

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКИХ ВОЛН НА ПЛАВАЮЩЕМ
НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОМ
УПРУГОМ СТЕРЖНЕ

Е. П. КУДРЯВЦЕВ

(Москва)

В статье рассматривается взаимодействие идущих из бесконечности плоских волн с плавающим на поверхности жидкости бесконечно длинным упругим стержнем. Жидкость считается идеальной, глубина ее неограниченной. Предполагается, что отрыв стержня от жидкости не может иметь место. Определяются параметры проходящих через стержень и отраженных от него волн, находятся силовые факторы в поперечных сечениях стержня.

1. Будем считать, что набегающие на стержень плоские волны обладают потенциалом скоростей Φ_0 (фиг. 1), которому соответствуют волны с возвышением свободной поверхности ξ_0 :

$$(1.1) \quad \Phi_0 = -iH_0 g \sigma_0^{-1} \exp [i\sigma_0 t + kz - ik(x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon)]$$

$$(1.2) \quad \xi_0 = H_0 \exp [i(\sigma_0 t - xk \cos \varepsilon - yk \sin \varepsilon)]$$

$$k = \sigma_0^2 / g = 2\pi / \lambda = 2\pi c / \sigma_0$$

Здесь H_0 — комплексная амплитуда волн, σ_0 — частота колебаний частиц жидкости, k — волновое число, λ — длина волн, c — скорость движения фронта волн, g — ускорение силы тяжести. Волны движутся в направлении (см. фиг. 1), образуя угол ε с осью x неподвижной системы координат ($0 < \varepsilon < \pi/2$). Стержень не перемещается по поверхности жидкости. В формулах (1.1) и (1.2), как и в дальнейшем, в комплексных выражениях, содержащих экспоненциально-временной множитель, нужно рассматривать только действительную часть.

Набегающие волны вызовут появление на поверхности контакта стержня с жидкостью волн давления [1]

$$(1.3) \quad p(x, y, t) = P(x) \exp [i(\sigma_0 t - k_* y)], \quad k_* = k \sin \varepsilon$$

Неизвестную комплексную функцию $P(x)$ можно разложить в ряд Фурье на отрезке $(-b, +b)$ и представить в виде интеграла Фурье [1]

$$(1.4) \quad P(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp \left(i\pi n \frac{x}{b} \right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ilx) F(l) dl$$

$$(1.5) \quad F(l) = \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b P(\xi) \exp(il\xi) d\xi = \frac{2b}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{\sin(bl + \pi n)}{(bl + \pi n)}$$

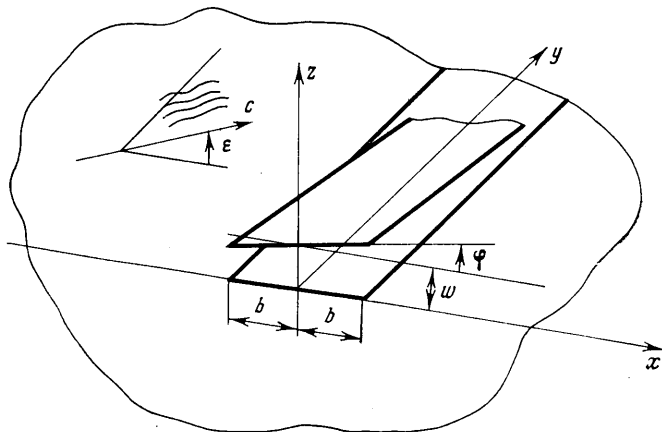
Потенциал скорости $\varphi(x, y, z, t)$ отыскиваемого движения жидкости бу-

дем искать в виде [1]

$$(1.6) \quad \varphi = \int_{-\infty}^{\infty} A(l) \exp \left[i(\sigma_0 t - k_* y - lx) + \sqrt{l^2 + k_*^2} z \right] dl$$

Потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа. Функцию $A(l)$ найдем из условия на поверхности

$$(1.7) \quad \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial t} \quad (z=0)$$



Фиг. 1

где ρ — плотность жидкости. Из (1.7), используя формулы (1.5) и (1.6), получаем

$$(1.8) \quad A(l) = \frac{i\sigma_0 b}{\pi \rho g (\sqrt{l^2 + k_*^2} - k)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{\sin(bl + \pi n)}{(bl + \pi n)}$$

Возвышение жидкости определим по формуле

$$(1.9) \quad \xi = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=0} = \frac{p(x, y, t)}{\rho g}$$

Используя соотношения (1.9), (1.5), (1.6), (1.8), получаем

$$(1.10) \quad \xi = \exp[i(\sigma_0 t - k_* y)] \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left\{ -\frac{\sigma_0^2 D_n(x)}{\pi \rho g^2} - \frac{\exp(i\pi n x/b)}{\rho g} \right\}$$

$$D_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b \sin(bl + \pi n) \exp(-ilx) dl}{(bl + \pi n) (\sqrt{l^2 + k_*^2} - k)}$$

Второе слагаемое под знаком суммы в формуле (1.10) обращается в нуль вне полосы $|x| < b$. Содержащиеся в (1.10) интегралы могут быть вычислены с помощью теории вычетов.

Представим $D_n(x)$ в виде суммы двух интегралов

$$(1.11) \quad D_n(x) = \sum_{s=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} Z_{ns}(l) dl$$

$$Z_{ns}(l) = (-1)^{s+1} b \frac{\exp\{i[(-1)^{s+1} bl - lx + (-1)^{s+1} \pi n]\}}{2i(bl + \pi n)(\sqrt{l^2 + k_*^2} - k)}$$

Функции $Z_{ns}(l)$ — двулистные функции комплексного переменного l . Каждая из них имеет точки разветвления на мнимой оси при $l = \pm ik$ и по три простых полюса на действительной оси при $l = l_j$ ($j=1, 2, 3$):

$$l_{1,2} = \pm k \cos \varepsilon, \quad l_3 = -\pi n / b$$

Функции Z_{ns} либо удовлетворяют условиям леммы Жордана, либо приводятся к функциям, удовлетворяющим условиям леммы Жордана, заменой переменного на $l_* = -l$.

Будем при интегрировании обходить точки разветвления, двигаясь вдоль мнимой оси [1]. Интегралы в (1.11) оказываются равными

$$(1.12) \quad \int_{-\infty}^{\infty} Z_{ns}(l) dl = \pm \frac{b}{2} \int_{\mp bk_*}^{\mp \infty} Y_{ns}(v) Y_n(v) dv \mp \sum_{j=1}^3 \pi i \operatorname{Res}[Z_{ns}(l), l_j]$$

$$Y_{ns}(v) = (-1)^s \exp\{v[(-1)^s + \eta] - (-1)^s i \pi n\}$$

$$Y_n(v) = (\pi n + iv)^{-1} [(-bk + i\sqrt{v^2 - (bk_*)^2})^{-1} - (-bk - i\sqrt{v^2 - (bk_*)^2})^{-1}]$$

$$\operatorname{Res}[Z_{ns}(l), l_j] =$$

$$= (-1)^{s+1} \frac{b \exp\{i[(-1)^{s+j} kb \cos \varepsilon - (-1)^s \pi n + (-1)^j \eta bk \cos \varepsilon]\}}{2i[(-1)^{j+1} \pi n + bk \cos \varepsilon] \cos \varepsilon} \quad (j=1, 2)$$

$$\operatorname{Res}[Z_{ns}(l), l_3] = \frac{(-1)^{s+1} b \exp(i \pi n \eta)}{2i[\sqrt{\pi^2 n^2 + (bk)^2} \sin \varepsilon - bk]}$$

$$\eta = x/b, \quad bl = \lambda = u + iv$$

Верхний или нижний знаки в (1.12) берутся при выполнении условий $\eta > 3 - 2s$ или $\eta < 3 - 2s$ соответственно.

На достаточно большом удалении от колеблющегося стержня первое слагаемое в (1.12) как при $s=1$, так и при $s=2$ становится пренебрежимо малым, вследствие этого интегралы (1.11) определяются только вычетами. Решение (1.10) в удаленных от стержня точках как при $x \rightarrow +\infty$ ($\zeta^{+\infty}$), так и при $x \rightarrow -\infty$ ($\zeta^{-\infty}$) оказывается совокупностью двух систем плоских волн:

$$(1.13) \quad \zeta^{(\pm\infty)} = \sum_{r=1}^2 \zeta_r^{(\pm\infty)} =$$

$$= \sum_{r=1}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{bk}{\rho g} \left[(-1)^s i \frac{\sin[(-1)^{r+1} (bk) \cos \varepsilon + \pi n]}{[(-1)^{r+1} (bk) \cos \varepsilon + \pi n] \cos \varepsilon} \times \right.$$

$$\left. \times \exp[i(\sigma_0 t - yk \sin \varepsilon - (-1)^{r+1} kx \cos \varepsilon)] \right]$$

При $r=1$ направление движения волн ($\zeta_1^{(+\infty)}$ и $\zeta_1^{(-\infty)}$) совпадает с направлением движения волны ζ_0 . Значение параметра β в (1.13) для набегающих на стержень волн следует принимать равным единице ($\beta=1$). Для волн, уходящих от стержня, параметр β равен двум ($\beta=2$).

2. Будем считать, что изгибные колебания стержня описываются уравнением [2]

$$(2.1) \quad \frac{EI}{m} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{m} \int_{-b}^b p(x, y, t) dx$$

Здесь EI — изгибная жесткость стержня (жесткость при изгибе в вертикальной плоскости), m — погонная масса стержня, w — прогиб, $p(x, y, t)$ — давление на стержень со стороны жидкости. Решение уравнения (2.1) с учетом (1.3) и (1.4) имеет вид

$$w = \frac{2b}{m} \frac{C_0}{EI m^{-1} k_*^4 - \sigma_0^2} \exp[i(\sigma_0 t - k_* y)]$$

Крутильные колебания стержня описываются уравнением [2]

$$(2.2) \quad GI_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - I_m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \int_{-b}^b p(x, y, t) x dx$$

Здесь GI_k — крутильная жесткость стержня, φ — угол поворота сечений, I_m — массовый момент инерции единицы длины стержня относительно оси y , p — давление на стержень со стороны жидкости. Решение уравнения (2.2) с учетом (1.4) может быть получено в виде

$$\varphi = \frac{b^3}{\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left[\frac{C_n}{n^2} (1 - i\pi n) e^{i\pi n} - (1 + i\pi n) e^{-i\pi n} \right] \frac{e^{i(\sigma_0 t - k_* y)}}{I_m \sigma_0^2 - GI_k k^2 \sin^2 \varepsilon}$$

Смещение точек подошвы стержня ζ_c , соприкасающейся с жидкостью, можно вычислять, как

$$\zeta_c = w + \varphi x$$

3. Движения стержня и жидкости будут совместными, если в каждой точке в пределах полосы $|x| < b$ возвышение жидкости ζ_f и смещение стержня ζ_c будут одинаковы [3]:

$$(3.1) \quad \zeta_f = \zeta + \zeta_1 + \zeta_2 = \zeta_c$$

Возвышение жидкости ζ_f в (3.1) определено, как сумма решения (1.10) и плоских волн ζ_1 и ζ_2 , отличающихся от волн (1.13) лишь значением фаз и амплитуд:

$$\zeta_j = U_j \exp [i(\sigma_0 t - yk \sin \varepsilon + (-1)^j xk \cos \varepsilon)] \quad (j=1, 2)$$

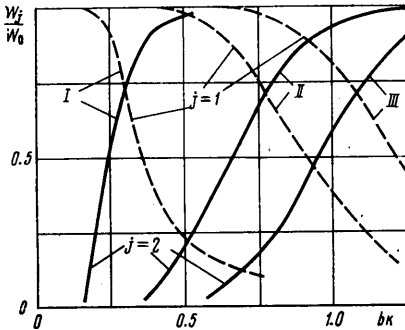
Волны ζ_1 и ζ_2 введены в решение для обеспечения возможности удовлетворения условий на бесконечности

$$(3.2) \quad \zeta_1^{(-\infty)} + \zeta_1 = \zeta_0, \quad \zeta_2^{(+\infty)} + \zeta_2 = 0$$

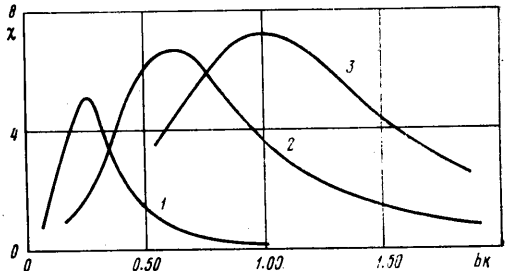
Первое уравнение в (3.2) фиксирует амплитуду набегающих на стержень волн в области $x \rightarrow -\infty$, второе утверждает отсутствие излучения из области с $x > 0$.

Возвышения ζ , ζ_1 , ζ_2 и ζ_* были выражены выше через неопределенные пока комплексные коэффициенты C_n , U_1 , U_2 . Система соотношений (3.1), (3.2) легко приводится к бесконечной системе линейных относительно C_n , U_1 и U_2 алгебраических уравнений.

4. Численные решения системы уравнений (3.1) и (3.2) получались методом редукции. Число членов ряда (1.4) ограничивалось. Требовалось, чтобы условие (3.1) выполнялось только на конечном числе параллельных оси стержня линий на подошве стержня. При числе таких линий, равном $2q+1$ с координатами x_j ($j=0, +1, -1, +2, -2, \dots, -q, +q$), в (1.4) достаточно было удерживать члены, у которых $-q \leq n \leq q$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Полученная из (3.1) бесконечная система уравнений заменялась системой $2q+1$ линейных алгебраических уравнений

$$(4.1) \quad \sum_{n=-q}^q C_n \left\{ -\frac{\sigma_0^2 b}{\pi \rho g^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(bl + \pi n) \exp(-ilx_j) dl}{(bl + \pi n) (\sqrt{l^2 + k_*^2} - k)} - \frac{\exp(i\pi n x_j / b)}{\rho g} \right\} + \\ + U_1 \exp(-ix_j k \cos \varepsilon) + U_2 \exp(ix_j k \cos \varepsilon) = \frac{1}{\rho g} \left\{ \frac{2(\rho b^2 m^{-1}) C_0}{(bk)^4 \sin^4 \varepsilon (mg b^3)^{-1} EI - bk} + \right. \\ \left. + \frac{(x_j b^{-1}) (\rho b^4 I_m^{-1})}{\pi^2 (bk) [1 - GI_k (gb I_m)^{-1} (bk) \sin^2 \varepsilon]} \sum_{\substack{n=-q \\ n \neq 0}}^q \frac{C_n}{n^2} [(1 - i\pi n) e^{i\pi n} - (1 + i\pi n) e^{-i\pi n}] \right\}$$

Уравнения (3.2) приводились к виду

$$(4.2) \quad Q_1^{(-\infty)} + U_1 = H_0, \quad Q_2^{(+\infty)} + U_2 = 0$$

где $Q_1^{(-\infty)}$ и $Q_2^{(+\infty)}$ — комплексные амплитуды волн $\zeta_1^{(-\infty)}$ и $\zeta_2^{(+\infty)}$. Из системы уравнений (4.1) и (4.2) определялись неопределенные коэффициенты C_n , U_1 , U_2 , тем самым решалась поставленная задача.

Вычисления производились на ЭВМ «Минск-32» для случая, когда параметры стержня были равными $mg b^3 (EI)^{-1} = 0.00075$, $\rho b^2 m^{-1} = 11.1$, $\rho b^4 I_m^{-1} = 31.5$, $I_m g b (GI_k)^{-1} = 0.00182$. Прошедшие под стержнем $\zeta_*^{(+\infty)}$ и отраженные от стержня $\zeta_*^{(-\infty)}$ волны находились по формулам

$$\zeta_*^{(+\infty)} = \zeta_1^{(+\infty)} + \zeta_1 \quad \zeta_*^{(-\infty)} = \zeta_2^{(-\infty)} + \zeta_2$$

Изгибающие M_u и крутящие моменты M_k вычислялись по формулам

$$M_u = EI \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad M_k = GI_k \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Увеличение параметра q с одного до трех уточняло значения изгибающих моментов не более чем на 10%. Для изгибающих моментов достаточно хорошее приближение получалось и при $q=0$. На фиг. 2 в качестве примера приведены графики изменения амплитуд отраженных W_2 и прошедших стержень W_1 волн при трех значениях углов ε подхода волн к стержню. Для кривых I, II и III углы подхода волн соответственно равны $\varepsilon=1.40, 0.525$ и 0.314 . Значения амплитуд волн W_i на этом графике выражены в долях от амплитуды W_0 набегающих волн ζ_0 . Безразмерные амплитуды χ изгибающих моментов M_u в поперечных сечениях стержня, связанные с амплитудами $M_u^{(a)}$ моментов M_u соотношением $\chi=M_u^{(a)}/\rho g b^4$, показаны на фиг. 3. Углы подхода волн ε для кривых 1, 2 и 3 соответственно равны $\varepsilon=1.40, 0.525$ и 0.314 . Максимумы на графиках изгибающих моментов с увеличением угла подхода волн смещаются в сторону более коротких волн.

Поступила 15 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Войт С. С.* Волны на поверхности жидкости, возникающие от перемещающейся периодической системы давлений. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
2. *Филиппов А. П.* Колебания механических систем. Киев, «Наукова думка», 1965.
3. *Витюк В. Ф., Кладько С. Р.* О действии периодической системы давлений на плавающую пластину конечной ширины. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 6.