \partial l_4^- / \partial t = l_3^+ + \partial l_4^+ / \partial t$$

С учетом (10)–(12) соотношение (9) между $p_i(l_+)$ и $p_i(l_-)$ становится полностью известным. Решение в зоне D_e строится так же, как и в [1].

Коэффициенты подъемной силы c_y и момента m_z относительно задней кромки вычисляются по формулам

$$c_y = \frac{\varepsilon}{\lambda} \int_0^{\lambda/2} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} (p^- - p^+) dz dx, \quad m_z = \frac{\varepsilon}{\lambda} \int_0^{\lambda/2} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} (p^- - p^+) x dz dx$$

где индексы «-» и «+» соответствуют нижней и верхней сторонам крыла, $p = 2(\partial \varphi / \partial x - \partial \varphi / \partial t)$ — коэффициент давления, в котором выражение для φ есть равномерно пригодное представление потенциала, полученное аддитивным составлением [1] потенциалов φ_i , φ_e и φ_s на нижней ($\varphi = \varphi^-$) и верхней ($\varphi = \varphi^+$) сторонах крыла.

В первом приближении (предельно малые высоты полета) задача принимает достаточно простой вид

$$\varphi^- \simeq h^{-1} \Phi_1 + O(\ln h^{-1}), \quad \varphi^+ = O(1)$$

где Φ_1 удовлетворяет следующему уравнению и краевым условиям:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = \alpha_s(x, z, t) \quad \left(1 \geq x \geq 0; |z| \leq \frac{\lambda}{2} \right)$$

$$\Phi_1 = 0 \quad \text{при } x=1, \quad |z| \leq \lambda/2 \text{ и } 1 \geq x \geq 0, \quad z = \pm \lambda/2$$

$$\partial \Phi_1 / \partial x - \partial \Phi_1 / \partial t = 0 \quad \text{при } x=0, \quad |z| \leq \lambda/2.$$

Здесь $\Phi_1(l_+) = \Phi_1(l_-)$ и $p_i(l_+) = p_i(l_-) [(1-\beta)/(1+\beta)]$, $p_i = 2(\partial \Phi_1 / \partial x - \partial \Phi_1 / \partial t)$.

Рассмотрим некоторые примеры, соответствующие первому приближению.

1. Слабовогнутый тонкий профиль произвольной формы $y_s = h + \varepsilon f(x)$

$$c_y = \frac{2\varepsilon}{h} \left[\int_0^1 f(\xi) d\xi - \frac{2\beta f(l)}{1+\beta} (1-l) \right] \quad m_z = \frac{2\varepsilon}{h} \left[\int_0^1 \xi f(\xi) d\xi - \frac{\beta f(l)}{1+\beta} (1-l^2) \right]$$

Относительное влияние выреза на c_y и m_z будем характеризовать соответственно коэффициентами $\kappa_Y = c_y/c_{y_0}$ и $\kappa_M = m_z/m_{z_0}$ (где c_{y_0} и m_{z_0} — коэффициенты крыла при отсутствии выреза ($\delta=0, \beta=0$). Имеем

$$\kappa_Y = \frac{c_y}{c_{y_0}} \approx 1 - 2\beta f(l) (1-l) \left[(1+\beta) \int_0^1 f(\xi) d\xi \right]^{-1}$$

$$\kappa_M = \frac{m_z}{m_{z_0}} \approx 1 - \beta f(l) (1-l^2) \left[(1+\beta) \int_0^1 \xi f(\xi) d\xi \right]^{-1}$$

Нетрудно видеть, что при наличии выреза величины коэффициентов m_z и c_y уменьшаются, причем для профиля заданной формы $f(x)$ существует такое положение центра выреза l , при котором это уменьшение наиболее ощутимо. В частности, для плоской пластины ($f=x$) максимальное уменьшение величины κ_Y достигается при $l=0.5$, а для дужки $f=4x(1-x)$ — при $l=1/3$.

2. Плоская пластинка бесконечного удлинения, совершающая вертикальные колебания ($f=\sin kt, \varepsilon=h_0$ — амплитуда колебаний, k — число Струхала). Коэффициенты, характеризующие относительное влияние выреза на величины $c_y^{\dot{h}}$ и $c_y^{\ddot{h}}$ ($\dot{h} = kh_0 \sin kt, \ddot{h} = -k^2 h_0 \cos kt$), найдены в виде

$$(13) \quad \kappa_Y^{\dot{h}} = \frac{c_y^{\dot{h}}}{c_{y\delta=0}^{\dot{h}}} = 1 - \frac{2\beta l (1-l)}{(1+k^2 l^2)(1+0.5k^2)} \times \\ \times [c_1(1+k^2 l^2/2) + k^2 c_2(1-l+k^2 l^2/2)]$$

$$(14) \quad \kappa_Y^{\ddot{h}} = \frac{c_y^{\ddot{h}}}{c_{y\delta=0}^{\ddot{h}}} = 1 - \frac{6\beta l (1-l)}{(1+k^2 l^2)(1-0.5k^2)} [c_2(1+k^2 l^2/2) - c_1(1-l+k^2 l^2/2)]$$

$$c_1 = \frac{(2-k^2)a + k^2(1-k^2)b}{(1+\beta)(a^2+k^2 b^2)}, \quad c_2 = \frac{(1-k^2)a - (2-k^2)b}{(1+\beta)(a^2+k^2 b^2)}$$

$$a = 1 + \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \frac{k^2(1-l)}{1+k^2 l^2}, \quad b = (1-l) \left[\left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \frac{k^2 l^2}{1+k^2 l^2} - 1 \right]$$

$$\dot{h} = \partial h / \partial t, \quad \ddot{h} = \partial^2 h / \partial t^2$$

Некоторые результаты расчетов по формулам (13) и (14) при $\delta_0=0.3$ приведены на фиг. 2, где цифры 1-6 соответствуют значениям числа Струхала $k=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25$. В пределе $k \rightarrow 0$ из (13) и (14) следует

$$\kappa_Y^{\dot{h}} \approx 1 - 4\beta l(1-l)/(1+\beta), \quad \kappa_Y^{\ddot{h}} \approx 1 - 6\beta l(1-l)/(1+\beta)$$

3. Прямоугольная в плане пластинка удлинения λ

$$(15) \quad \kappa_Y = 1 - \frac{2\beta G_1}{(1+\beta)G_0}, \quad \kappa_M = 1 - \frac{2\beta R_1}{1+\beta R_0}$$

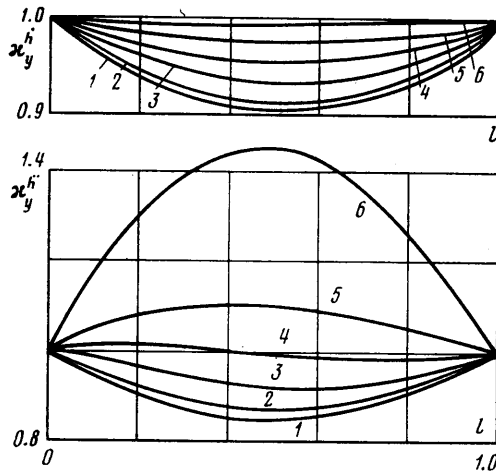
$$G_1 = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(l\beta) \operatorname{th}(gl), \quad G_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{th} q \operatorname{th} \left(\frac{q}{2} \right) / q^4$$

$$R_1 = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \left[\operatorname{th}(ql) + \operatorname{th} \frac{q(1-l)}{2} \right] \frac{\operatorname{sh}(ql)}{q},$$

$$R_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q^4} \left(\frac{\operatorname{th} q}{q} - 1 \right)$$

$$q = \frac{\pi}{\lambda} (2n+1), \quad g_n = \frac{\operatorname{th}[q(1-l)]}{q^4 \operatorname{ch} q [1 + (1-\beta) \operatorname{th}(ql) \operatorname{th}(1-l)/(1+\beta)]}$$

Результаты некоторых расчетов по формулам (15) при $l=0.5$ и $\delta_0=0.3$ приведены ниже и показывают, что с уменьшением удлинения влияния выреза на гидродина-



Фиг. 2

мические характеристики заметно ослабляется:

λ	1	2	3	4	5	∞
x_y	0.991	0.959	0.938	0.926	0.920	0.901
x_m	0.985	0.949	0.927	0.915	0.908	0.888

Поступила 7 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Рождественский К. В. Асимптотическая теория крыла, движущегося на малых расстояниях от твердой стенки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 6.
2. Рождественский К. В. Метод сращиваемых асимптотических разложений в гидродинамике крыла. Л., «Судостроение», 1979.
3. Фукс Б. А., Шабар Б. В. Функции комплексного переменного. М., Гостехиздат, 1949.
4. Widnall S., Barrows T. An analytic solution for a two and three dimensional wings in ground effect. J. Fluid. Mech., 1970, vol. 41.