

**ТРАНСЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ОКОЛО КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ
В КАНАЛАХ С ПРОНИЦАЕМЫМИ ГРАНИЦАМИ**

А. А. БЛЫНСКАЯ, Ю. Б. ЛИФШИЦ

(Москва)

Рассматриваются плоские трансзвуковые течения газа около крылового профиля, помещенного в рабочую часть аэродинамической трубы с перфорированными стенками. Значения параметров потока определяются путем численного решения некоторой краевой задачи для уравнения потенциала скорости, которая моделирует течение газа около профиля в канале с пористыми границами. Полученные результаты используются затем для построения асимптотической теории влияния высоты аэродинамической трубы и числа M_∞ потока в ней на характеристики обтекания профиля.

1. Пусть ось x декартовой системы координат x, y совпадает с осью симметрии канала и направлена вдоль вектора скорости потока на бесконечности. Профиль крыла имеет длину L и относительную толщину τ , причем $\tau \ll 1$. Он расположен вдоль оси x под некоторым малым установочным углом атаки α к ней. Стенки канала являются параллельными прямыми, и расстояние между ними равно H . Скорость набегающего потока газа мало отличается от звуковой, сам же газ считается лишенным вязкости и теплопроводности.

При указанных предположениях для описания потока можно воспользоваться уравнениями теории малых возмущений трансзвуковых течений [1]. Согласно этой теории, векторное поле возмущений скорости относительно равномерного звукового потока вдоль оси x обладает потенциалом $\Phi(x, y)$, который представляется в виде

$$(1.1) \quad \Phi(x, y) = a \cdot L \tau^{2/3} \Phi'(x', y'; \tau), \quad x' = x/L, \quad y' = y\tau^{1/3}/L$$

где a — критическая скорость звука. Главный член разложения $\Phi'(x', y'; \tau)$ по τ удовлетворяет известному уравнению Кармана [1]

$$(1.2) \quad -(\kappa + 1) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

В нем κ — показатель адиабаты Пуассона. Штрихи же над всеми зависимыми и независимыми переменными в (1.2) и ниже опущены для сокращения записи.

Решение уравнения (1.2) удовлетворяет условию непротекания на профиле $Y = \tau L \tilde{y}^\pm(x)$. Согласно теории малых возмущений, оно сносится на отрезок оси $0 \leq x \leq 1$, вдоль которого расположен профиль, и имеет вид

$$(1.3) \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=\pm 0} = \frac{d\tilde{y}^\pm}{dx} - \frac{\alpha}{\tau}$$

Здесь верхние индексы \pm относятся соответственно к верхней и нижней поверхностям профиля.

Искомый потенциал $\Phi(x, y)$ удовлетворяет некоторому условию на проницаемых стенках канала, имеющих бесконечную длину и расположенных в переменных (1.1) при $y = \pm \tau^{1/2} H/2L$. Возьмем в качестве него линейное условие идеальной пористой стенки [2]

$$(1.4) \quad V_y = \pm (U_\infty - V_x) p_f$$

В (1.4) V_x и V_y — составляющие вектора скорости частиц вдоль координатных осей x и y , U_∞ — скорость невозмущенного потока, p_f — коэффициент проницаемости границы, а знаки \pm относятся соответственно к верхней и нижней стенкам канала. Физический смысл выписанного условия хорошо известен [2, 3]. Оно является точным при $p_f = 0$ и линеаризованным относительно отклонения границы от прямой линии при $p_f = \infty$. При промежуточных значениях p_f (1.4) соответствует модели протекания газа через пористую стенку согласно закону Дарси. Зависимость p_f от M_∞ , нужная для дальнейшего анализа, и коэффициента перфорации σ для конкретной перфорированной панели является внешним фактором по отношению к этой модели и должна определяться из дополнительных предположений либо экспериментально.

Условие (1.4) для стенки с перфорацией в виде щелей, поперечных невозмущенному потоку, было впервые получено в [4] непосредственным интегрированием линеаризованных уравнений движения. Если сжимаемость в этих уравнениях учитывать при помощи формулы Прандтля — Глауэрта, то p_f можно записать в виде

$$(1.5) \quad p_f = \sqrt{1 - M_\infty^2} \mu(\sigma)$$

где μ — некоторая функция коэффициента перфорации, различная для дозвуковой и сверхзвуковой скоростей невозмущенного потока.

Подставляя в (1.4) равенства (1.1) и (1.5) и ограничиваясь главным членом разложения по τ , получим искомое граничное условие для уравнения (1.2) при $y = \pm \tau^{1/2} H/2L$

$$(1.6) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \pm \left(K + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) K^{1/2} (\kappa + 1)^{1/2} \mu = 0, \quad K = \frac{2}{\kappa + 1} \frac{1 - M_\infty}{\tau^{1/2}}$$

Формула (1.6) верна для стенок с поперечными щелями при $K \gg 1$. Предположим, что (1.4) является интегралом линеаризованных уравнений движения газа и в случае пористой стенки при $M_\infty = 0$. Применяя далее к аналогичным уравнениям при $M_\infty \neq 1$ преобразование Прандтля — Глауэрта, получим (1.5) для пористой стенки.

Однако при $K \rightarrow 0$ формула (1.6) теряет смысл. Это связано с тем, что уравнение (1.2) инвариантно по отношению к преобразованию (1.1), а (1.4) не обладает таким свойством и не является следствием уравнений движения при указанном условии. Для получения трансзвукового аналога формулы (1.4) по крайней мере для стенки с поперечными щелями можно применить к (1.2) методику [4]. Результирующая формула весьма сложна, нелинейна и имеет локальный характер только в точках, где скорость частиц сверхзвуковая. Простейшим же локальным аналогом формулы (1.6) при $K = 0$, удовлетворяющим преобразованию подобия (1.1) и точным при сверхзвуковой скорости частиц, является равенство

$$(1.7) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \pm \mu_1(\sigma) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|^{1/2} \text{sign} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 0$$

Ниже будет показано, что зависимость параметров потока от M_∞ , установленная на основе асимптотического анализа решения задачи обтекания профиля с условием (1.7) только в окрестности звуковой точки гра-

ницы, совпадает с результатами численного расчета задачи (1.2), (1.3), (1.6). Поэтому использование (1.7) в известном смысле не является противоречивым.

Впервые численное решение задачи (1.2), (1.3), (1.6) было получено в работе [5], где для этой цели использовалась итерационная схема последовательной линейной верхней релаксации. Производные потенциала по x аппроксимировались центрированными разностями в точках, где уравнение (1.2) имеет эллиптический тип, и односторонними разностями в точках, где $\partial\Phi/\partial x > 0$. Вторая производная $\partial^2\Phi/\partial y^2$ всегда аппроксимировалась центрированной разностью. В работе [6] задача обтекания профиля в канале решалась для полного уравнения потенциала и граничное условие непротекания удовлетворялось на поверхности профиля. Построение решения содержало процедуру конформного отображения внешности профиля на внутренность единичного круга.

В предлагаемой работе также численно решается полное уравнение потенциала скорости. Граничное условие непротекания на профиле и условие (1.4), (1.5) на стенках канала выполняются на концентрических окружностях, ограничивающих кольцо, на которое конформно отображается область между профилем и стенками. Принимаются особые меры для выделения циркуляционной части потенциала и его бесконечных частей в точках, соответствующих бесконечности в физической области. Решение задачи получается при помощи итерационного метода последовательной линейной верхней релаксации. Разностная аппроксимация дифференциального оператора не дивергентна, но учитывает тип уравнения [7]. Граничное условие (1.6) аппроксимируется односторонними разностями, обеспечивающими диагональное преобладание. Полученное решение при $M_\infty = 0$ весьма удовлетворительно совпадает с данными асимптотической теории обтекания профиля в канале с проницаемыми стенками. При $\mu = 0$ метод Фурье дает точное решение задачи обтекания профиля несжимаемой жидкостью. Оно также было использовано для проверки точности разностной схемы.

2. Из (1.2) соотношений (1.3) и (1.6) следует, что потенциал возмущений зависит от трех параметров: K , $\tau^{1/2}H/2L$ и μ . Цель настоящей работы — определение характера этой зависимости, когда первый из указанных параметров стремится к нулю, а второй — к бесконечности. Рассматриваемая задача относится к классу задач обтекания профиля, в которых условия на бесконечности мало отличаются от условий равномерного звукового потока. Метод их анализа был разработан в [8-11]. В первых трех из них выяснено влияние параметра подобия $K \neq 0$ на характеристики трансзвукового течения около профиля. В работе [11] рассмотрено обтекание крыла большого удлинения и установлена зависимость параметров потока от удлинения.

Воспользуемся указанным методом для первоначального анализа задачи. Представим искомый потенциал в виде суммы [3]

$$(2.1) \quad \Phi = \varphi(x, y) + \delta(K)\varphi'(x, y) + \varepsilon(\tau^{1/2}H/2L)\varphi''(x, y; K, \mu)$$

В ней $\varphi(x, y)$ — потенциал безграничного потока со звуковой скоростью на бесконечности, сумма первых двух членов — решение задачи обтекания профиля безграничным потоком с $K \neq 0$, последнее слагаемое учитывает влияние проницаемой границы, δ и ε — малые параметры, стремящиеся к нулю при $K \rightarrow 0$ и $\tau^{1/2}H/2L \rightarrow \infty$. Формула (2.1) справедлива лишь в некоторой конечной области, прилегающей к профилю. При достаточном удалении от профиля все слагаемые в (2.1) имеют один и тот же порядок.

Определение функций δ и ε основано на координатном разложении φ , φ' и φ'' в окрестности бесконечно удаленной точки. Согласно [12] пишем

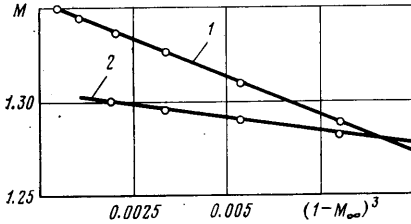
$$(2.2) \quad \varphi(x, y) = y^{2/5}\varphi_0(\xi) + \dots, \quad \xi = (x+1)^{-1/5}xy^{-1/5}$$

Функции φ' и φ'' на больших расстояниях зависят одинаково от x и y [8, 9]

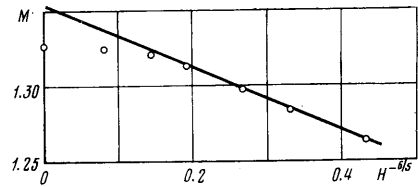
$$(2.3) \quad \varphi'/B_m' = \varphi''/B_m'' = y^{(m+2)/5}\chi_{m,0}(\xi) + \dots$$

Они различаются только коэффициентами B_m' и B_m'' . Причем для заданного профиля B_m' — постоянная величина, а B_m'' зависит от K и μ . В работах [8, 9] показано, что $m=6$ для области, расположенной перед скачком уплотнения, и $m=1$ для области потока за ним.

Подставим теперь формулы (2.2) и (2.3) в (2.1) и определим искомые функции δ и ε либо при помощи принципа срачиваемых асимптотических разложений [3, 9, 11], либо пользуясь тем, что уравнение для потенциала (1.2) инвариантно по отношению к преобразованию подобия (1.1)



Фиг. 1



Фиг. 2

[8], причем оба подхода эквивалентны [10]. В результате получим

$$(2.4) \quad \delta = K^{m/2}, \quad \varepsilon = (\tau^{1/5} H / 2L)^{-m/5}$$

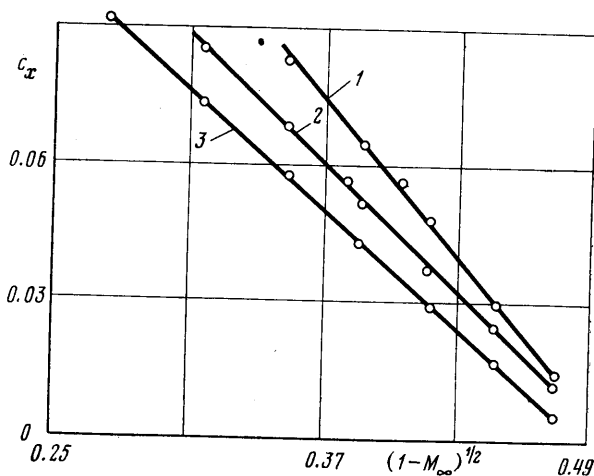
Формулы (2.1) и (2.4) показывают, что влияние проницаемой границы изменяет потенциал течения около профиля на величину, пропорциональную $(\tau^{1/5} H / 2L)^{-9/5}$ перед скачком уплотнения, и на величину порядка $(\tau^{1/5} H / 2L)^{-1/5}$ в области за скачком уплотнения по сравнению с его значением при обтекании профиля безграничным потоком с заданным K . Этот вывод справедлив только в области течения, где равенство (2.1) имеет место. В случае обтекания тел вращения приведенные в [3] расчеты показывают, что формула, аналогичная (2.1), верна во всех точках тела. В плоском случае возникает несколько иная ситуация.

Рассмотрим некоторые результаты расчетов обтекания симметричного профиля Жуковского под нулевым углом атаки с $\tau \approx 0.12$ и $L=1$ в каналах с различными значениями H , μ и M_∞ . Профиль расположен вдоль оси симметрии канала, начало координат выбрано в точке передней кромки профиля.

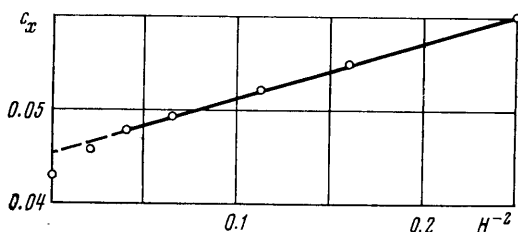
На фиг. 1 точками отмечены значения числа M в точке профиля с абсциссой $x=0.3222$ в зависимости от величины $(1-M_\infty)^3$. Кривая 1 относится к безграничному потоку, кривая 2 получена при $H=3$ и $\mu=0.5$. Линии 1 и 2 являются прямыми, что свидетельствует о стабилизации параметров потока перед скачком уплотнения. Однако наклон этих прямых и расстояние от начала координат зависят от H и μ . В частности, при $\mu=0$ и K , меньших блокирующего значения K_1 , соответствующая прямая вообще расположена параллельно оси абсцисс.

На фиг. 2 нанесены числа M в точке профиля с $x=0.3222$ при $M_\infty = 0.850$, $\mu=2$ и различных H . Вдоль оси абсцисс в соответствии с (2.1) и (2.4) отложено $H^{-0.5}$. Через точки при $H \leq 4$ проведена прямая, которая пересекает ось $H=\infty$ при числе M , соответствующем течению с $K=0$, $H=\infty$. Это означает, что в рассмотренных режимах второе слагаемое в (2.1) значительно меньше третьего и лишь при $H > 4$ его вклад в величину скорости становится заметным.

Три линии фиг. 3 показывают, что зависимость коэффициента сопротивления s_x профиля от $K^{1/2}$ в ограниченном стенками и безграничном потоках является линейной. Кривые 1 и 2 относятся к случаю $H=3$, $\mu=0.5$



Фиг. 3



Фиг. 4

и 1, а кривая 3 взята из работы [9] и соответствует $H=\infty$. На фиг. 4 приведен результат расчета c_x профиля в потоках с $M_\infty=0.850$ и $\mu=1$ при различных H . Изменение c_x при $H \leq 5$ оказывается пропорциональным H^{-2} и не описывается развитой выше теорией. Отклонение точек от прямой линии при $H=7$ и ∞ объясняется, вероятно, членами порядка $H^{-5/2}$, которые становятся на этих расстояниях сравнимыми с членами, пропорциональными H^{-2} . Согласно формулам (2.1) и (2.4), потенциал за скачком уплотнения, положенные скачка, а следовательно, и c_x должны изменяться пропорционально $H^{1/2}$. В осесимметричных течениях [3] совпадение аналогичной теории и расчетов имело место.

3. Уточним теорию для случая режимов, когда второе слагаемое в (2.1) много меньше третьего и зависимость потенциала от K определяется именно этим слагаемым. Представим потенциал в виде

$$(3.1) \quad \Phi = \varphi(x, y; \mu, \tau^{1/2}H/2L) + \delta_1(K)\psi'(x, y; \mu, \tau^{1/2}H/2L)$$

Здесь ψ — потенциал течения в канале при $K=0$, δ_1 — малый параметр, стремящийся к нулю при $K \rightarrow 0$, а ψ' — некоторая добавочная функция, возникающая из-за вариации граничного условия на стенке при отклонении K от нуля.

Потенциал ψ в некоторой области, прилегающей к профилю, при $\tau^{1/2}H/2L \gg 1$ описывается формулами (2.1), (2.4), в которых нужно положить $K=0$. Это подтверждается данными расчетов, приведенными на фиг. 2. При $\mu=0$ и ∞ указанный результат был получен впервые в [13] на основе приближенного анализа. В работах [14, 15] он установлен путем точного решения соответствующих краевых задач в плоскости годографа.

При $\mu=0$ в канале реализуется блокирующий режим течения со скоростью на бесконечности, определяемой параметром подобия $K_1 = C(\tau^{1/2}H/2L)^{-2/3}$, где C — положительная постоянная, зависящая от формы профиля. При $\mu \neq 0$ скорость частиц при удалении на бесконечность стремится к критической. На стенке канала всегда существует звуковая точка O , в которую приходит начинающаяся на профиле звуковая линия. В точку O приходит с профиля характеристика C_-° и из точки O выходит вторая характеристика C_+° . Представление ψ формулой (2.1) справедливо, вообще говоря, только до C_+° -характеристики.

Предположим теперь, что в окрестности точки O на стенке канала выполняется граничное условие (1.7). Тогда при $\mu_1 \neq 0$ потенциал ψ в окрестности этой точки описывается автомодельным решением уравнения Кармана (1.2)

$$(3.2) \quad \psi = y^{3n-2} f_0(\xi), \quad \xi = (\kappa+1)^{-1/3} xy^{-n}, \quad n=3$$

Здесь взята локальная декартова система координат с началом в точке O и осью x , направленной вдоль стенки.

Функция $f_0(\xi)$ удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка. Существование группы преобразования подобия позволяет понизить его порядок и произвести полное исследование поведения интегральных кривых уравнений. Для этой цели используется также переход к переменным годографа, в которых решение (3.2) имеет алгебраический вид [16]. Результаты такого анализа приведены в [17]. Они показывают, что решение вида (3.2) при $\mu_1 \neq 0$ существует, единственно и аналитично вдоль C_-° -характеристики. Вдоль C_+° -характеристики в нем появляются разрывы четвертых производных потенциала по координатам. При $\mu_1 = \infty$ решение аналитично и на C_+° -характеристике. Скачки уплотнения в решении (3.2) во всей окрестности точки O отсутствуют.

Вниз по потоку от C_+° -характеристики скорость на стенке канала сверхзвуковая при $\mu_1 \neq \infty$ и звуковая, если $\mu_1 = \infty$. Поскольку в плоских потоках распространяющиеся вдоль характеристик возмущения не затухают, влияние стенки может привести в этой области к существенному отличию ψ от потенциала безграничного звукового потока ϕ . Именно этим, вероятно, объясняется результат, приведенный на фиг. 4. В сверхзвуковом потоке начальные условия на C_-° -характеристике быстро «забываются». В частности, при $\mu_1 = 2/3(\kappa+1)^{1/3}$ течение в характеристическом треугольнике, расположенном непосредственно за C_+° -характеристикой, является простой волной. В ней зависимость потенциала от координат x, y ничего общего с функцией ϕ не имеет.

Далее в поле течения расположен скачок уплотнения, который при $K=0$ может пересечь все линии тока и окончиться на стенке канала в точке O_1 . Если в некоторой окрестности O_1 на стенке выполняется условие (1.7) и в O_1 оканчивается только один скачок уплотнения, то при μ_1 , меньших некоторого числа μ_2 , он наклонен в точке O_1 к стенке под некоторым углом, зависящим от μ_1 , и имеет конечную интенсивность. Течение за скачком дозвуковое. Эти выводы непосредственно следуют из анализа совместности условий Гюгонио на фронте скачка и (1.7), который проще всего проводить в плоскости годографа. В численных расчетах течений с $K > 0$ наблюдалась именно такая ситуация.

Однако при $\mu_1 \neq 0$ на некотором расстоянии от скачка скорость потока вдоль стенки снова должна стать сверхзвуковой, так как в противном случае нельзя удовлетворить уравнению неразрывности. Другие непротиворечивые возможности представляют конфигурация течения со скачком уплотнения, оканчивающимся внутри потока, и приход скачка на стенку с нулевой интенсивностью в O_1 . Оба эти случая возможны при любых μ_1 . В последнем из них потенциал $\psi(x, y)$ в окрестности O_1 описывается

автомодельным решением (3.2) с $n=11$. При $\mu_1=\infty$ оно было построено в [18]. При других μ_1 аналогичное решение также может быть получено изложенным в [18] методом, который опирается на предварительный анализ поля интегральных кривых и переход к переменным годографа.

4. Исследуем теперь поведение решения $\psi'(x, y)$ и установим вид функции $\delta_1(K)$ в различных областях течения. Для этого потребуются некоторые свойства функции $f_0(\xi)$. Подставим (3.2) в уравнение (1.2) и получим уравнение для $f_0(\xi)$:

$$(4.1) \quad \left(\frac{df_0}{d\xi} - 9\xi^2 \right) \frac{d^2 f_0}{d\xi^2} + 30\xi \frac{df_0}{d\xi} - 42f_0 = 0$$

Граничные условия для (4.1) записываются при $\xi \rightarrow \pm\infty$ и получаются подстановкой (3.2) в (1.7)

$$(4.2) \quad 7f_0 - 3\xi \frac{df_0}{d\xi} \pm \mu_1 (\kappa+1)^{-1/2} \left| \frac{df_0}{d\xi} \right|^{1/2} \text{sign} \left(\frac{df_0}{d\xi} \right) = 0$$

Пусть в окрестности точки O C_-° -характеристика, вдоль которой $df_0/d\xi = 9\xi^2$, имеет уравнение $\xi = \xi_1 = -1$. Этого всегда можно добиться деформацией координат. Тогда при $\mu_1 = \infty$ задача (4.1), (4.2) имеет решение [19]

$$(4.3) \quad f_0 = 9\xi^2 + 27\xi + 81/7$$

Все остальные интегральные кривые уравнения (4.1) имеют при $\xi = -1$ вторую производную $d^2 f_0/d\xi^2 = -6$ [17]. Вторая предельная характеристика C_+° также удовлетворяет уравнению $df_0/d\xi = 9\xi^2$ и определяется равенством $\xi = \xi_2$ (для интеграла (4.3) $\xi_2 = 3$). На ней вторая производная решения задачи (4.1), (4.2) $d^2 f_0/d\xi^2 = 6\xi_2$.

Будем искать $\psi'(x, y)$ вне некоторой окрестности точки O в виде

$$(4.4) \quad \psi' = y^{7-\nu} g_\nu(\xi) + \dots, \quad \nu > 0$$

Подставим сумму (3.1) со слагаемыми в форме (3.2) и (4.4) в исходное уравнение (1.2). В результате получим для $g_\nu(\xi)$ однородное линейное уравнение второго порядка

$$(4.5) \quad \left(\frac{df_0}{d\xi} - 9\xi^2 \right) \frac{d^2 g_\nu}{d\xi^2} + \left[\frac{d^2 f_0}{d\xi^2} + 6(5-\nu)\xi \right] \frac{dg_\nu}{d\xi} - (7-\nu)(6-\nu)g_\nu = 0$$

Граничные условия для g_ν записываются при $\xi \rightarrow \pm\infty$ и представляют собой линеаризованную форму (1.7). Для их получения воспользуемся асимптотическим видом решения (4.5) при $|\xi| \rightarrow \infty$

$$(4.6) \quad g_\nu = A_\nu \xi^{(7-\nu)/3} + B_\nu \xi^{(6-\nu)/3}$$

При $\nu=0$ формула (4.6) дает поведение $f_0(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$. Подставим теперь (3.1) в (1.7) и воспользуемся (4.6). Получим искомое соотношение

$$(4.7) \quad B_\nu = \frac{7-\nu}{2} \mu_1 \left(\frac{7A_0}{3} \right)^{1/2} (\kappa+1)^{-1/2} A_\nu$$

Интегралы уравнения (4.5), удовлетворяющие при $\xi \rightarrow -\infty$ условию (4.7), проходят через особую точку $\xi = -1$. В ней одно линейно-независимое решение (4.5) является аналитической функцией, а другое возрастает как $(\xi+1)^{-2}$, причем коэффициенты при этих линейно-независимых решениях будут функциями числа ν . Поэтому ν следует выбрать таким образом, чтобы коэффициент при бесконечно возрастающем в окрестности $\xi = -1$ решении был равен нулю. Для этого воспользуемся методом, изложенным в [17] и примененным там для построения симметричного относительно оси x решения, аналитического вдоль C_-° -характеристики.

В результате получим искомый спектр $\nu=12p$ ($p=1, 2, \dots$). Первое число этого спектра $\nu=12$.

Чтобы установить зависимость $\delta_1(K)$, подвергнем решение (3.1) преобразованию подобия (1.1). При этом осуществляется переход от безразмерных переменных к исходным размерным. Уравнение Кармана (1.1) и условие (1.7) инвариантны по отношению к такому преобразованию, поэтому зависимость $\delta_1\psi'$ от τ и L определяется только зависимостью функции ψ от этих параметров. Применим теперь (1.1) к (3.2) и (4.4). Оказывается, что в преобразованное выражение для главного члена разложения ψ входит только произведение $\tau^3 L^{-6}$. Аналогичным свойством должен обладать и главный член слагаемого $\delta_1\psi'$. Отсюда сразу следует искомое соотношение $\delta_1(K) = K^{3/4}$.

Выше было получено минимальное значение $\nu=12$, поэтому параметры потока вне некоторой окрестности точки O и вверх по потоку от C_+ -характеристики изменяют свою величину пропорционально K^3 . Этот вывод является математической формулировкой закона стабилизации параметров в рабочей части аэродинамической трубы с проницаемыми стенками.

Решение (3.1) с $\delta_1=K^3$ неприменимо в окрестности стенки канала, где $\partial\Phi/\partial x=O(K)$. В этой области, имеющей поперечный размер порядка K , оно должно быть заменено другим решением, полученным из принципа асимптотического сращивания [20]. Согласно [20], в главном члене разложения решения при $K \rightarrow 0$ составляющие скорости в этой области не зависят от поперечной координаты. Вертикальная составляющая равна предельному значению соответствующей величины при приближении к стенке из внешней области, а продольная скорость получается из граничного условия на стенке.

При $\mu_1=\infty$ решение задачи (4.5), (4.7) дается простой формулой $g_{12} = (\zeta - \zeta_2)^{-2}$. При приближении к C_+ -характеристике $\zeta = \zeta_2$ оно становится бесконечно большим. Точно таким же свойством обладает решение при конечных μ_1 , что устанавливается непосредственным разложением $g_{12}(\zeta)$ в окрестности $\zeta = \zeta_2$. Это означает неприменимость формулы (3.1) с $\delta_1=K^3$ в окрестности C_+ -характеристики.

Для оценки влияния K на составляющие скорости в этой окрестности, граница которой отклоняется вверх по потоку от $\zeta = \zeta_2$ на величину порядка K^λ , воспользуемся решением (4.4) и уравнением характеристики, также расположенной в рассматриваемой области. При $K \neq 0$ C_+ -характеристика и соотношение вдоль нее задаются уравнениями

$$(4.8) \quad x = (\kappa+1)^{1/2} \zeta_2 y^3 [1 + K^\lambda p(y)]$$

$$(4.9) \quad \frac{dx}{dy} = -(\kappa+1)^{1/2} \left[y^4 \frac{df_0}{d\zeta} + K^3 y^{-8} \frac{dg_{12}}{d\zeta} \right]^{1/2}$$

Продифференцируем (4.8) по y и подставим полученное выражение в левую часть (4.9), а в правой части напишем вместо $dg_{12}/d\zeta$ главный член его разложения при $\zeta \rightarrow \zeta_2$. В полученном равенстве бесконечно малые члены имеют одинаковый порядок только при $\lambda=3/4$. В этом случае $p(y) = \text{const } y^{-3} |\ln y|^{1/4}$.

Таким образом, при малых $K \neq 0$ в присутствии проницаемой границы C_+ -характеристика отклоняется от своего положения в потоке с $K=0$ на величину, пропорциональную $K^{3/4}$. Составляющие скорости вдоль нее также отличаются от своих значений при $K=0$ на слагаемое, пропорциональное $K^{3/4}$. В области вниз по потоку от C_+ -характеристики, вообще говоря, нет особых точек, поэтому указанная зависимость параметров от K должна сохраниться и привести к изменению положения скачка уплотнения и коэффициента сопротивления профиля на величину порядка $K^{3/4}$. Однако имеющиеся расчетные данные или данные эксперимента не дают возможности надежно установить, изменяется ли коэффициент сопротивления пропорционально $K^{3/4}$ или $K^{1/2}$, как это следует из формул (2.1) и (2.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Von Kármán Th. The similarity law of transonic flow. J. Math. and Phys., 1947, vol. 26, No. 3.
2. Goethert V. H. Transonic wind tunnel testing. Oxf. Pergamon Press, 1961.
3. Лифшиц Ю. Б., Фонарев А. С. О влиянии границ потока на параметры трансзвуковых течений около тел вращения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 3.
4. Никольский А. А. О течениях газа с перфорированными границами. В кн. «Сверхзвуковые течения газа в перфорированных границах», гл. 4. М., «Машиностроение», 1967.
5. Murman E. M. Computation of wall effects in ventilated transonic wind tunnels. AIAA Paper, 1972, No. 1007.
6. Kasprzynski J. J. Transonic flow field past 2-D airfoils between porous wind tunnel walls with nonlinear characteristics. AIAA Paper, 1975, No. 81.
7. Лифшиц Ю. Б. К теории трансзвуковых течений около профиля. Уч. зап. ЦАГИ, 1973, т. 4, № 5.
8. Диесперов В. Н., Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С. Об обосновании закона стабилизации для крыловых профилей. Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 5.
9. Диесперов В. Н., Лифшиц Ю. Б. О структуре течения в области за ударной волной при трансзвуковом обтекании профиля. Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 3.
10. Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С. О трансзвуковых течениях около несущего крылового профиля. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 1.
11. Лифшиц Ю. Б. К теории крыла большого удлинения в трансзвуковом потоке газа. Уч. зап. ЦАГИ, 1977, т. 8, № 6.
12. Франкль Ф. И. Исследования по теории крыла бесконечного размаха, движущегося со скоростью звука. Докл. АН СССР, 1974, т. 57, № 7.
13. Гудерлей К. Г. Теория околосвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
14. Севостьянов Г. Д. Плоский околосвуковой поток газа вдали от профиля, находящегося в канале. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
15. Севостьянов Г. Д. Обтекание профиля звуковой свободной струей газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.
16. Фалькович С. В., Чернов И. А. Алгебраические автомодельные решения уравнений околосвукового плоского течения газа. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
17. Рыжов О. С. Исследование трансзвуковых течений в соплах Лавала. М., 1965 (АН СССР. Тр. Вычисл. центра).
18. Лифшиц Ю. Б. Об образовании скачков уплотнения у границы звуковой струи. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
19. Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С. О некоторых точных решениях уравнений трансзвуковых течений газа. Ж. вычис. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 5.
20. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.