

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА,
ВЫЗВАННЫХ РАСПРОСТРАНЕНИЕМ СКАЧКА ТЕМПЕРАТУРЫ
ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

О. И. МЕЛИХОВ, С. Б. ЩЕРБАК

(Москва)

На основе уравнений Навье – Стокса проведено численное изучение двумерных движений сжимаемого газа в замкнутой прямоугольной области в поле силы тяжести. Движение газа обусловлено распространением скачка температуры вдоль нижней границы области. Детально прослежен механизм образования вихревых структур и его особенности при различных скоростях движения скачка и различном соотношении сторон области. Методом установления получены различные стационарные решения задачи о конвекции в прямоугольной области, подогреваемой снизу. Реализация того или иного стационарного решения зависит от истории процесса. Задачи о конвективных движениях жидкостей и газов в замкнутых областях, подогреваемых снизу, в том числе вопросы неединственности стационарного решения, рассмотрены в монографии [1], обзоре [2].

1. Рассматриваются нестационарные двумерные движения вязкого, теплопроводного сжимаемого газа в замкнутой прямоугольной области $0 \leq x \leq H_0$, $0 \leq y \leq L_0$ в присутствии силы тяжести, направленной вдоль оси y . В начальный момент времени газ находится в покое при постоянной температуре T_0

$$(1.1) \quad u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0, \quad T(x, y, 0) = T_0, \quad \partial p / \partial y = -\rho g$$

Здесь u и v – проекции вектора скорости газа на оси x и y соответственно, T – температура, p – давление, ρ – плотность газа, g – ускорение свободного падения. Газ считается совершенным, подчиняющимся уравнению состояния

$$(1.2) \quad p = R_0 \rho T$$

где R_0 – газовая постоянная.

С момента времени $t=0$ вдоль поверхности $y=0$ от левой границы области начинает распространяться скачок температуры с заданной скоростью u_0

$$(1.3) \quad T(x, 0, t) = T_0 + T_1 \theta(u_0 t - x), \quad T_1 > 0$$

$$(\theta(\xi) = 0, \xi < 0; \theta(\xi) = 1, \xi \geq 0)$$

После достижения скачком правой границы на поверхности $y=0$ устанавливается постоянное значение температуры

$$(1.4) \quad T(x, 0, t) = T_0 + T_1, \quad t > H_0 / u_0$$

Выберем в качестве характерного пространственного масштаба величину L_0 , в качестве характерной скорости величину $\sqrt{L_0 g}$, за характерный масштаб температуры и плотности возьмем величины T_0 и ρ_0 (ρ_0 –

плотность газа у поверхности $y=0$ в начальный момент времени) соответственно, а за масштаб давления величину $R_0 \rho_0 T_0$.

Внутри области движение газа описывается уравнениями, которые в безразмерных переменных имеют вид

$$(1.5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\gamma M^2 \rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re } \rho} \left[\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right]$$

$$(1.6) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - 1 - \frac{1}{\gamma M^2 \rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re } \rho} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right]$$

$$(1.7) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = - \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$(1.8) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = - (\gamma - 1) \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\gamma}{\text{Re Pr } \rho} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right]$$

$$(1.9) \quad p = \rho T$$

Безразмерные масштабные комплексы, входящие в уравнения (1.5)–(1.9), выражаются через характерные величины следующим образом:

$$(1.10) \quad M = \sqrt{\frac{L_0 g}{\gamma R_0 T_0}}, \quad \text{Re} = \frac{L_0 \sqrt{L_0 g \rho_0}}{\eta}, \quad \text{Pr} = \frac{\eta c_p}{\lambda}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

где η — динамическая вязкость, λ — теплопроводность, c_p и c_v — теплоемкости газа при постоянном давлении и объеме соответственно, соответствующее число Рейля выражается формулой $\text{Ra} = \text{Pr Re}^2 T_1/T_0$.

В отличие от полных уравнений Навье — Стокса в уравнениях (1.5)–(1.9) сделаны следующие допущения: коэффициенты переноса η и λ полагаются постоянными, в уравнении (1.8) отсутствует диссипативная функция.

В задаче есть еще геометрический критерий и два критерия, характеризующих температурный скачок,

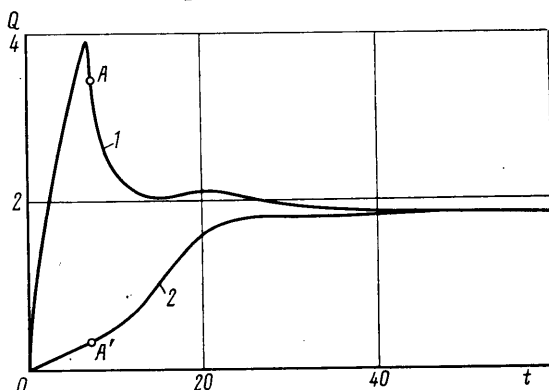
$$(1.11) \quad H = H_0/L_0$$

$$(1.12) \quad T_a = T_1/T_0, \quad \Delta = u_0/\sqrt{L_0 g}$$

В расчетах в качестве граничных условий для скорости использовалось условие прилипания $u=v=0$, температура верхней стенки считалась постоянной $T(x, 1, t)=1$, а боковые стенки теплоизолированными $\partial T/\partial x=0$.

2. Для численного решения уравнений использовался метод, предложенный в работе [3]. Расчеты проводились на равномерной сетке с пространственным шагом $h=0.05$ и временным шагом τ , удовлетворяющим условию $K=8$ ($K=\tau/Mh$ — число Куранта). Для контроля за точностью расчетов постоянно проверялось выполнение законов сохранения массы и энергии, проводились расчеты на более мелкой сетке ($h=0.025$) и с шагом по времени, отвечающим условию $K=4$.

Один из вариантов был рассчитан по схеме [2] с $K=1$. Все проверки свидетельствовали о независимости интегральных и локальных характеристик рассматриваемых движений от свойств схемы, выбора пространственного и временного шагов, что говорит о надежности полученных результатов. Для иллюстрации результатов расчетов использовался графопостроитель, при помощи которого строились мгновенные поля скоростей



Фиг. 1

и температур, в процессе счета также рассчитывались тепловые потоки на верхнюю и нижнюю стенки, которые удобно характеризовать величинами

$$(2.1) \quad Q_+ = Q(0), \quad Q_- = Q(1)$$

$$(2.2) \quad Q(y) = \frac{1}{T_a H_0} \int_0^H \frac{\partial T}{\partial y} dx$$

Здесь Q_+ и Q_- фактически являются числами Нуссельта.

Все программы были написаны на языке FORTRAN-IV для ЭВМ ЕС-1040. Время расчета 400 временных слоев на сетке 21×21 ($h=0.05$) составляло 10 мин.

3. Для расчетов были выбраны следующие значения безразмерных параметров:

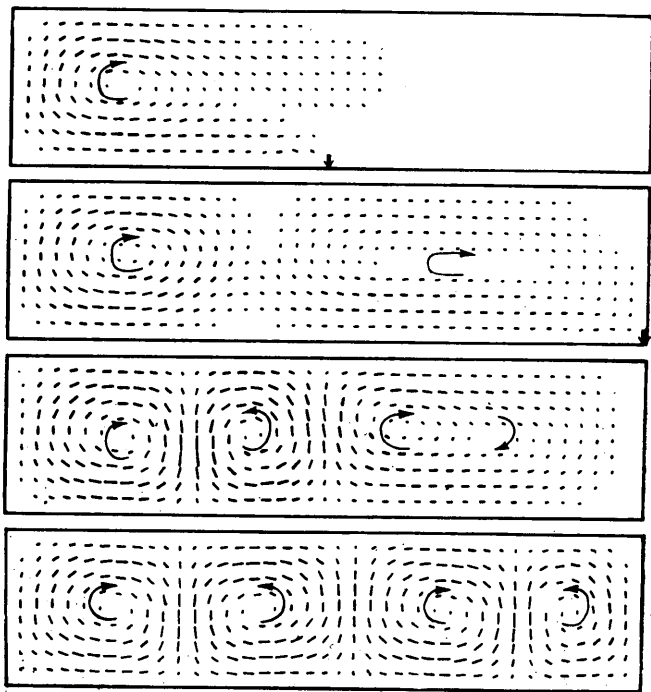
$$(3.1) \quad M=1/\sqrt{20}, \text{ Re}=130, \text{ Pr}=1, \gamma=1.4, T_a=0.5 \text{ (Ra}=8450)$$

Параметры H и Δ варьировались следующим образом: для каждого из четырех значений $H=1, 2, 4$ и 8 рассчитывались варианты с тремя значениями Δ

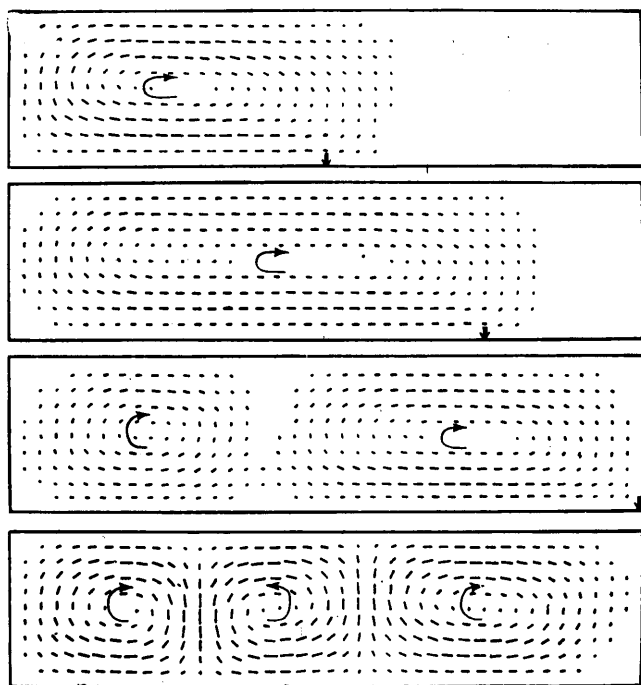
$$(3.2) \quad \Delta_1=0.14, \Delta_2=0.07, \Delta_3=0.035$$

(при $\Delta=\Delta_1$ скорость скачка температуры в 32 раза меньше скорости звука в холодном газе и примерно в полтора раза меньше максимальных скоростей газа, наблюдаемых во время установления стационарного состояния).

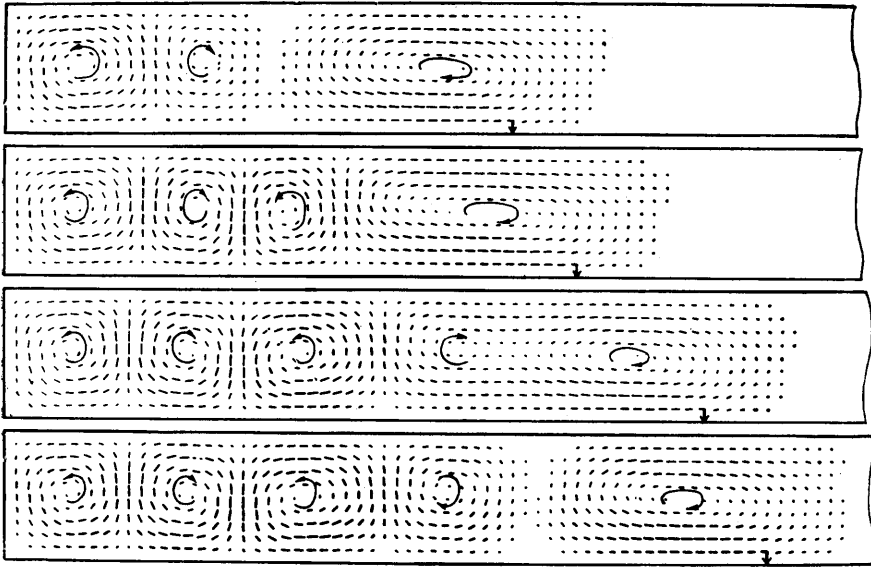
В расчетах вариантов с $H=1$ (сетка 21×21) при всех значениях Δ в области происходило образование одного вихря с положительным вращением (по часовой стрелке). Во время движения скачка температуры поля течения газа при разных значениях Δ отличались друг от друга лишь некоторыми незначительными деталями. При установлении во всех случаях получалась одна и та же картина движения. На фиг. 1 ($\Delta=\Delta_1$) представлены зависимости $Q_+(t)$ (кривая 1) и $Q_-(t)$ (кривая 2). Отрезки кривых



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

OA и OA' соответствуют прохождению скачком от левого конца области до правого. Далее происходит установление стационарного состояния.

В серии расчетов с $H=2$ (сетка 41×21) при всех Δ во время движения скачка в области образовывался один вихрь с положительным вращением, который после достижения скачком правой стенки занимал всю область.

Далее, во время установления стационарного состояния, в области образовывался второй вихрь, который вращался против часовой стрелки. Этот вихрь зарождался при $\Delta=\Delta_1$ около нижней границы $y=0$ на расстоянии 0.2 от правой боковой стенки, а при $\Delta=\Delta_2$ и Δ_3 около верхней границы $y=1$ на расстоянии 0.2 от левой боковой стенки. Установившаяся картина движения состояла из двух одинаковых по размерам вихрей с противоположным вращением, при этом в случае $\Delta=\Delta_1$ газ в центре области двигался вниз, а при $\Delta=\Delta_2$ и Δ_3 — вверх.

Варианты с $\Delta=\Delta_1$ и $\Delta=\Delta_2$ были рассчитаны также на сетке 81×41 ($h=0.025$) с $K=4$. Эти расчеты детально подтвердили результаты, полученные на основной сетке. Таким образом, для $H=2$ в зависимости от скорости движения скачка возможны два различных стационарных решения.

В области с $H=4$ (сетка 81×21) было обнаружено уже три физически различных стационарных состояния. Здесь расчеты были проведены в более широком диапазоне скоростей, которые показали, что при больших скоростях скачка, куда входит величина Δ_1 , образуется стационарное состояние с четырьмя вихрями, при средних значениях скорости скачка, куда входит величина Δ_2 — с тремя вихрями, при медленных скоростях, куда входит величина Δ_3 , снова образуется стационарное состояние с четырьмя вихрями, однако в этом случае газ у боковых стенок движется вниз, в то время как при больших скоростях вверх.

Для случая $\Delta=\Delta_1$, процесс вихреобразования иллюстрируется на фиг. 2, на которой представлены поля скоростей в моменты времени $t=14.3, 28.6, 42.9, 85.8$ (положение температурного скачка на нижней поверхности отмечено стрелкой).

Формирование вихревой картины при $\Delta=\Delta_2$ можно проследить на фиг. 3, где показаны поля скоростей в моменты времени $t=28.6, 42.9, 57.2, 85.8$.

В области с $H=8$ (сетка 161×21) расчеты были проведены только при трех значениях скорости скачка. При этом в рассматриваемой области образовалось 9, 7 и 8 вихрей в случаях $\Delta=\Delta_1$, Δ_2 и Δ_3 соответственно. На начальных стадиях движения скачка вихреобразование при каждом Δ происходило подобно случаю $H=4$ с тем же Δ . Затем вихреобразование принимало регулярный периодический характер, общий для всех Δ .

Именно в области за скачком наблюдалось две ярко выраженные зоны. Первая зона (вихревая) примыкала к левой боковой границе и состояла из вихрей с размерами, близкими к 1×1 . Между вихревой зоной и скачком температуры находилась переходная область, которая содержала в себе вытянутую вдоль горизонтали вихревую структуру. Переходная область двигалась вслед за скачком, не меняя существенно своих размеров. Вихревая зона постоянно порождала в ней вихри, в результате чего росли размеры вихревой области и количество вихрей в ней. На фиг. 4 показано образование очередных двух вихрей для случая $\Delta=\Delta_3$. Фигуры соответствуют моментам времени $t=114.4, 128.7, 157.3, 171.6$.

После достижения скачком правой стенки происходила эволюция переходной области. На ее месте образовалось три вихря при $\Delta=\Delta_1$ и один вихрь в случае $\Delta=\Delta_2$ и Δ_3 .

Отметим, что при распространении скачка внутри области ($H=8$) механизм вихреобразования был фактически универсальным и не зависел от скорости скачка, в то время как при $H=2$ и 4 расчетная область была недостаточно длинной для образования переходной области, и детальный механизм вихреобразования определялся положением боковых стенок и скоростью скачка.

Таким образом, в работе выявлены различные устойчивые стационарные решения. (Используемый в работе метод, основанный на точном решении нестационарной задачи, автоматически решал вопрос об устойчивости найденных стационарных состояний.)

Выход на то или иное стационарное состояние зависит от скорости движения скачка. Действительно, реализация того или иного стационарного состояния при данной геометрии области зависит только от начальных условий, которые всегда задавались одинаковые, и от скорости движения скачка, которая варьировалась в расчетах.

Подчеркнем еще раз, что правильный расчет того или иного устойчивого стационарного решения возможен только при использовании численного метода, позволяющего с достаточной точностью осуществлять расчет всего нестационарного процесса. Метод [3] в рассмотренном диапазоне изменения параметров удовлетворяет этому требованию.

Авторы выражают благодарность В. Б. Либровичу, Л. А. Чудову и Г. М. Махвиладзе за руководство и полезные обсуждения.

Поступила 9 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
2. Полежаев В. И. Численное исследование естественной конвекции жидкостей и газов. В сб.: Некоторые применения метода сеток в газ. динамике. Вып. 4, М., Изд-во МГУ, 1971.
3. Махвиладзе Г. М., Щербак С. Б. Разностная схема для численного исследования нестационарных двумерных движений сжимаемого газа. М., 1978 (Ин-т проблем мех. АН СССР. Препринт № 113).