МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1980

УДК 532.5

О ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ГИДРОЦИКЛОНЕ

Ю. В. МАРТЫНОВ

(Москва)

Проведено исследование течения в цилиндрическом гидроциклоне [1, 2] при умеренных числах Рейнольдса. Такой режим течения создается в гидроциклоне, например при сепарации сфокулированных твердых частиц. Расчет течения в гидроциклоне проведен в рамках теории невязкой несжимаемой жидкости, так как влияние турбулентных пульсаций на структуру потока в исследованном режиме течения (число Рейнольдса порядка нескольких тысяч) незначительно. Проведенное сопоставление полученных результатов с экспериментальными данными [3] свидетельствует о хорошем качественном соответствии.

Жидкость поступает в цилиндрический гидроциклон радиуса R° через впускное отверстие $\xi_3^\circ \leqslant \xi^\circ \leqslant R^\circ$ (ξ° – радиус), согласно схеме, изображенной на фиг. 1 (вследствие осевой симметрии представлена только половина сечения), а выходит через разгрузочное кольцевое отверстие $\xi_4^\circ \leqslant \xi^\circ \leqslant R^\circ$ и сливное кольцевое отверстие $\xi_1^\circ \leqslant \xi^\circ \leqslant \xi_2^\circ$. Согласно экспериментальным данным [3], на оси гидроциклона образуется воздушная полость постоянного радиуса, которую аппроксимируем цилиндром радиуса ξ_1°. Радиус воздушной цилиндрической полости будет определен позднее. Разрыв сплошности потока жидкости происходит из-за большой величины центробежной силы вблизи оси гидроциклона и выделения воздуха из воды в результате интенсивного вихреобразования [2].

Согласно [4, 5], уравнение для безразмерной функции тока осесимметричного вихревого течения невязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической системе координат и граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)+G(\psi)G'(\psi)+\xi^2F'(\psi)=0 \tag{1}$$

$$v_\xi=-\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\eta},\quad v_\eta=\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi},\quad v_\varphi\xi=G(\psi)$$

$$\psi(\eta,1)=Q/2\pi,\qquad \psi(\eta,\xi_1)=(Q-Q_1)/2\pi$$

$$\psi(0,\xi)=\Psi^\circ(\xi),\qquad \psi(\eta_1,\xi)=\Psi^1(\xi)$$

$$\Psi^\circ(\xi)=\begin{cases}\psi_2(\xi) & \xi_4\leqslant\xi\leqslant1\\ \dfrac{Q-Q_1}{2\pi} & \xi_1\leqslant\xi\leqslant\xi_4\end{cases},\quad \Psi^1(\xi)=\begin{cases}\psi_0(\xi) & \xi_3\leqslant\xi\leqslant1\\ 0 & \xi_1\leqslant\xi\leqslant\xi_3\\ \psi_1(\xi) & \xi_1\leqslant\xi\leqslant\xi_2\end{cases}$$

$$v_+=\frac{Q^\circ}{\pi(R^{\circ2}-\xi_3^{\circ2})};\quad p=\frac{p^\circ}{\rho V_+^2};\quad v_\lambda=\frac{v_\lambda^\circ}{V_+}\quad(\lambda=\varphi,\eta,\xi)$$

$$F(\psi)=F^\circ(\psi)/\rho V_+^2;\qquad G(\psi)=G^\circ(\psi)/R^\circ V_+$$

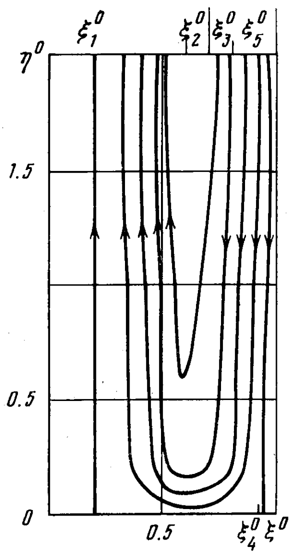
$$\psi=\psi^\circ/V_+R^{\circ2};\qquad \xi_i=\xi_i^\circ/R^\circ\qquad(i=1,\ldots,5)$$

Здесь v_ξ, v_η, v_φ — радиальная, осевая, азимутальная компоненты скорости соответственно, $F(\psi)$ — интеграл Бернулли, $G(\psi)$ — циркуляция, $\psi_0(\xi)$, $\psi_1(\xi)$, $\psi_2(\xi)$ — функции тока на входном, сливном и разгрузочном отверстиях соответственно, Q, Q_1 — расход жидкости через входное и разгрузочное отверстия соответственно.

При переходе к безразмерным переменным в качестве масштабов длины и скорости выбраны радиус гидроциклона R° и средняя скорость жидкости на выходе из впускного отверстия соответственно, индексом ноль везде обозначены размерные величины.

На граничные условия (1) наложены дополнительные ограничения — соотношения расхода жидкости. Кроме того, функция тока должна быть непрерывной функцией, так как скачок функции тока приводит к бесконечным скоростям в осевой плоскости

(2) $$\begin{aligned} &\psi_1(\xi_1)=\psi_2(\xi_4)=(Q-Q_1)/2\pi,\\ &\psi_0(\xi_3)=\psi_1(\xi_2)=0\\ &\psi_2(1)=\psi_0(1)=Q/2\pi\\ &\psi_0(1)-\psi_0(\xi_3)=\psi_2(1)-\\ &-\psi_2(\xi_4)+\psi_1(\xi_1)-\psi_2(\xi_2)\end{aligned}$$



Фиг. 1

Определим теперь радиус воздушного столба ξ_1. Учитывая, что интеграл Бернулли сохраняется вдоль линии тока и что давление жидкости на межфазной поверхности воздушного столба равно давлению газа p_1 в воздушной полости, получим уравнение

(3) $$p_0+\left[\left(\frac{1}{\xi_5}\frac{\partial\psi_0}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=\xi_5}\right)^2+\left(\frac{G(\psi_0(\xi_5))}{\xi_5}\right)^2\right]\bigg/2= =p_1+\left[\left(\frac{1}{\xi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=\xi_1}\right)^2+\left(\frac{G(\psi_1(\xi_1))}{\xi_1}\right)^2\right]\bigg/2$$

Здесь в правой части равенства выписана величина интеграла Бернулли на линии тока, проходящей по межфазной поверхности, т. е. величина $\psi=(Q-Q_1)/2\pi$, а в левой части — величина интеграла Бернулли на впускном отверстии в точке $\xi=\xi_5$, в которой функция тока равна $(Q-Q_1)/2\pi$, p_0 — давление на выходе из впускного патрубка, $\psi_0(\xi)$, $\psi_1(\xi)$ — распределение функции тока на впускном и сливном отверстиях соответственно. Решив уравнение $\psi_0(\xi_5)=(Q-Q_1)/2\pi$, найдем величину ξ_5. Таким образом, задача (1) может быть решена только после того, как будут найдены величины ξ_5 и ξ_1.

Следуя работам [6, 7], аппроксимируем произведение $G(\psi)G'(\psi)$ и функцию $F'(\psi)$ выражениями

(4) $$G(\psi)G(\psi)/d\psi=k\psi+c; \quad F'(\psi)=A_1+A_2\psi$$
$$k,\ c,\ A_1,\ A_2=\text{const}$$

Оценим погрешность линеаризации. Для этого, произведя замену $\psi(\xi,\eta)=v(\xi,\eta)+\Psi^1(\xi)$, найдем решение следующих задач, считая, что правые части являются функциями только координат

$$\frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial\xi^2}-\frac{1}{\xi}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\xi}=-G(\vartheta_1+\Psi^1)G'(\vartheta_1+\Psi^1)-\tag{5}$$

$$-\xi^2F'(\vartheta_1+\Psi^1)-\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{\xi}\frac{\partial\Psi^1}{\partial\xi}$$

$$\frac{\partial^2\vartheta_2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\vartheta_2}{\partial\xi^2}-\frac{1}{\xi}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\xi}=-k\vartheta_2-\xi^2A_2\vartheta_2-c-\xi^2A_1-\Psi^1(\xi)\times\tag{6}$$

$$\times[k+\xi^2A_1]-\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial\Psi^1}{\partial\xi}\right)$$

$$\vartheta_i(\eta,1)=\vartheta_i(\eta,\xi_1)=\vartheta_i(\eta_1,\xi)=0\quad(i=1,2)\tag{7}$$

$$\vartheta_i(0,\xi)=\Psi^\circ(\xi)-\Psi^1(\xi)$$

Граничные условия (7) являются общими для обоих уравнений (5), (6). Решение задачи (5), (7) (i=1) и (6), (7) (i=2) ищем в виде рядов

$$\vartheta_i(\eta,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}Y_n{}^i(\eta)\xi[J_1(\lambda_n\xi)N_1(\lambda_n)-J_1(\lambda_n)N_1(\lambda_n\xi)]\tag{8}$$

где λ_n — n-й положительный корень трансцендентного уравнения

$$J_1(\lambda_n\xi_1)N_1(\lambda_n)-J_1(\lambda_n)N_1(\lambda_n\xi_1)=0\tag{9}$$

$$B_n=\pi^2\lambda_n{}^2J_1{}^2(\lambda_n\xi_1)/[2(J_1{}^2(\lambda_n\xi_1)-J_1{}^2(\lambda_n))]$$

$$Y_n{}^i(\eta)=\frac{e^{-\lambda_n\eta}}{2\lambda^n}\int e^{\lambda_n\eta}b_{ni}d\eta-\frac{e^{\lambda_n\eta}}{2\lambda_n}\int e^{-\lambda_n\eta}b_{ni}d\eta+\tag{10}$$

$$+\left\{\left\{\frac{e^{-\lambda_n\eta_1}}{2\lambda_n}\int_0^{\eta_1}e^{\lambda_n\eta}b_{ni}d\eta-\frac{e^{\lambda_n\eta_1}}{2\lambda_n}\int e^{-\lambda_n\eta}b_{ni}d\eta\right|_{\eta=0}+\right.$$

$$\left.+a_{n3}^{i}e^{-\lambda_n\eta_1}\right\}e^{\lambda_n\eta}+\left\{\frac{e^{-\lambda_n\eta_1}}{2\lambda_n}\int e^{\lambda_n\eta}b_{ni}\,d\eta|_{\eta=\eta_1}-\right.$$

$$-\frac{e^{\lambda_n\eta_1}}{2\lambda_n}\int_0^{\eta_1}e^{-\lambda_n\eta}b_{ni}d\eta-\frac{e^{\lambda_n\eta_1}}{2\lambda_n}\int e^{\lambda_n\eta}b_{ni}d\eta|_{\eta=0}+$$

$$\left.\left.+a_{n3}{}^ie^{\lambda_n\eta_1}\right\}e^{-\lambda_n\eta}\right\}(e^{-\lambda_n\eta_1}-e^{\lambda_n\eta_1})^{-1}\quad(i=1,2)$$

$$a_{nj}{}^i=B_n\int_{\xi_1}^{1}\beta_j{}^i[I_1(\lambda_n\xi)N_1(\lambda_n)-I_1(\lambda_n)N_1(\lambda_n\xi)]d\xi$$

$$(j=1,3;\quad i=1,2)$$

$$\beta_1{}^1=-G(\Psi^1+\vartheta)G'(\vartheta+\Psi^1)-\xi^2F'(\vartheta+\Psi^2)$$

$$\beta_2{}^1=\beta_2{}^2=-\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial\Psi^1}{\partial\xi}\right),\quad\beta_3{}^2=\beta_3{}^2=\Psi^\circ-\Psi^1$$

$$\beta_1{}^2=-k\vartheta-\xi^2A_2\vartheta-c-\xi^2A_1-\Psi^1[k+\xi^2A_1]$$

$$b_{ni}=a_{n1}{}^i+a_{n2}{}^i \qquad (i=1,\ 2)$$

Подставив (9), (10) в (8), поменяв порядок суммирования и интегрирования и вычитая из решения задачи (5), (7) решение задачи (6), (7), получим

$$\vartheta_3(\eta,\xi)=\vartheta_1(\eta,\xi)-\vartheta_2(\eta,\xi)=\int\limits_{\xi_1}^{1}\sum_{n=1}^{\infty}\int\Delta[e^{\lambda_n(t-\eta)}- \tag{11}$$

$$-e^{\lambda_n(\eta-t)}]dt|_{t=\eta}M_n(\xi)+\left\{\int\limits_{\xi_1}^{1}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0\Delta[e^{\lambda_n(t+\eta-\eta_1)}-\right.$$

$$-e^{\lambda_n(\eta_1-t-\eta)}]dtM_n(\xi)+\int\limits_{\xi_1}^{1}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{\eta_1}\Delta[e^{\lambda_n(t-\eta_1+\eta)}-$$

$$-e^{\lambda_n(\eta_1-t+\eta)}]dtM_n(\xi)\,|_{t=\eta_1}+\int\limits_{\xi_1}^{1}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{\eta_1}\Delta[e^{\lambda_n(\eta-t-\eta_1)}-$$

$$\left.-e^{\lambda_n(\eta_1+t-\eta)}]dt|_{t=0}M_n(\xi)\right\}(e^{-\lambda_n\eta_1}+e^{\lambda_n\eta_1})$$

$$\Delta=-G(\Psi^1+\vartheta)G'(\Psi^1+\vartheta)-\xi^2F'(\vartheta+\Psi^1)+k\vartheta+\xi^2A_2\vartheta+c+$$
$$+\xi^2A_1+\psi^1[k+\xi^2A_1]$$

Отсюда если $|F'(\vartheta+\Psi^1)-A_1-A_2(\Psi^1+\vartheta)|<\frac{1}{2}\Delta$, $|G(\vartheta+\Psi^1)G'(\vartheta+\Psi^1)-$

$-c-k(\vartheta+\Psi^1)|<\frac{1}{2}\Delta$, то $|\vartheta_3|<\Delta^*M$, где Δ^* — максимальное значение

$|\Delta|$ и M — максимальное значение выражения (11), поделенного на величину $-\Delta^*$. Таким образом, для того, чтобы $|\vartheta_3|<\delta$, необходимо, чтобы $\Delta^*<\delta/M$.

Оценим величину M:

$$M=\frac{6\pi(1-\xi_1)}{\xi_1{}^{3/2}}\zeta(2)-\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{6\pi^2(1-\xi_1)}{n^2\xi_1{}^{3/2}}-\frac{3\pi^2}{2}\times\right. \tag{12}$$

$$\left.\times\frac{J_1{}^2(\lambda_n\xi_1)[(J_0(\lambda_n\xi_1)-J_0(\lambda_n))N_1(\lambda_n)+(N_0(\lambda_n)-N_0(\lambda_n\xi_1))J_1(\lambda_n)']}{[J_1{}^2(\lambda_n\xi_1)-J_1{}^2(\lambda_n)']}\right\}$$

Здесь $\zeta(N)$ — дзета-функция Римана, N — номер наименьшего корня уравнения (9), который больше 10.

Теперь перейдем к выбору аппроксимационных функций.

Для того чтобы можно было аппроксимировать истинные значения произведения $G(\psi)G'(\psi)$ и функции $F'(\psi)$ выражениями (3), а следовательно, найти постоянные k, c, A_1, A_2, необходимо получить явные зависимости произведения $G(\psi)G'(\psi)$ и функции $F'(\psi)$ от функции тока ψ. Так, зная зависимости компонент скорости от радиуса на входном отверстии, через который проходит весь поток жидкости, т. е. все линии тока (если нет областей замкнутых циркуляций внутри гидроциклона), а также зная зависимость ψ_0 от ξ, можно найти зависимости произведения $G(\psi)G'(\psi)$ и функции $F'(\psi)$ от ψ на входном отверстии. Эти зависимости будут сохраняться во всем потоке. Выражая радиус через $\psi_0(\xi)$ ($\xi=f(\psi_0)$) и подставляя эту зависимость вместо ξ в $G(\psi)$ на входе, найдем явную зависимость циркуляции от ψ. Если в интеграле Бернулли давление заменить выражением, которое получается после интегрирования по ξ уравнения

$$v_\xi\frac{\partial v_\xi}{\partial\xi}+v_\eta\frac{\partial v_\xi}{\partial\eta}-\frac{v_\varphi}{\xi}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\xi}$$

то получим зависимость $F(\psi)$ от ξ на впускном отверстии

$$F(\psi)=\int\limits_{\xi_1}^{\xi}\left[-v_\eta\frac{\partial v_\xi}{\partial\eta}+\frac{v_\varphi^2}{\xi}\right]d\xi+\frac{v_\eta^2+v_\varphi^2}{2}$$

Подставив вместо ξ выражение $f(\psi_0)$, получим явную зависимость $F(\psi)$ от функции тока. Функции $G(\psi)G'(\psi)$ и $F'(\psi)$ непрерывные, если компоненты скорости и вихря — непрерывные функции, так как $F'(\psi)=(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega})\mathbf{n}$, $\mathbf{n}\perp\mathbf{v}$, а согласно [4], $G'(\psi)=\mathbf{w}_\xi/v_\xi$. В этом случае необходимо аппроксимировать функции $G(\psi)G'(\psi)$ и $F'(\psi)$ линейными функциями, так чтобы они наименее отклонялись (в метрике пространства C) от заданных непрерывных зависимостей $G(\psi)G'(\psi)$ и $F'(\psi)$. Согласно теореме Вейерштрасса [8], выбор таких функций (3) единствен и вполне характеризуется тем, что число последовательных точек интервала $[0, Q/2\pi]$, в котором разности между $G(\psi)G'(\psi)$, $F'(\psi)$ и функциями (3) принимают с чередующимися знаками значения максимумов этих разностей не менее трех [8], так как аппроксимируем полиномом первой степени. В случае разрывных компонент вихря или скорости можно ограничиться требованием наименьшего отклонения функций (3) от $G(\psi)G'(\psi)$ и $F'(\psi)$ в метриках пространства L_2, т. е. найти линейные функции наилучшего интегрального приближения или наилучшего среднеквадратического приближения [8, 9]. Так как обычно произведение $G(\psi)G'(\psi)$ и функция $F'(\psi)$ не имеют резких экстремумов, то отличие коэффициентов аппроксимации, найденных по методу наименьших квадратов [9], т. е. в метрике пространства L_2, от аппроксимации в метрике пространства C незначительное. Достаточно потребовать обращения в минимум следующих интегралов:

$$I_1=\int\limits_0^{Q/2\pi}[F'(\psi)-A_1\psi-A_2]^2d\psi$$

$$I_2=\int\limits_0^{Q/2\pi}[G(\psi)G'(\psi)-k\psi-c_2]^2d\psi$$

Коэффициенты A_1, A_2 находятся из решения системы уравнений

$$\frac{1}{2}\frac{dI_1}{dA_1}=\int\limits_0^{Q/2\pi}[F'(\psi)-A_1\psi-A_2]\psi d\psi$$

(13)

$$\frac{1}{2}\frac{dI_1}{dA_2}=\int\limits_0^{Q/2\pi}[F'(\psi)-A_1\psi-A_2]d\psi$$

Для нахождения k, c составляется аналогичная система. Если $A_1 \approx A_2 \approx 0$, то течение близко к однородному винтовому.

Найдем решение задачи (5), (7). Ищем решение в виде ряда

$$\vartheta_2(\eta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n(\xi) N_n(\eta) \tag{14}$$

После подстановки (14) в (5), добавления членов $A_2\vartheta - A_2\vartheta$ и разделения переменных получаем уравнение для $M_n(\xi)$:

$$\xi \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial M_n}{\partial \xi}\right) + (\xi^2 A_2 - \varkappa + \lambda) M_n = 0 \tag{15}$$

Здесь λ — константа разделения $\varkappa = A_2$, если $A_2 > 0$, и $\varkappa = 0$, если $A_2 < 0$; величина $\varkappa$ введена для того, чтобы спектр собственных значений был положительным, когда $A_2 > 0$.

Заменой $M_n(\xi) = y \exp(-y/2)\theta$ и $y = i\sqrt{A_2}\xi^2$ сведем уравнение (15) к вырожденному гипергеометрическому уравнению. После нахождения $M_n(\xi)$ и $N_n(\eta)$ и выделения действительной части получим выражение для функции тока

$$\psi(\xi, \eta) = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \xi^2 \exp(i\sqrt{A_2}\,\xi^2/2)\,\Delta(b_n, 2, \xi) \times \tag{16}$$

$$\times \{\{[(\alpha_{n,6} + \beta_n)\exp(-\eta_1\sigma_n) - \beta_n]\exp(\eta\sigma_n) + [\beta_n - (\alpha_{n,6} + \beta) \times$$

$$\times \exp(\eta_1\sigma_n)]\exp(-\eta\sigma_n)\}(-2)\operatorname{sh}^{-1}(\eta_1\sigma_n) - \beta_n\} + \Psi^1(\xi)$$

$$\Delta(b_n, 2, \xi) = \Phi(b_n, 2; -i\sqrt{A_2}\xi^2)\,\Psi(b_n, 2; -i\sqrt{A_2}\xi_1^2) -$$

$$-\Phi(b_n, 2; -i\xi_1^2\sqrt{A_2})\,\Psi(b_n, 2; -i\sqrt{A_2}\xi^2); \quad \sigma_n = (\lambda_n - k - \varkappa)^{1/2}$$

$$b_n = 1 + (\lambda_n - \varkappa) i/(4\sqrt{A_2}); \quad \beta_n = \sigma_n^{-2}(\alpha_{n,1}c + \alpha_{n,2}A_1 + \alpha_{n,3}k +$$

$$+ \alpha_{n,4}A_2 + \alpha_{n,5}); \quad B_n^{-2} = \int_{\xi_1}^{1} \xi^2 \exp(i\sqrt{A_2}\xi^2)\,\Delta^2(b_n, 2; \xi)\,d\xi$$

$$\psi(b_n, n+1; z) = \frac{(-1)^{n-1}}{n!\,\Gamma(b_n - n)}\Big\{\Phi(b_n, 2; z)\ln z +$$

$$+ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(b_n)_r}{(n+1)_r}[\varphi(a+r) + \varphi(1+r) - \varphi(1+n-r)]\frac{z^r}{r!} + \frac{(n-1)!}{\Gamma(b_n)} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(b_n - r)_r}{r!}\frac{z^{r-n}}{r!}; \quad \alpha_{n,i} = \int_{\xi_1}^{1} \xi^{-2}\beta_i^*(\xi) M_n(\xi)\,d\xi \quad (i = 1, \ldots, 6)$$

$$\beta_1^* = -1; \quad \beta_2^* = -\xi^2; \quad \beta_3^* = \beta_4^*/\xi^2 = \Psi^1(\xi); \quad \beta_6^* = \Psi^\circ(\xi) - \Psi^1(\xi)$$

$$\beta_5^* = -\left\{\frac{\partial^2 \Psi'(\xi)}{\partial \xi^2} + \left[\frac{\partial \Psi'(\xi)}{\partial \xi}\right]_{\xi = \xi_3} \delta(\xi_3) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial \Psi^1(\xi)}{\partial \xi}\right]_{\xi = \xi_2} \delta(\xi_2) - \frac{1}{\xi}\frac{\partial \Psi^1(\xi)'}{\partial \xi}\right\}$$

Здесь $\Phi(b_n, m; z)$ — функция Куммера, $(a)_r$ — символ Похгаммера [10], $\Gamma(z)$, $\varphi(z)$ — гамма-функция и ее логарифмическая производная соответственно, $\delta(x)$ — дельта-функция, $[f(x)]_{x=x_0}$ — величина скачка функции в точке x_0, а λ_n — n-й положительный корень трансцендентного уравнения

$$\Psi\left(1-\frac{(\lambda-\varkappa)i}{4\sqrt{A_2}},2;\ -i\sqrt{A_2}\right)\Phi\left(1-\frac{(\lambda-\varkappa)i}{4\sqrt{A_2}},2;-i\sqrt{A_2}\xi_1^2\right)-$$
$$-\Psi\left(1-\frac{(\lambda-\varkappa)i}{4\sqrt{A_2}},2;-i\sqrt{A_2}\xi_1^2\right)\Phi\left(1-\frac{(\lambda-\varkappa)i}{4\sqrt{A_2}},2;-i\sqrt{A_2}\right)=0 \tag{17}$$

Компоненты скорости выражаются через функцию тока по формулам (1).

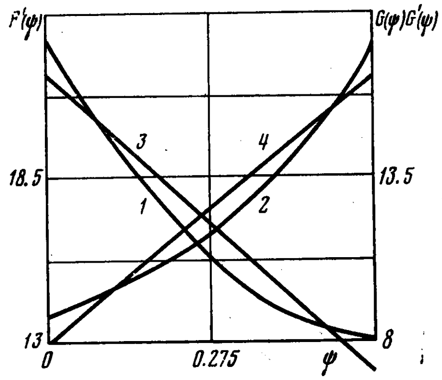
Из выражения (15) видно, что если $\lambda_n-k-\varkappa<0$, то показатели экспонент становятся мнимыми, что соответствует возникновению синусоидальных возмущений в потоке с длиной волны $l_n=2\pi/|\sigma_n|$. Зависимость возникновения синусоидальных возмущений от радиуса столба воздуха на оси гидроциклона ξ_1 и от постоянной A_2 исследована в [11]. На основании формул (3), (16) произведем расчет течения в цилиндрическом гидроциклоне, у которого $p_0=233.5$, $p_1=62.25$, $\xi_2=0.6$, $\xi_3=0.7$, $\xi_4=0.95$, $\eta_1=4$, $Q=$ $=3.55$, $Q_1=0.355$ и зависимости функций тока на впускном, сливном и разгрузочном отверстиях, а также зависимость циркуляции $G(\xi)$ и радиальной компоненты скорости на впускном отверстии имеют вид

$$\psi_0(\xi)=v_0\frac{(1+\xi_3^2)}{\pi}\left[\cos\frac{\xi_3^2\pi}{1+\xi_3^2}-\cos\frac{\xi^3\pi}{1+\xi_3^2}\right] \tag{18}$$
$$\psi_1(\xi)=v_1\frac{\xi_1^2+\xi_2^2}{\pi}\left[\cos\frac{\xi^2\pi}{\xi_1^2+\xi_2^2}-\cos\frac{\xi_2^2\pi}{\xi_1^2+\xi_2^2}\right]$$
$$\psi_2(\xi)=v_2\frac{1+\xi_4^2}{2}\left[\cos\frac{\xi_4^2\pi}{1+\xi_4^2}-\cos\frac{\xi^2\pi}{1+\xi_4^2}\right]+0.495$$
$$G(\xi)=v_3\xi^2\frac{\pi}{1+\xi_3^2},\qquad v_\eta=0$$

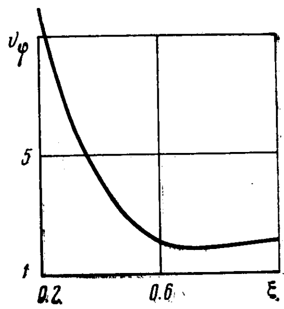
Выпишем зависимости производной интеграла Бернулли по ψ и произведения $G(\psi)G'(\psi)$ от функции тока, полученные на основании формул (18)

$$dF'(\psi)/d\psi=\frac{4\pi v_0}{(1+\xi_3^2)}\left[B-\frac{\psi\pi}{(1+\xi_3^2)v_0}\right]+\frac{v_3^2}{v_0}\frac{\pi^2}{(1+\xi_3^2)}\times \tag{19}$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{1-(B-\psi\pi/(1+\xi_3^2)v_0)^2}}$$
$$G(\psi)\frac{dG(\psi)}{d\psi}=\frac{v_3^2\pi}{v_0(1+\xi_3^2)}\times$$
$$\times\arccos\left(B-\frac{\psi\pi}{(1+\xi_3^2)v_0}\right)\frac{1}{\sqrt{1-(B-\psi\pi/(1+\xi_3^2)v_0)^2}}$$
$$B=\cos(\xi_3^2\pi/(1+\xi_3^2))$$

На фиг. 2 нанесены значения $dP/d\psi$ (кривая *1*) и значение $G\times dG/d\psi$ (кривая *2*), рассчитанные по формулам (19). Подставив (19) в систему уравнений (13), можно найти A_1, A_2. Аналогично можно найти k, c. Аппроксимирующие прямые имеют вид $P'(\psi)=22.45-18.55\psi$; $G(\psi)G'(\psi)=$ $=16.95+16.27\ \psi$ и представлены на фиг. 2 прямыми *3* и *4* соответственно. Как видно из фиг. 2, производная от интеграла Бернулли $dF(\psi)/d\psi$ является монотонно убывающей функцией (кривая *1*), а произведение $G(\psi)G'(\psi)$ — монотонно возрастающей функцией (кривая *2*). Кроме того, из фиг. 2 видно, что аппроксимирующие полиномы первой степени отличаются от истинных распределений незначительно, а разности между



Фиг. 2



Фиг. 3

ними и функциями $F'(\psi)$ и $G(\psi)G'(\psi)$ принимают с чередующими знаками три максимума.

Решив уравнение $\psi_0(\xi)=(Q-Q_1)/2\pi$, найдем, что $\xi_5=0.96$. Отсюда, подставив найденное значение ξ_5 в уравнение (3), найдем $\xi_1=0.2$.

Численное суммирование ряда (14) было произведено после того, как были найдены положительные корни λ_n уравнения (17). Ряды (16) с найденными значениями корней λ_n уравнения (17) сходятся быстро, поэтому при расчете поля скоростей в гидроциклоне можно ограничиться численным суммированием шести первых членов ряда (16).

На фиг. 1 нанесены линии тока для равноотстоящих значений ψ с шагом 0.1, начиная со значения 0.1 (самая удаленная линия тока от боковых поверхностей гидроциклона). Картина линий тока согласуется с уравнениями расхода жидкости и с экспериментальными данными [3]. Сгущения линий тока, как показано на фиг. 1, в кольцевых областях $0.2<\eta<2.4$, $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$, $\xi_1<\xi<\xi_2$, и $0.2<\eta<2.4$ $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$, $\xi_3<\xi<1$ связано с наличием максимумов осевой скорости на впускном и сливном отверстиях. Иначе говоря, осевая скорость вблизи боковых стенок, поверхности воздушного столба и поверхности, на которой v_η меняет знак, меньше, чем в остальных частях потока.

Теперь найдем распределение азимутальной компоненты скорости внутри цилиндрического гидроциклона. Учитывая, что величина циркуляции сохраняется вдоль линии тока, зная распределение линий тока в плоскости поперечного сечения гидроциклона и зависимость циркуляции от функции тока, найденную на входном отверстии, можно найти распределения циркуляции и азимутальной компоненты скорости внутри гидроциклона.

На фиг. 3 изображено распределение азимутальной компоненты скорости вдоль радиуса ξ при $\eta=1$. Расчет показывает, что профили азимутальной компоненты скорости вдоль оси приближенно подобны в области $0.2<\eta<2.4$, $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$, $\xi_1<\xi<1$, так как картинки линий тока приближенно подобны в этой области, что согласуется с экспериментальными данными [3]. Из фиг. 3 видно, что азимутальная компонента скорости монотонно убывает при $0.2\leqslant\xi\leqslant0.68$ и монотонно возрастает при $0.68\leqslant\xi\leqslant1$. На боковой поверхности гидроциклона азимутальная компонента скорости равна 2.08, на свободной поверхности воздушного столба — 10, а на дне (за исключением разгрузочного отверстия) задается зависимостью $2/\xi$. Резкое возрастание v_φ с уменьшением радиуса связано с переносом циркуляции вдоль линии тока. Отличие азимутального движения от истинного обусловлено только тем фактом, что рассчитанное распределение функции тока отличается от истинного из-за линеаризации.

Таким образом, найдено приближенное распределение компонент скорости внутри гидроциклона, при этом решение точно удовлетворяет на впускном и сливном отверстиях распределениям осевой и азимутальной компонентам скорости, из-за линеаризации наблюдается небольшое отклонение радиальной компоненты скорости от истинного распределения на входном отверстии.

Автор благодарит Ю. П. Гупало и Ю. С. Рязанцева за обсуждение работы и ценные замечания.

Поступила 4 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мустафаев А. М., Гутман Б. М.* Теория и расчет гидроциклона. Баку, «Маариф», 1969.
2. *Шестов Р. Н.* Гидроциклоны. Л., «Машиностроение», 1967.
3. *Smith J. L.* An experimental study of the vortex in the cyclone separator. Paper Amer. Soc. Mech. Engrg., 1961, No. WA-189.
4. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
5. *Васильев О. Ф.* Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М.– Л., Госэнергоиздат, 1958.
6. *Гостинцев Ю. А., Зайцев В. М., Новиков С. С.* Тяга сопла при циркуляционном истечении вихревого потока газа. Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 5.
7. *Гупало Ю. П., Мартынов Ю. В., Рязанцев Ю. С.* О поле скоростей потока жидкости в винтовом канале прямоугольного сечения. Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 1.
8. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М., Физматгиз, 1960.
9. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. М.– Л., Гостехиздат, 1934.
10. *Бейтман Г., Эрдей А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1. М., «Наука», 1973.
11. *Мартынов Ю. В.* Вихревое осесимметричное течение невязкой жидкости в полубесконечном зазоре между соосными круговыми цилиндрами. Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 5.