МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 · 1980

УДК 532.72

ДВИЖЕНИЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ СОРБИРУЕМОЙ СМЕСИ С ПОВЫШЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ КОНЦЕНТРАЦИЙ ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ СРЕДУ

Л. К. ЦАБЕК

(Москва)

Проанализированы инвариантные решения гиперболической квазилинейной системы уравнений, к которой сведена система уравнений движения неизотермической сорбируемой смеси с повышенными значениями концентраций компонентов смеси при бесконечно больших значениях коэффициентов тепломассообмена.

Получены условия выпуклости, при выполнении которых в пористой среде реализуется режим бегущих волн.

Найдена система уравнений для определения концентраций сорбируемых компонентов смеси при реализации автомодельного режима расплывающихся волн. Для конечных значений коэффициентов тепломассообмена приведены выражения для расчета ширины стационарного фронта в режиме бегущих волн.

Движение сорбируемой смеси через состоящую из пористых зерен пористую среду в потоке инертного (несорбируемого) газа или жидкости (инертного носителя) в изотермическом случае рассматривалось в работах [1, 2], а в неизотермическом – в работе [3]. При малых концентрациях сорбируемых веществ в инертном потоке движение сорбируемой смеси можно рассматривать как движение через насыщенную инертным потоком пористую недеформируемую среду.

При повышенных значениях концентраций сорбируемых компонентов движение сорбируемой смеси необходимо рассматривать с учетом переменной скорости фильтрации через пористую недеформируемую среду и кинетики сорбции (тепломассообмена внутри пористых зерен при наличии на границе раздела фаз физической сорбции) для каждого компонента смеси. Решение такой системы квазилинейных уравнений представляет теоретический и прикладной интерес при анализе процессов разделения веществ, ионов и других процессов [4].

1. Система уравнений движения для многокомпонентной сорбируемой смеси с учетом несжимаемости и слабой зависимости плотности жидкости от температуры включает соответственно уравнения непрерывности для каждого компонента смеси в отдельности, уравнение фильтрации в форме Дарси без учета скачка капиллярного давления, уравнение непрерывности для тепла в фильтрационном потоке, модельные уравнения кинетики массообмена внутри пористых зерен [2] и модельное уравнение теплообмена внутри пористых зерен

$$\frac{\partial c_i}{\partial t}+\frac{\delta\partial q_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(c_i u-mD_i(u)\frac{\partial c_i}{\partial x}\right)=0,\quad 1\leqslant i\leqslant n \tag{1.1}$$

$$u=-k/\mu(T,c)h(T,c)\,\mathrm{grad}\,p \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\delta m_1(T-\overset{*}{T})+\partial\left(Tu-m\chi(u)\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Big/\partial x+mm_2T=0, \tag{1.3}$$

$$x=mx_1,\quad \delta=\frac{1-m}{m}$$

$$\partial q_i/\partial t=\beta_i(f_i(c,\overset{*}{T})-q_i) \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \overset{*}{T}}{\partial t} = m_3(T-\overset{*}{T}) + \sum_{k=1}^{n} Q_k \frac{\partial q_k}{\partial t} \tag{1.5}$$

Здесь m — пористость; c_i — концентрация i-го компонента сорбируемой смеси в потоке; q_i — концентрация поглощенного твердой фазой пористого зерна вещества i-го компонента смеси; u — скорость фильтрации; k — коэффициент проницаемости; μ — вязкость сорбируемой смеси; h — относительная фазовая проницаемость; p — давление; $D_i(u)$ — коэффициент дисперсии [4, 5], учитывающий продольное эффективное перемешивание; χ — эффективный коэффициент температуропроводности [6]; β_i — коэффициент, учитывающий скорость массообмена внутри пористого зерна; m_1, m_3 — коэффициенты, учитывающие теплообмен между пористой средой и фильтрационным потоком; x_1 — истинное значение координаты; T, $\overset{*}{T}$ — относительная температура сорбируемой смеси и пористых зерен соответственно; m_2 — коэффициент, учитывающий теплообмен между пористой средой и внешней, Q_k — тепловой эффект сорбции; $f_i(c, \overset{*}{T})$ — термическое уравнение сорбции; n — число компонент в сорбируемой смеси.

Система уравнений движения (1.1)—(1.5) при произвольных начальных и граничных условиях может быть проинтегрирована только численно на ЭВМ. При бесконечно больших значениях коэффициент тепломассообмена

$$1/\beta_i = D_i = \chi = 1/m_1 = 1/m_3 = 0 \tag{1.6}$$

и при отсутствии теплообмена с внешней средой (адиабатический случай)

$$m_2 = 0 \tag{1.7}$$

система уравнений движения допускает различные инвариантные решения, которые представляют большой интерес для приложений [4].

Если в фильтрующейся смеси содержатся несорбируемые компоненты, то для этих компонентов

$$f_m(c, \overset{*}{T}) = c_m \tag{1.8}$$

2. При выполнении условий (1.6) система (1.1)—(1.5) превращается в гиперболическую

$$\partial(c_i+\delta f_i)/\partial t + \partial(uc_i)/\partial x = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{2.1}$$

$$\frac{(1+b^\circ)\partial T}{\partial t} + \frac{b^\circ \partial(uT)}{\partial x} + m_2 b^\circ T = \sum_{k=1}^{m} Q_k \frac{\partial f_k}{\partial t}, \quad b^\circ = m_3(\delta m_1)^{-1} \tag{2.2}$$

которая может допускать инвариантные решения при ступенчатых начальных и граничных условиях

$$c_i(x, 0) = c_i^* = \text{const}, \quad c_i(0, t) = c_i^0 = \text{const}, \quad T(x, 0) = T(0, t) = 0. \tag{2.3}$$

При движении сорбируемой смеси через предварительно насыщенную некоторыми компонентами смеси пористую среду суммарная концентрация компонентов смеси остается постоянной

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = c_0 = \text{const} \tag{2.4}$$

В случае ионного обмена условие (2.4) соответствует условно эквивалентности обмена ионов.

Просуммируем (2.1) и с учетом (2.4) запишем

$$\frac{\delta\partial R}{\partial t}+c_0\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad R=\sum_{k=1}^{n}f_k(c,\overset{*}{T}) \tag{2.5}$$

С помощью теории непрерывных групп Ли можно показать, что гиперболическая система квазилинейных уравнений (2.1)–(2.5) в адиабатическом случае (1.7) может допускать существование двух типов инвариантных решений: разрывных решений типа бегущих волн и непрерывных автомодельных решений типа расплывающихся волн

$$y=x-wt \tag{2.6}$$

$$\xi=x/t \tag{2.7}$$

В неадиабатическом случае при $m_2\neq0$ система уравнений движения может допускать только решения типа (2.6).

Гиперболическую систему (2.1)–(2.5) при $m_2=0$ запишем в матричном виде

$$A_{ik}\,\partial v_k/\partial t+uE_{ik}\,\partial v_k/\partial x=0,\quad v_k=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_{n-1}\\T\\u\end{pmatrix},\quad 1\leqslant i,\quad k\leqslant n+1 \tag{2.8}$$

$$a_{ii}=1+\delta\left(\frac{\partial f_i}{\partial c_i}-\frac{\partial f_i}{\partial c_n}\right)-$$

$$-\frac{c_i\delta}{c_0}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{\partial f_p}{\partial c_i}-\frac{\partial f_p}{\partial c_n}\right),\quad a_{ik}=\delta\left(\frac{\partial f_i}{\partial c_k}-\frac{\partial f_i}{\partial c_n}\right)-$$

$$-\frac{c_i\delta}{c_0}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{\partial f_p}{\partial c_i}-\frac{\partial f_p}{\partial c_n}\right),\quad 1\leqslant i,\quad k\leqslant n-1$$

$$a_{ni}=-\frac{1}{b^\circ}\sum_{k=1}^{n}Q_k\left(\frac{\partial f_k}{\partial c_i}-\frac{\partial f_k}{\partial c_n}\right)-\frac{T\delta}{c_0}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial c_i}-\frac{\partial f_k}{\partial c_n}\right)$$

$$a_{nn}=1+\frac{1}{b^\circ}-\frac{T\delta}{c_0}\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial f_p}{\partial T}-\frac{1}{b^\circ}\sum_{k=1}^{n}Q_k\frac{\partial f_k}{\partial T}$$

$$a_{in}=\frac{\delta\partial f_i}{\partial T}-\frac{c_i\delta}{c_0}\sum_{p=1}\frac{\partial f_p}{\partial T},\quad a_{i(n+1)}=a_{n(n+1)}=0$$

$$a_{(n+1)i}=\frac{u\delta}{c_0}\sum_{p=1}\left(\frac{\partial f_p}{\partial c_i}-\frac{\partial f_p}{\partial c_n}\right),\quad a_{(n+1)n}=a_{(n+1)(n+1)}=0,$$

$$e_{ik}=0,\ e_{ii}=1,\ 1\leqslant i,\ k\leqslant n+1$$

$$\mu_i=\mu_i(A_{km}),\quad \lambda_i=u/\mu_{(n-i)} \tag{2.9}$$

Так как $a_{k(n+1)}=0$, то одно из собственных значений $\mu_{(n+1)}=0$. Система (2.8) допускает существование различных инвариантных решений типа (2.6), (2.7), если (необходимое условие)

$$(2.10)\qquad 0=\mu_{(n+1)}<\mu_n<\mu_{(n-1)}<\ldots<\mu_2<\mu_1,$$
$$0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_{(n-1)}<\lambda_n$$

Отметим, что собственному значению $\mu_{(n+1)}=0$ соответствует решение системы (2.8) $v_k=\text{const}$ $(1\leqslant k\leqslant n+1)$. Для квазилинейных термических уравнений, имеющих вид

$$(2.11)\qquad f_i(c,T)=k_i s_i(T)c_i$$

условия (2.4) позволяют реализоваться режиму бегущих волн.

Характеристическое уравнение для определения собственных значений μ_k матрицы A_{ik} в случае (2.11) после преобразований запишем в виде

$$(2.12)\qquad 1=\frac{\delta}{c_0}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(c_i r_i-h_i)}{(\mu_i^*-\mu)}+\frac{\delta}{c_0}\frac{h^\circ}{(a-\mu)}=F(\mu)$$

$$a=1+\frac{1}{b_0}-\sum_{i=1}^{n} g_i c_i k_i\frac{\partial s_i}{\partial T},\qquad \mu_i^*=1+\delta k_i s_i$$

$$(2.13)\qquad \begin{gathered} g_i=Q_i/b^\circ+T\delta/c_0\\ r_i=k_i s_i-k_n s_n,\qquad h_i=\left(d_i b_i c_i+\frac{\delta}{c_0}\sum_{m=1}^{n-1}B_{im}\right)\bigg/\left(\mu_i^*-a\right)\\ b_i=c_0k_i\frac{\partial s_i}{\partial T}-\sum_{p=1}^{n}k_p c_p\frac{\partial s_p}{\partial T},\qquad d_i=g_n s_n k_n-g_i s_i k_i\\ B_{im}=c_i c_m(d_i-d_m)(\mu_m^*-\mu_i^*)^{-1}(b_i r_m-b_m r_i),\qquad B_{ii}=0,\qquad h^\circ=\sum_{i=1}^{n-1}h_i \end{gathered}$$

Так как [7] $s_i=\exp[-Q_i^\circ T/(1+T)]$, то

$$(2.14)\qquad \partial s_i/\partial T<0$$

Пронумеруем компоненты смеси таким образом, чтобы $r_i>0$. Можно показать, что для термических уравнений (2.11) с учетом предыдущего выполняются неравенства

$$(2.15)\qquad c_i r_i>h_i,\qquad F(0)<1$$

Уравнение (2.12) при выполнении неравенств (2.15) допускает существование n различных положительных корней

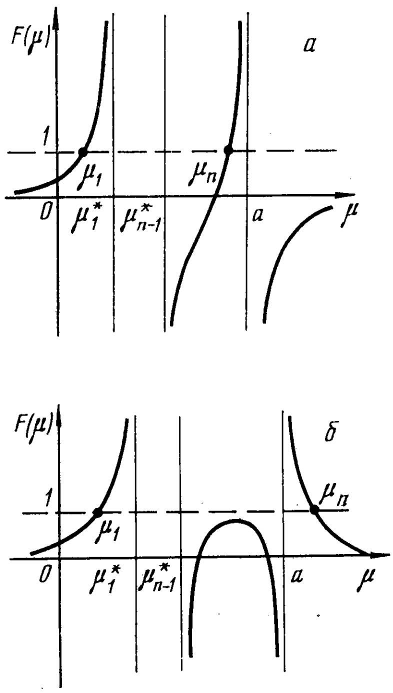
$$(2.16)\qquad 0<\mu_1<\mu_2<\ldots<\mu_n$$

Зависимость функции $F(\mu)$ показана для $\max\limits_{s}\mu_s^*<a$ на фиг. 1 (случай *а* соответствует $h^\circ>0$, случай *б* – $h^\circ<0$) и для $\min\limits_{s}\mu_s^*>a$ на фиг. 2 (случай *а* соответствует $h^\circ>0$, случай *б* – $h^\circ<0$). Для того чтобы кривая $F(\mu)$ пересекала горизонтальную прямую с ординатой, равной единице, и в интервале $a<\mu<\mu_1^*$ имела два корня, достаточно выполнения условий

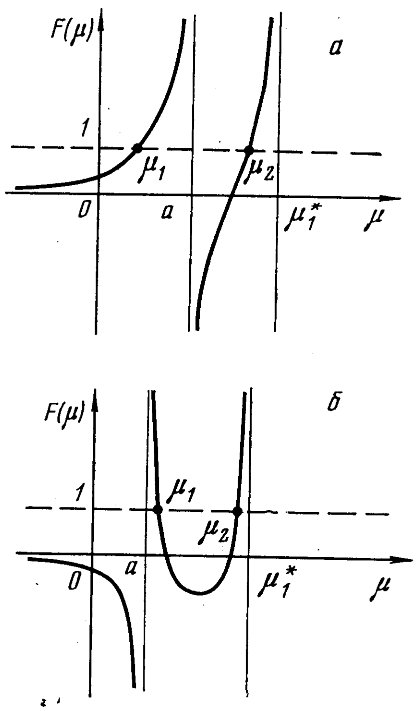
$$1 = {}^1/_2[F(\mu_1)+F(\mu_2)] > F(\mu_0), \quad \mu_0 = (\mu_1+\mu_2)/2 \tag{2.17}$$

Неравенство (2.16) с учетом (2.12) преобразуем к виду

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(c_i r_i - h_i)}{(\mu_i^* - \mu_0)(\mu_i^* - \mu_1)(\mu_i^* - \mu_2)} + \frac{h^\circ}{(a-\mu_0)(a-\mu_1)(a-\mu_2)} > 0 \tag{2.18}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

При нарушении неравенства (2.17) уравнение (2.12) в интервале $\mu^*_{(n-1)} < \mu < a$ корней не имеет. Следует отметить, что при $a > \mu_n$ (этот случай представлен на фиг. 1, *а*) неизотермический случай движения смеси превращается в изотермический, так как тепловая волна распространяется с большей скоростью, чем волна концентраций, и убегает вперед от волны концентраций.

Проанализируем достаточные условия существования решений типа (2.6) (условия выпуклости). Для разрывного решения $w_i^{(p)}$, соответствующего собственному значению λ_i, условия на разрывах (условия Гюгонио) следующие

$$w_i^{(p)} = \frac{[uc_k]}{[c_k+\delta f_k(c)]} = b^\circ[uT] \Big/ \left[(1+b^\circ)T - \sum_{k=1}^{n} Q_k f_k(c)\right] = c_0[u]/(\delta[R]), \tag{2.19}$$

$$y = x - w_i^{(p)}(t), \quad 1 \leqslant k \leqslant n \quad [c_k] = c_k^{(p+1)}(y\to-\infty) - c_k^{(p)}(y\to+\infty)$$

Для существования единственной интегральной кривой, соединяющей точки $A_i^{(p)}(v^{(p)})$, $A_i^{(p+1)}(v^{(p+1)})$, достаточно выполнения условий

$$\lambda_i(v^{(p)}) < w_i^{(p)} < \lambda_i(v^{(p+1)}), \quad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{2.20}$$

$$\lambda_{i-1}(v^{(p+1)})< w_i^{(p)}<\lambda_{i+1}(v^{(p)})$$

При переходе из точки $A_i^{(p+1)}$ в точку $A_i^{(p)}$ необходимо найти значения $c_k^{(p)}\cdot(1\leqslant k\leqslant n-1)$, $T^{(p)}$. С учетом уравнения (2.4) и неизвестных значений $u^{(p)}$, $u^{(p+1)}$ для перехода в точку $A_i^{(}$ необходимо определить $(n+2)$ неизвестных, которые находятся из системы (2.19) при условии, что величина $w_i^{(p)}$ известна. Каждая группа инвариантных решений, соответствующих данному собственному значению λ_k, определяется одним неизвестным параметром, которым в некоторых случаях может служить c_m^* (2.3). Условия (2.20) могут нарушаться в точке $A_i^{(p)}$ или в обеих точках одновременно. Если неравенство (2.20) в точке $A_i^{(p)}$ превращается в равенство, то система (2.19) дополняется уравнением

$$\lambda_i(v^{(p)})= w_i^{(p)} \tag{2.21}$$

которое позволяет найти из системы (2.20)–(2.21) неизвестные значения $c_k^{(p)}\cdot(1\leqslant k\leqslant n-1)$, $T^{(p)}$.

При выполнении условий (2.21) условия выпуклости в форме (2.20) не выполняются. Поэтому необходимо найти условия выпуклости в другой форме, для чего проанализируем алгебраические уравнения, полученные из интегрирования системы (2.1), (2.2), (2.5) в режиме бегущих волн

$$\begin{aligned} &uc_k-u^{(p+1)}c_k^{(p+1)}= w_i^{(p)}(c_k-c_k^{(p+1)}+\delta f_k(v)-\delta f_k(v^{(p+1)}))\\ &b^\circ(uT-u^{(p+1)}T^{(p+1)})= w_i^{(p)}\Big\{(1+b^\circ)(T-T^{(p+1)})-\\ &-\sum_{k=1}^{n}Q_k[f_k(v)-f_k(v^{(p+1)})]\Big\}\\ &c_0(u-u^{(p+1)})= w_i^{(p)}\delta[R(v)-R(v^{(p+1)})] \end{aligned} \tag{2.22}$$

В окрестности точки $A_i^{(p)}$ рассмотрим такие вариации скорости $\delta w^{(p)}$, при которых система уравнений (2.22) допускает единственное решение (условия в малом). и$^{(p)}$. Разлагая функции в уравнениях (2.22) в ряд Тейлора в окрестности точки $A_i^{i(p)}$ и ограничиваясь членами второго порядка малости, запишем

$$\delta w^{(p)}G_i =[u^{(p)}E_{ik}-w_i^{(p)}A_{ik}(v^{(p)})](v_k-v_k^{(p)}),\qquad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{2.23}$$

$$G_i=\left[c_i+\delta f_i(v)-\frac{c_i^{(p)}}{c_0}R(v)\right],$$

$$G_n=\left[\left(1+\frac{1}{b^\circ}\right)T-\frac{1}{b^\circ}\sum_{k=1}^{n}Q_kf_k-\frac{T^{(p)}}{c_0}R(v)\right]$$

$$H_i(v)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}G_{ikm}(v^{(p)})(v_k-v_k^{(p)})(v_m-v_m^{(p)})=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left[\frac{c_i^{(p)}}{c_0}L(R)-\delta L(f_i)\right](v_k-v_k^{(p)})(v_m-v_m^{(p)})+$$

$$+\frac{u^{(p)}}{w_i^{(p)}}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{n-1}(c_k-c_k^{(p)})(c_m-c_m^{(p)})+$$

$$+\frac{2}{c_0}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\partial R}{\partial c_k}-\frac{\partial R}{\partial c_n}\right)(c_k-c_k^{(p)})(T-T^{(p)})+\frac{2}{c_0}(T-T^{(p)})^2\frac{\partial R}{\partial T}$$

$$H_n(v)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}G_{nkm}(v^{(p)})(v_k-v_k^{(p)})(v_m-v_m^{(p)})=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}Q_pL(f_k)(v_k-v_k^{(p)})(v_m-v_m^{(p)})+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{n-1}L(R)(v_k-v_k^{(p)})(v_m-v_m^{(p)})-(T-T^{(p)})^2/b^\circ+$$

$$+\frac{2}{c_0}(T-T^{(p)})\left[(T-T^{(p)})\frac{\partial R}{\partial T}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\partial R}{\partial c_k}-\frac{\partial R}{\partial c_n}\right)(c_k-c_k^{(p)})\right],$$

$$L(R)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial c_k}-\frac{\partial}{\partial c_n}+\frac{\partial}{\partial T}\right)^2 R$$

В окрестности точки $A_i^{(p)}$, как следует из (2.22), (2.8), имеем

$$[u^{(p)}E_{ik}-w_i^{(p)}A_{ik}(v^{(p)})](v_k-v_k^{(p)})=0,\qquad 1\leqslant i,\quad k\leqslant n \tag{2.24}$$

Здесь E_{ik} – единичная матрица.

Из решения алгебраической системы (2.24) находим

$$v_m-v_m^{(p)}=(c_1-c_1^{(p)})R_m(v^{(p)}),\qquad R_m(v)=h_m^{(i)}(v)/h_1^{(i)}(v),\quad 2\leqslant m\leqslant n \tag{2.25}$$

Здесь $h_m^{(i)}(v)$ – правый собственный вектор матрицы A_{ik}, соответствующий собственному значению $\lambda_i=w_i^{(p)}$.

Подставим решения (2.25) в уравнения (2.23). Согласно предыдущему, при выполнении (2.21) единственная интегральная кривая, входящая в точку $A_i^{(p)}$, существует, если

$$H_i(v^{(p)})(v_i-v_i^{(p)})=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}G_{ikm}(v^{(p)})R_k(v^{(p)})R_m(v^{(p)})\times \tag{2.26}$$

$$\times R_i(v^{(p)})(c_1-c_1^{(p)})^3>0,\qquad 1\leqslant i\leqslant n$$

Если $H_i(v^{(p)})(v_i-v_i^{(p)})=0$, то в уравнениях (2.23) в ряду Тейлора необходимо ограничиться членами третьего порядка малости. Условие однозначности интегральной кривой, соединяющей точки $A_i^{(p)}$ и $A_i^{(p+1)}$ (условие в целом), представляет собой следующее экстремальное условие

$$w_i^{(p)}=\min_s w_i^{(s)} \tag{2.27}$$

Таким образом, условия выпуклости или условия существования, единственности и однозначности инвариантных решений типа (2.6) представляют собой условия (2.10), (2.20) или (2.10), (2.21), (2.26), (2.27). Если в точке $A_i^{(p+1)}$ выполняется равенство

$$\lambda_i(v^{(p+1)})=w_i^{(p)} \tag{2.28}$$

то условия выпуклости представляют собой (2.10), (2.21), (2.26) – (2.29)

$$H_i(v^{(p+1)})(v_i - v_i^{(p+1)}) < 0 \tag{2.29}$$

Можно показать, что условия выпуклости гиперболической системы (2.8) и системы (1.1) – (1.4) при $1/\beta_i \neq D_i \neq \chi \neq 1/m_1 \neq \dfrac{1}{m_3} \neq 0, m_2 = 0$ совпадают. Используя условия (2.21), (2.27), (2.28) и уравнения (2.19), можно построить эффективный алгоритм нахождения выпуклых областей концентраций и температур, для которых реализуется режим бегущих волн (2.6). Этот алгоритм основан на итерационном решении алгебраической системы уравнений (2.19), (2.21), (2.28) с дополнительным экстремальным условием (2.27).

Гиперболическая система уравнений (2.8) в узком смысле (2.10) может для вогнутых областей допускать автомодельные решения типа (2.7). Нетривиальные решения системы (2.8) в этом случае находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dv_k/d\xi = h_k^{(i)}(v)\left[\sum_{m=1}^{n+1}\left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial v_m}\right)h_m^{(i)}(v)\right]^{-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n \tag{2.30}$$

или системы

$$dv_m/dc_1 = R_m(v), \quad du/dc_1 = \lambda_i \sum_{k=1}^{n} a_{nk}(v) r_k^{(i)}(v), \quad 2 \leqslant m \leqslant n \tag{2.31}$$

$$\xi = u(c_1)/\lambda_i(c_1), \quad a_{nk} = \frac{u\delta}{c_0}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{\partial f_p}{\partial c_k} - \frac{\partial f_p}{\partial c_n}\right)$$

Из решения системы (2.31) можно найти распределение концентраций $c_k(\xi)$ и температуры $T(\xi)$ в пористой среде для режима расплывающихся волн (2.7).

3. Проанализируем решения типа бегущих волн (2.6) в неадиабатическом случае ($m_2 \neq 0$). Система уравнений (1.1) – (1.5) в неадиабатическом случае допускает решения (2.6) при конечных значениях коэффициентов тепломассообмена. Для простоты математических выкладок положим

$$\beta_i \neq 0, \quad D_i = 1/m_1 = 1/m_3 = 0 \tag{3.1}$$

С учетом (3.1) запишем систему (1.1) – (1.5) для режима бегущих волн в виде

$$(u - w_i^{(p)})dc_i/dy + c_i w_i^{(p)}\delta/c_0\, dR_0/dy = -\beta_i[f_i(v) - l_i(v)] \tag{3.2}$$

$$\left[u - w_i^{(p)}\left(1 + \frac{1}{b^\circ}\right)\right]\frac{dT}{dy} + Tw_i^{(p)}\frac{\delta}{c_0}\frac{dR_0}{dy} = \tag{3.3}$$

$$= -m_2 T + \frac{1}{b^\circ}\sum_{k=1}^{n} Q_k\beta_k[f_k(v) - l_k(v)]$$

$$T^{(p)} = T^{(p+1)} = 0, \quad R_0 = \sum_{k=1}^{n} q_k, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1$$

Функции $l_i(v) = q_i$ находятся из решений алгебраической системы уравнений

(3.4) $q_i=q_i^{(p)}+(u-w_i^{(p)})(c_i-c_i^{(p)})(\delta w_i^{(p)})^{-1}+c_i/c_0(R_0-R_0^{(p)})$

После преобразований запишем

(3.5) $l_m(v)=B_m(v)/B(v), \quad B_m(v)=\det B_{ik}^{(m)}, \quad B(v)=\det B_{ik}$

$$b_{ik}=-1, \quad b_{ii}=\left(\frac{c_0}{c_i}-1\right),$$

$$b_i=R_0^{(p)}-\frac{c_0}{c_i}[q_i^{(p)}+(\delta w_i^{(p)})^{-1}(u-w_i^{(p)})(c_i-\dot{c}_i^{(p)})]$$

Элементы матрицы $B_{ik}^{(m)}$ равны элементам матрицы B_{ik}, за исключением столбца m, который заменен на вектор b_m. В окрестности точки $A_i^{(p)}$ систему уравнений перепишем в матричном виде

$$B_{ik}(v^{(p)})\frac{\partial v_k}{\partial y}+P_{ik}(v^{(p)})(v_k-v_k^{(p)})=0, \; v_k=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ T \end{pmatrix}, \; 1\leqslant i, \; k\leqslant n$$

(3.6)

$$b_{ii}=\frac{u^{(p)}-w_i^{(p)}}{\beta_i}+\frac{c_i w_i^{(p)}\delta}{\beta_i c_0}\sum_{p=1}\left(\frac{\partial l_p}{\partial c_i}-\frac{\partial l_p}{\partial c_n}\right)$$

$$b_{ik}=\frac{c_i w_i^{(p)}\delta}{\beta_i c_0}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{\partial l_p}{\partial c_k}-\frac{\partial l_p}{\partial c_n}\right), \quad b_{in}=0$$

$$b_{ni}=Tb^\circ w_i^{(p)}\frac{\delta}{c_0}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{\partial l_p}{\partial c_i}-\frac{\partial l_p}{\partial c_n}\right), \quad b_{nn}=b^\circ u^{(p)}-(1+b^\circ)w_i^{(p)}$$

$$p_{ii}=\frac{\partial}{\partial c_i}(f_i-l_i)-\frac{\partial}{\partial c_n}(f_i-l_i), \quad p_{ik}\frac{\partial}{\partial c_k}(f_i-l_i)-\frac{\partial}{\partial c_n}(f_i-l_i).$$

$$p_{in}=\frac{\partial f_i}{\partial T}, \quad p_{ni}=\sum_{k=1}^{n-1}Q_k\beta_k p_{ki}+Q_n\beta_n\left[\frac{\partial(f_n-l_n)}{\partial c_i}-\frac{\partial(f_n-l_n)}{\partial c_n}\right]$$

$$p_{nn}=m_2 b^\circ-\sum_{k=1}^{n}Q_k\beta_k\frac{\partial f_k}{\partial T}$$

Из анализа системы уравнений (2.8) и (3.6) можно показать, что система уравнений (2.8) в изотермическом случае ($T=0$) и система (3.6) в неадиабатическом ($m_2\neq0$) случае допускают существование ($n-1$) инвариантных решений. Условия выпуклости в изотермическом и неизотермическом случаях совпадают и имеют вид (2.10), (2.20) или (2.10), (2.21), (2.26)–(2.29). Характеристическое уравнение для матрицы $B_{im}^{-1}P_{mk}$ (3.6) допускает n собственных значений, однако наибольшее собственное значение необходимо исключить из физических соображений. Следует отметить, что роль тепловых эффектов в режиме бегущих волн для неадиабатического случая сводится к увеличению ширины стационарного фронта $L_i^{(p)}$ по сравнению с изотермическим случаем. Равновесные значения концентраций $c_k^{(p)}$, $c_k^{(p+1)}$ в неадиабатическом и изотермическом случаях связаны условиями (2.19).

В неизотермическом случае, как следует из (2.2), зависимость температуры от концентрации линейная, а в изотермическом, как следует из уравнения (3.3) — нелинейная. Экстремальное значение температуры $T_*^{(p)}$ в случае монотонных термических функций можно приближенно оценить с помощью уравнения

$$(3.7) \qquad T_*^{(p)} m_2 b^\circ L_i^{(p)} \simeq 2 w_i^{(p)} \sum_{k=1}^{n} Q_k [f_k(c^{(p)}, 0) - f_k(c^{p+1}, 0)]$$

Экстремальное значение $T_*^{(p)}$ (y^*) лежит внутри интервала $y^{(p+1)} < y^* < y^{(p)}$.

4. Для конечных значений коэффициентов тепломассообмена

$$(4.1) \qquad 1/\beta_i \neq D_i \neq \chi \neq 1/m_1 \neq 1/m_3 \neq 0$$

в режиме бегущих волн систему уравнений (1.1)—(1.5) запишем в виде

$$(4.2) \qquad dv_k/dy = N_k(v), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n$$

Решения системы (4.2) при выполнении (4.1) будут монотонными. Представляет интерес найти ширину стационарного фронта $L_i^{(p)}$ для бегущей со скоростью $w_i^{(p)}$ волны. В окрестности точки A систему (4.2) перепишем в виде

$$(4.3) \qquad d(v_k - v_k^{(p)})/dy = M_{ki}(v^{(p)})(v_i - v_i^{(p)}), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n$$

Ширина стационарного фронта $L_i^{(p)}$ при выполнении условий (2.20) в основном определяется поведением интегральной кривой в окрестности точек $A_i^{(p)}$ и $A_i^{(p+1)}$, поэтому из (4.3) получим

$$(4.4) \qquad L_i^{(p)} = \{|\lambda_i^*(v^{(p)})|^{-1} + |\lambda_i^*(v^{(p+1)})|^{-1}\} \ln(1/\varepsilon)$$

Здесь λ_i^* — собственное значение матрицы M_{ki}^*, ε — точность расчета равновесных значений $v_k^{(p)}$, $v_k^{(p+1)}$.

Если в точке $A_i^{(p)}$ выполняется условие (2.21), то систему (4.2) в окрестности этой точки запишем в виде

$$(4.5) \qquad d(v_k - v_k^{(p)})/dy = \overset{\circ}{M}_{kjm}(v^{(p)})(v_j - v_j^{(p)})(v_m - v_m^{(p)}).$$

Отсюда ширина стационарного фронта равна

$$(4.6) \qquad L_i^{(p)} |\lambda_i^*(v^{(p+1)}|^{-1} \ln(1/\varepsilon) + \varepsilon^{-1}[M_0(v^{(p)})]^{-1}$$

$$M_0(v) = \min_{k,j,m} |M_{kjm}(v)|$$

Если в точках $A_i^{(p)}$ и $A_i^{(p+1)}$ выполняются условия (2.21), (2.28), то ширина стационарного фронта равна сумме вторых слагаемых в уравнении (4.6).

Режим бегущих волн при конечных значениях коэффициентов тепломассообмена (4.1) в некотором смысле является асимптотическим и реализуется при $t \geqslant t_*$, $x \geqslant x_*$. Численное интегрирование системы (1.1)—(1.5) показывает, что с погрешностью ε можно рассчитывать величины t_*, x_* из уравнений

$$x_* \simeq \sum_{i=1}^{n} L_i^{(p)}, \qquad t_* \simeq x_* [\min w_i^{(p)}]^{-1} \tag{4.7}$$

Численные решения системы (1.1)—(1.5) при выполнении условий (4.1) приближаются к автомодельным решениям (2.31) при $t \geqslant t^*$. С интегральной погрешностью ε величину t^* можно рассчитывать из уравнений

$$\begin{gathered} t^* \simeq \max_k | [dv_k/dy] (\varepsilon [v_k])^{-1} |, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n \\ [v_k] = v_k^{(p+1)} (y^{(p+1)}) - v_k^{(p)} (y^{(p)}), \\ \left[\frac{dv_k}{dy}\right] = \frac{dv_k}{dy} (y^{(p+1)}) - \frac{dv_k}{dy} (y^{(p)}) \end{gathered} \tag{4.8}$$

Используя уравнения (4.4), (4.6)—(4.8), можно определить величины x_*, t_*, t^*, определяющие границы реализации инвариантных решений типа бегущих (2.6) и расплывающихся волн (2.7) в пористой среде.

Поступила 2 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цабек Л. К.* Движение газовой смеси через пористую среду при наличии сорбции. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 5.
2. *Цабек Л. К.* Движение многокомпонентной сорбируемой смеси в пористой среде при наличии предварительного насыщения среды некоторыми компонентами смеси. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 1.
3. *Цабек Л. К.* Движение неизотермической многокомпонентной сорбируемой смеси в пористой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 3.
4. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. М., «Наука», 1969.
5. *Николаевский В. Н., Бондарев Э. А., Миркин М. И., Степанова Г. С., Терзи В. П.* Движение углеводородных смесей в пористой среде. М., «Недра», 1968.
6. *Аэров М. Э., Тодес О. М.* Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. Л., «Химия», 1968.
7. *Авгуль Н. Н., Киселев А. В., Пошкус Д. П.* Адсорбция газов и паров на однородных поверхностях. М., «Химия», 1975.