

ЭЛЕКТРИЗАЦИЯ ДИСПЕРСНЫХ ЧАСТИЦ В УНИПОЛЯРНО ЗАРЯЖЕННЫХ ДВУХФАЗНЫХ СРЕДАХ

Н. Л. ВАСИЛЬЕВА, Л. Т. ЧЕРНЫЙ

(Москва)

Рассматривается электризация хорошо проводящих дисперсных частиц в униполярно заряженных двухфазных средах в случае, когда объемная концентрация частиц мала. Для этого в рамках электрогидродинамики [1, 2] исследуется зарядка одной идеально проводящей жидкой частицы, обтекаемой униполярно заряженным газом (или жидкостью) в достаточно сильном электрическом поле. Влияние инерционных и электрических сил на движение газа не учитывается, и их скорости найдутся из решения задачи Адамара — Рыбчинского. Рассматривается осесимметричный случай, когда вдаль от частицы скорость газа и напряженность электрического поля параллельны одной прямой. Аналогичная задача для твердой сферической частицы решалась в работах [3-6], причем в [3] относительное движение газа не учитывалось, а в [4-6] рассматривалось стоксово обтекание частицы. Плоская задача о зарядке твердого кругового идеально проводящего цилиндра при потенциальном обтекании униполярно заряженным газом изучалась в [7].

1. В двухфазных средах, состоящих из дисперсных частиц и униполярно заряженного газа (или жидкости), частицы могут заряжаться, собирая ионы из окружающего газа (жидкости). Для изучения этого явления в случае малой объемной концентрации дисперсных частиц рассмотрим электризацию одной сферической жидкой (или твердой) частицы, находящейся в квазиоднородном (на расстояниях порядка радиуса частицы a) несжимаемом вязком электрогидродинамическом потоке. Будем считать, что частица идеально проводящая и все ионы, попадающие на нее поверхность, остаются на ней. Рассматривая возмущенный частицей электрогидродинамический поток, пренебрежем в уравнении Навье — Стокса инерционными членами и электрическими силами Кулона по сравнению с вязким членом, возмущением электрического поля в результате изменения плотности заряда в окрестности частицы по сравнению с невозмущенным электрическим полем, диффузией ионов на расстояниях, сравнимых с a , по сравнению с их конвективным переносом и миграцией под действием электрического поля, а также отклонением формы частицы от сферической, возникающим под действием инерционных, архимедовых и электрических сил.

При этом поле скорости газа U определяется из решения обычной гидродинамической задачи Адамара — Рыбчинского [8], а распределение электрического поля E в пространстве вокруг частицы находится из решения соответствующей задачи электростатики [9] без учета собственного электрического поля ионов. Это позволяет считать известным поле скорости ионов вокруг жидкой частицы, причем плотность электрического заряда ионов q вдоль траекторий ионов остается постоянной.

Будем рассматривать течения, в которых направления векторов U_0 и bE_0 противоположны (здесь b — подвижность ионов, индекс нуль означает, что соответствующие параметры относятся к потоку, не возмущен-

ному частицей). В этом случае движение ионов обладает осевой симметрией. Введем в плоскости Π , проходящей через ось симметрии, декартову (x, y) и полярную (r, θ) системы координат. Пусть ось x совпадает с осью симметрии и направлена вдоль вектора U_0 , а центр частицы находится в точке $x=y=0$. Угол θ будем отсчитывать от отрицательной полуоси x . Скорость ионов $v=U+bE$, очевидно, лежит в плоскости Π . Выражения для компонент скорости в выбранной полярной системе координат запишутся в виде

$$(1.1) \quad v_r = -\cos \theta \left[U_0 \left(1 - \frac{3}{2} C_1 \frac{a}{r} + \frac{1}{2} C_2 \frac{a^3}{r^3} \right) - bE_0 \left(1 + 2 \frac{a^3}{r^3} \right) \right] + \frac{bQ}{\epsilon r^2}$$

$$(1.2) \quad v_\theta = \sin \theta \left[U_0 \left(1 - \frac{3}{4} C_1 \frac{a}{r} - \frac{1}{4} C_2 \frac{a^3}{r^3} \right) - bE_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \right]$$

$$C_1 = \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\mu}{\mu'} \right) \left(1 + \frac{\mu}{\mu'} \right)^{-1}, \quad C_2 = \left(1 + \frac{\mu}{\mu'} \right)^{-1}$$

Здесь $U_0, -bE_0$ — проекции векторов U_0, bE_0 на ось x ($U_0 > 0, bE_0 > 0$); проекции этих векторов на плоскость, ортогональную оси x , равны нулю; μ — вязкость газа; μ' — вязкость жидкости внутри частицы (для твердой частицы $\mu' = \infty$), ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость газа.

Выражения (1.1), (1.2) можно представить также в виде

$$(1.3) \quad v_r = -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

$$(1.4) \quad \Psi = \frac{1}{2} U_0 r^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{3}{2} C_1 \frac{a}{r} + \frac{1}{2} C_2 \frac{a^3}{r^3} \right) - \frac{1}{2} bE_0 r^2 \sin^2 \theta \left(1 + \frac{2a^3}{r^3} \right) + \frac{bQ \cos \theta}{\epsilon}$$

Вдоль линий тока ионов функция тока $\Psi = \text{const}$.

2. Рассмотрим вначале случай, когда заряд частицы равен нулю ($Q=0$). При этом выражение для тангенциальной составляющей скорости v_θ останется прежним, а в формуле для радиальной составляющей скорости v_r последний член равен нулю. Найдем точки на плоскости Π , в которых скорость ионов обращается в нуль. Когда скорость газа и напряженность электрического поля на бесконечности удовлетворяют неравенству $U_0 > bE_0$, на оси x имеются две симметричные относительно начала координат точки, в которых скорость ионов $v=U+bE$ обращается в нуль: $v^*(\pm r_*)=0$.

Так как на оси x $\sin \theta=0$ и $v_\theta=0$, то значение r_* находится из условия $v_r(r_*)=0$, т. е. из кубического уравнения

$$(2.1) \quad \left(\frac{C_2}{4} U_0 - bE_0 \right) \frac{a^3}{r_*^3} - \frac{3C_1}{4} U_0 \frac{a}{r_*} + \frac{1}{2} (U_0 - bE_0) = 0$$

Если на бесконечности выполняется неравенство $U_0 < bE_0$, то ни в одной точке на оси x скорость ионов, очевидно, в нуль не обращается.

Корень r_* уравнения (2.1) находится по формулам Кардано. В частности, при $\mu' \gg \mu$, считая $C_1 \approx C_2 \approx 1$, получим

$$(2.2) \quad r_* \approx a \frac{U_0}{U_0 - bE_0} \left[\cos \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{2} \right]$$

$$\alpha = \arccos \frac{D^3 + 6D - 8}{D^3}, \quad D = \frac{U_0}{U_0 - bE_0}, \quad \frac{U_0}{4} \geq bE_0$$

$$(2.3) \quad r_* = a \left[\sqrt[3]{A - B} + \sqrt[3]{A + B} + \frac{1}{2} D \right], \quad A = \frac{1}{8} (D^3 + 6D - 8)$$

$$B = \frac{1}{2} \sqrt[3]{(3/4 D - 1)(D - 1)(D^2 + D + 4)}, \quad U_0 > bE_0 > U_0/4$$

Из (2.2) следует, что когда $bE_0 \in [0, U_0/4]$, то $r_* \in [a, 2a]$; $bE_0 \in [U_0/4, U_0]$, то $r_* \in [2a, \infty)$.

На оси $y \cos \theta = 0$ $v_r = 0$. Поэтому скорость ионов обращается на оси y в нуль в точках $y = \pm r_{**}$, где значение r_{**} находится из условия $v_\theta(r_{**}) = 0$

$$(2.4) \quad \left(\frac{C_2}{4} U_0 - bE_0 \right) \left(\frac{a^3}{r_{**}^3} \right) + \frac{3C_1}{4} U_0 \left(\frac{a}{r_{**}} \right) - (U_0 - bE_0) = 0$$

Это уравнение не имеет действительных корней, удовлетворяющих неравенству $r_{**} \geq a$, если $bE_0 < bE_{02}$, где bE_{02} — корень дискриминанта уравнения (2.4)

$$(2.5) \quad \left(\frac{C_1 U_0}{C_2 U_0 - 4bE_0} \right)^3 + \left(\frac{2U_0 - 2bE_0}{C_2 U_0 - 4bE_0} \right)^2 = 0$$

Корень bE_{02} удовлетворяет неравенствам $bE_{01} > U_0 > bE_{02} \geq bE_{03} > 0$, где bE_{01} и bE_{03} — два другие корня уравнения (2.5) (оно имеет три корня и все они действительные). Если же напряженность невозмущенного электрического поля удовлетворяет неравенствам $bE_{02} < bE_0 < U_0$, то уравнение (2.4) имеет два действительных корня $r_{**}' > r_{**}'' \geq a$. Следовательно, в этом случае скорость ионов обращается в нуль на оси y (в рассматриваемой плоскости II) в четырех точках $y = \pm r_{**}'$, $y = \pm r_{**}''$, расположенных симметрично относительно начала координат.

В случае, когда $U_0 < bE_0$ уравнение (2.4) имеет один действительный корень $r_{**}' \geq a$ и скорость ионов обращается в нуль на оси y в двух точках $y = \pm r_{**}'$. Значения корней r_{**}' , r_{**}'' находятся по формулам Кардано. В частности, при $\mu' > \mu$ ($C_1 \approx C_2 \approx 1$) из уравнения (2.4) имеем

$$(2.6) \quad r_{**}' = a$$

$$r_{**}'' = -\frac{a}{2} \left(1 - \frac{3}{4} D \right) + a \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{3}{4} D \right)^2 - \left(1 - \frac{3}{4} D \right)}$$

$$(2.7) \quad r_{**}' = a \quad (U_0 < bE_0)$$

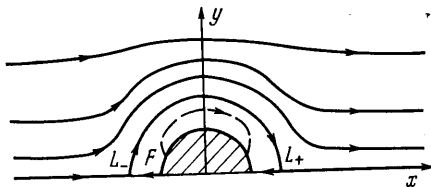
Из выражений (1.1), (1.2) для v_r , v_θ легко видеть, что равенство $v_r = 0$ справедливо во всех точках окружности $r = r_*$ в плоскости II, а равенство $v_\theta = 0$ — во всех точках окружностей $r = r_{**}'$, $r = r_{**}''$.

Можно доказать, что при обтекании частицы компоненты скорости v_r и v_θ одновременно могут обращаться в нуль только на осях x и y (при $Q = 0$). Поэтому кроме найденных на них точек, в которых $\mathbf{v} = \mathbf{U} + b\mathbf{E} = 0$, скорость ионов v больше нигде в плоскости II в нуль не обращается.

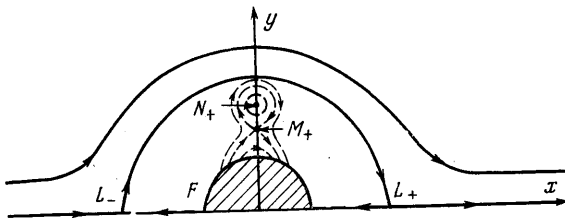
Для жидкой частицы линии тока ионов в плоскости II изображены на фиг. 1–3 в случаях, когда выполняются неравенства $bE_0 < bE_{02}$, $bE_{02} < bE_0 < U_0$; $U_0 < bE_0$. Стрелками на этих рисунках указано направление движения ионов. Штриховые кривые представляют собой начинающиеся на поверхности частицы линии тока векторного поля $\mathbf{v} = \mathbf{U} + b\mathbf{E}$ (в плоскости II), на которых ионы отсутствуют ($q = 0$). В случае, изображенном на фиг. 1, направление скорости ионов в бесконечности совпадает с направлением скорости потока газа. Скорость ионов обращается в нуль в точках $L_\pm (\pm r_*, 0)$. Точки L_\pm есть особые точки типа «седло» поля скоростей ионов в плоскости II.

В этом случае, как ясно из фиг. 1, ионы не могут попасть внутрь области, ограниченной окружностью радиуса r_* , и, следовательно, на поверхность частицы. Приходящие из бесконечности ионы огибают окружность радиуса r_* и уносятся потоком вниз по течению.

В случае, изображенном на фиг. 2, направление скорости ионов в бесконечности также совпадает с направлением скорости потока газа. Скорость ионов обращается в нуль в точках $L_{\pm}(\pm r_*, 0)$, $M_{\pm}(0, \pm r_*')$, $N_{\pm}(0, \pm r_*'')$. Точки L_{\pm} , M_{\pm} , N_{\pm} есть особые точки поля скоростей ионов



Фиг. 1



Фиг. 2

в плоскости Π , при этом L_{\pm} , M_{\pm} — особые точки типа «седло», а N_{\pm} — особые точки типа «центр».

При $\mu' \gg \mu$ сепаратрисы, проходящие через точки y_1 и y_2 , описываются уравнением

$$\left(\frac{r}{a} - 1\right)^2 \left(-\frac{3}{2}D + \frac{r}{a} + 2\right) = 3\frac{r}{a}(1-D)\text{tg}^2\theta.$$

Как ясно из фиг. 2, в этом случае движение ионов аналогично движению в предыдущем случае. Ионы, приходящие из бесконечности, приближаются к окружности радиуса r_* , внутрь которой они попасть не могут. Ионы огибают указанную окружность и уносятся потоком вниз по течению.

В случае, изображенном на фиг. 3, скорость газа в бесконечности U_0 меньше, чем bE_0 , и, следовательно, направление скорости ионов в бесконечности противоположно направлению скорости газа. Поэтому на оси y имеются две симметричные относительно оси x точки $M_{\pm}(0, r_*')$, в которых скорость ионов обращается в нуль. Точки M_{\pm} есть особые точки типа «седло» поля скоростей ионов в плоскости Π . Для твердой частицы ($\mu' = \infty$), согласно (2.7), имеем $r_*' = a$, т. е. точки M_{\pm} лежат на поверхности частицы.

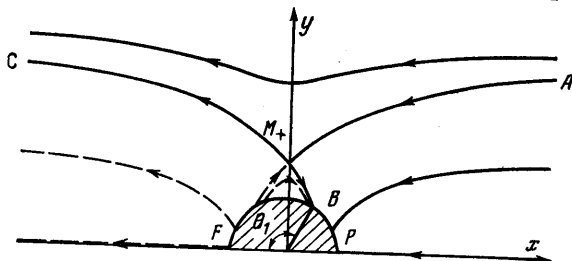
Все ионы, приходящие из бесконечности, линии тока которых лежат между линией AM_+B и осью x (в плоскости Π) достигают поверхности частицы и оседают на нее на дуге BP . В области, ограниченной сепаратрисой BM_+C и осью x , ионы отсутствуют, т. е. $q=0$.

В этом случае электрический ток J , текущий на частицу, равен

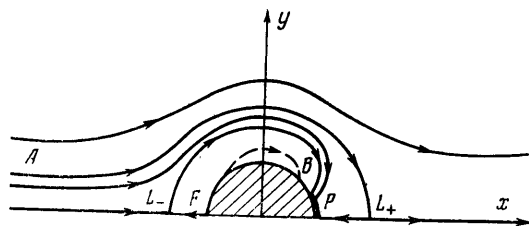
$$(2.8) \quad J = - \int_{S'} qbE_n ds = -2\pi a^2 \int_{\theta_1}^{\pi} qv_r(a, \theta) \sin \theta d\theta = \\ = 2\pi q_0 [\Psi(a, \pi) - \Psi(a, \theta_1)] = -2\pi q_0 \Psi(a, \theta) = -2\pi q_0 \Psi(r_{**}, \pi/2) > 0.$$

Здесь S' — часть поверхности частицы, на которой оседают ионы; θ_1 — угол в плоскости Π , соответствующий точке B_1 .

При выводе формулы (2.8) для тока J были использованы равенства $U_r=0$, $v_r=bE_r$, справедливые на поверхности частицы, выражение (1.3) для v_r через функцию тока ионов $\Psi(r, \theta)$, а также равенство $q=q_0$, выполняющееся на линиях тока ионов, приходящих на поверхность частицы



Фиг. 3



Фиг. 4

из бесконечности. Для твердой частицы ($C_1=C_2=1$, $r_{**}=a$) формула (2.8) принимает известный вид

$$(2.9) \quad J = -2\pi q_0 \Psi(a, \pi/2) = 3\pi a^2 q_0 b E_0^1$$

3. Предположим теперь, что в электрогидродинамическом потоке находится заряженная частица. Рассмотрим вначале случай, когда заряд частицы противоположен заряду ионов ($bQ < 0$).

Пусть выполняется неравенство $bE_0 < bE_{02}$. Линии тока ионов для такого течения изображены на фиг. 4. Штриховые кривые на нем (а также на фиг. 5, 6) представляют собой начинающиеся на поверхности частицы линии тока векторного поля $v=U+bE$ (в плоскости Π), на которых ионы отсутствуют ($q=0$). Как видно из фиг. 4, к заряженной частице примыкает каверна, сечение которой плоскостью Π ограничено сепаратрисой BL_- . Ионы, приходящие из бесконечности, не могут пересечь кривую BL_- , и, следовательно, внутри каверны ионы отсутствуют. Ионы, линии тока которых в бесконечности лежат между сепаратрисой AL_+ и осью x , оседают на поверхность частицы на дуге BP .

Для частицы, несущей противоположный ионам заряда с большей абсолютной величиной, размер каверны уменьшается (точка L_- приближает-

¹ Выражение (2.9) для тока J получено в работе: Ушаков В. В. Электрогазодинамические струи и системы управления электростатическим зарядом летательных аппаратов. Докт. дис. Киев, 1978.

ся к поверхности частицы, а точка B движется по поверхности частицы (справа налево). Анализ системы уравнений показывает, что каверна отсутствует при выполнении неравенства $bQ \leq -3b\epsilon E_0 a^2$.

В этом случае ток ионов на частицу равен (3.1)

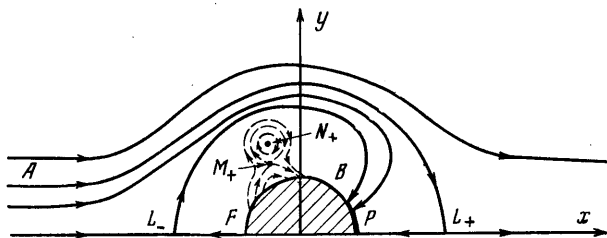
$$(3.1) \quad J = - \int qbE_n ds = -q_0 b \int E_n ds = - \frac{4\pi q_0 b Q}{\epsilon} > 0$$

Используя соотношение

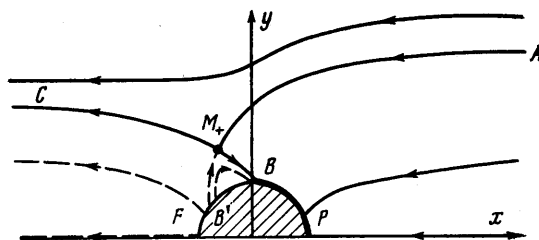
$$\int_{s/s'} E_n ds = \frac{1}{b} \int_{s/s'} v_r ds = 0$$

справедливость которого очевидна из фиг. 4 и соленоидальности поля \mathbf{v} , легко убедиться, что выражение (3.1) для электрического тока J справедливо и при $-3\epsilon b E_0 a^2 < bQ < 0$.

Пусть в бесконечности выполняются неравенства $bE_{02} < bE_0 < U_0$. Линии тока ионов для такого течения изображены на фиг. 5. Как видно из



Фиг. 5



Фиг. 6

фиг. 5, к заряженной частице, как и в предыдущем случае, примыкает каверна, сечение которой плоскостью Π ограничено сепаратрисой BL_- . При достаточно малой величине заряда картина течения отличается от случая, разобранный выше, распределением линий тока поля \mathbf{v} внутри каверны. В сечении каверны плоскостью Π имеются две симметричные относительно оси x особые точки типа «седло» и две особые точки типа «центр». Ионы, приходящие из бесконечности, не могут пересечь кривую BL_- и, следовательно, внутри каверны отсутствуют. Ионы, линии тока которых в бесконечности лежат между сепаратрисой AL_+ и осью x , оседают на поверхности частицы на дуге BP . Для частицы, несущей противоположный ионам заряд с большей абсолютной величиной, как и в предыдущем случае, размер каверны уменьшается: точка B движется по поверхности частицы справа налево, особые точки внутри каверны (в сечении плоскостью Π) движутся справа налево по окружностям радиуса $r_{..}$ и $r_{..}$. Каверна исчезает, когда частица несет заряд, равный $Q =$

$= -3\epsilon E_0 a^2$. Если на частице имеется противоположный ионам заряд, по абсолютной величине больший или равный $3\epsilon |E_0| a^2$, то оседание ионов происходит на всей ее поверхности. Электрический ток ионов на частицу в рассматриваемом случае определяется формулой (3.1) (при всех $bQ < 0$).

Рассмотрим случай, когда в бесконечности выполняется неравенство $U_0 < bE_0$. Линии тока ионов для такого течения изображены на фиг. 6. Как видно из фиг. 6, направление движения ионов в бесконечности в данном случае противоположно направлению скорости газа. Ионы, линии тока которых лежат между линиями AM_+B и осью x (в плоскости Π), достигают поверхности частицы и оседают на нее на дуге BP . При этом электрический ток J , текущий на частицу, равен

$$(3.2) \quad J = - \int_{s'} qbE_n ds = -2\pi a^2 \int_{\theta_1}^{\pi} qv_r(a, \theta) \sin \theta d\theta = \\ = 2\pi q_0 [\Psi(a, \pi) - \Psi(a, \theta_1)] = 2\pi q_0 \left[-\frac{bQ}{\epsilon} - \Psi(r_{**}', \theta') \right]$$

Здесь θ_1, θ' — углы в плоскости Π , соответствующие точкам B и M_+ (фиг. 6). Функция тока Ψ определяется соотношением (1.4), а значения аргументов r_{**}', θ' находятся из уравнений

$$(3.3) \quad v_\theta(r_{**}', \theta') = 0, \quad v_r(r_{**}', \theta') = 0$$

Учитывая выражение (1.2) для v_θ , легко видеть, что в первое из этих уравнений величина θ' входит в виде множителя $\sin \theta'$, который можно сократить. В результате для определения r_{**}' по-прежнему получается уравнение (2.4). Зная r_{**}' , угол θ' можно легко найти из второго уравнения (3.3), используя выражение (1.1) для v_r (при $Q \neq 0$).

Для твердой частицы ($C_1 = C_2 = 1, r_{**}' = a$) это уравнение имеет особенно простой вид: $3bE_0 \cos \theta' + bQ/(\epsilon a^2) = 0$. Используем его, вычислим J :

$$(3.4) \quad J = 2\pi q_0 \left[-\frac{bQ}{\epsilon} + \frac{3}{2} bE_0 a^2 (1 - \cos^2 \theta') - \frac{bQ \cos \theta'}{\epsilon} \right] = \\ = 3\pi a^2 q_0 bE_0 \left(1 - \frac{Q}{3\epsilon E_0 a^2} \right)^2$$

Для частицы, несущей противоположный ионам заряд с большей абсолютной величиной, дуга BP увеличивается. Точка B при этом движется по поверхности частицы справа налево. Она совместится с точкой F , если на поверхности частицы будет распределен заряд $Q = -3\epsilon E_0 a^2$. При указанной или большей абсолютной величине заряда частицы, противоположного заряду ионов, оседание ионов будет происходить на всей ее поверхности. Ток ионов на частицу в данном случае определяется формулой (3.1) (при $bQ < -3\epsilon bE_0 a^2$).

Пусть теперь заряд частицы Q имеет знак, совпадающий со знаком заряда ионов ($bQ > 0$). Картины линий тока поля $\mathbf{v} = \mathbf{U} + b\mathbf{E}$ в этом случае легко получить зеркальным отражением относительно оси y рассмотренных выше течений вблизи частицы, несущей противоположный ионам заряд Q , с последующим изменением движения ионов на обратное (операция обращения времени). Распределение плотности заряда q таким способом, однако, не получается. А именно каверны (где $q = 0$) ограничены образами кривых AL_+ и осью x (см. фиг. 4, 5), а не BL_- . Поэтому при $bE_0 < U_0$ электрический ток J на частицу, имеющую заряд того же знака, что и заряд ионов ($bQ > 0$), равен нулю.

При $bE_0 > U_0$ каверна ограничена образом кривой AM_+B' и осью x (см. фиг. 6). Вне каверны плотность электрического заряда ионов по-прежнему равна q_0 .

Следовательно, в этом случае ($bE_0 > U_0$, $bQ > 0$) электрический ток J равен нулю при $bQ \geq 3\epsilon bE_0 a^2$ и определяется последним выражением (3.2) (или выражением (3.4) для твердой частицы) при $0 \leq bQ < 3\epsilon bE_0 a^2$.

Авторы благодарят Л. И. Седова и В. В. Гогосова за полезное обсуждение настоящей работы.

Поступила 27 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1973.
2. Гогосов В. В., Полянский В. А. Электродинамика: задачи и приложения, основные уравнения, разрывные решения. Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа, т. 10. М., Изд-во ВИНТИ, 1976.
3. Соу С. Динамика заряженных суспензий. В сб. Реология суспензий. М., «Мир», 1975.
4. Whipple F. J., Chalmers J. A. On Wilson's theory of the collection of charge by falling drops. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 1944, vol. 70, No. 304.
5. Левин Л. М. О коагуляции заряженных облачных капель. Докл. АН СССР, 1954, т. 94, № 3.
6. Красногорская Н. В. Исследование процессов электризации частиц облаков и осадков. Изв. АН СССР, Сер. геофиз., 1960, № 1.
7. Ушаков В. В. К теории зонда Сато в электрогазодинамике. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 3.
8. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., «Мир», 1976.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.