МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 · 1980

УДК 532.529.2:532.516.5

ПРИБЛИЖЕННАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КОНЦЕНТРАЦИОННОЙ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В БИНАРНЫХ ГАЗОВЫХ СМЕСЯХ

Д. А. НИКУЛИН, Г. С. ПОТЕХИН, М. Х. СТРЕЛЕЦ

(Ленинград)

На основе анализа системы уравнений Навье — Стокса при малых значениях параметра гидростатической сжимаемости сформулирована приближенная система уравнений для описания нестационарной естественной конвекции в изотермических бинарных смесях газов с произвольным значением отношения плотностей. Получена также система уравнений нестационарной концентрационной конвекции в приближении Буссинеска и показано, что ее использование при решении рассматриваемого в работе класса задач может приводить не только к количественным погрешностям, но и к качественному искажению результатов.

Задачи о расчете концентрационной естественной конвекции в изотермических смесях обычно не выделяются в отдельный класс, так как ввиду аналогии между процессами теплопроводности и диффузии предполагается, что все результаты, полученные для обычной тепловой конвекции, могут быть без труда обобщены на случай концентрационной конвекции [1]. При этом, однако, не учитывается то обстоятельство, что подавляющее большинство этих результатов получено в рамках приближения Буссинеска, основанного на предположении о малых изменениях плотности в потоке. Исключения составляют лишь отдельные работы, например [2], в которой для описания тепловой свободной конвекции используется полная система уравнений Навье – Стокса для сжимаемого газа.

Следует заметить, что если для решения большинства задач тепловой конвекции использование приближения Буссинеска является достаточно обоснованным [3–6], то возможность его применения к задачам концентрационной конвекции далеко не очевидна, так как во многих случаях, представляющих практический интерес, изменения плотности в бинарных газовых смесях весьма значительны. Так, например, в смеси воздуха с метаном плотность может изменяться почти в 2 раза, а в водородно-воздушных смесях – в 14 раз. Поэтому для расчета концентрационных свободно конвективных течений следует, вообще говоря, использовать полную систему уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа с переменными физическими свойствами. Однако специфика рассматриваемых течений заключается в том, что изменения плотности в потоке связаны не с большими сверхзвуковыми скоростями течения и, следовательно, не со значительными градиентами давления, а исключительно с изменением состава смеси.

Это существенно усложняет, а в ряде случаев исключает возможность использования при решении системы уравнений Навье – Стокса численных методов, разработанных для расчета сверхзвуковых течений сжимаемого газа [7].

В данной работе сформулирована система уравнений, которая, с одной стороны, позволяет проводить расчеты концентрационной естественной конвекции в бинарных смесях газов при произвольном значении отношения их плотностей, а с другой – избежать указанных трудностей.

Для описания рассматриваемого процесса воспользуемся системой уравнений Навье — Стокса без учета второй вязкости и диффузионных составляющих тензора напряжений [8], уравнением переноса массы одного из компонентов смеси без учета бародиффузии и уравнением состояния для смеси совершенных газов:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t'}+v_i'\frac{\partial\rho'}{\partial x_i}+\rho'\frac{\partial v_i'}{\partial x_i'}=0 \tag{1}$$

$$\rho'\frac{\partial v_i'}{\partial t'}+\rho'v_j'\frac{\partial v_i'}{\partial x_j'}=\frac{\partial p'}{\partial x_i'}+\tag{2}$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_j'}\left\{\mu'\left[\frac{\partial v_i'}{\partial x_j'}+\frac{\partial v_j'}{\partial x_i'}-\frac{2}{3}\frac{\partial v_\lambda'}{\partial x_\lambda'}\delta_{ij}\right]\right\}-\rho'g'\delta_{i2}$$

$$\rho'\frac{\partial c}{\partial t'}+\rho'v_i'\frac{\partial c}{\partial x_i'}=\frac{\partial}{\partial x_i'}\left(\rho'D_{1,2}'\frac{\partial c}{\partial x_i'}\right)\tag{3}$$

$$p'=\frac{\rho'R'T_0'}{M'},\quad M'=\frac{M_1'M_2'}{(M_2'-M_1')c+M_1'}\tag{4}$$

Здесь использованы стандартные обозначения, штрихом обозначены размерные переменные, c — концентрация легкого компонента.

Приведем систему уравнений (1)—(4) к безразмерному виду, выбрав в качестве масштабов для координат x_i' величину L_2', где L_2' — характерный размер области по вертикали, для скоростей v_i' — $v_0=\sqrt{g'L_2'(M_2'/M_1'-1)}$, для времени $t'-t_0=L_2'/v_0$, для молекулярного веса $M-M_0=M_1M_2/(M_2-M_1)c_0+M_1$, где c_0 — характерное значение концентрации легкого газа (например, его концентрация при условии полного перемешивания в случае анализа конвекции в замкнутом объеме), для плотности $\rho'-\rho_0=p_0'M_0/R'T_0'$, где p_0' — характерное давление в начальный момент времени, для динамической вязкости $\mu'-\mu_0=\mu'(c_0, T_0')$, для коэффициента диффузии $D_{1,2}'-D_0=D_{1,2}'(p_0', T_0')$. Кроме того, введем вместо давления p' избыточное давление p_*', определяемое соотношением $p_*'=$ $=p'-p_0'\exp[-g'M_0x_2'/(R'T_0')]$. В качестве масштаба p_*' выберем величину $\rho_0v_0^2$.

Тогда после перехода к безразмерным переменным и несложных преобразований система уравнений (1)—(4) примет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_i\frac{\partial\rho}{\partial x_i}+\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0\tag{5}$$

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}+\rho v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial p_*}{\partial x_i}-\frac{\delta_{i2}}{\varepsilon_1}\Delta\rho+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ar}}}\Phi\tag{6}$$

$$\rho\frac{\partial c}{\partial t}+\rho v_i\frac{\partial c}{\partial x_i}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ar}}\,\mathrm{Sc}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(M\frac{\partial c}{\partial x_i}\right)\tag{7}$$

$$\mathrm{Ar}=\rho_0^2(L_2')^3g'\varepsilon_1/\mu_0^2,\quad \mathrm{Sc}=\mu_0/(\rho_0D_0),\quad \varepsilon_1=M_2/M_1-1\tag{8}$$

$$\rho=M[\varepsilon_1\varepsilon_2p_*+\exp(-\varepsilon_2x_2)]\tag{9}$$

$$\varepsilon_2=M_0g'L_2'/(R'T_0')\tag{10}$$

$$\Delta\rho=\rho-\exp(-\varepsilon_2x_2)\tag{11}$$

$$\Phi=\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\mu\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\lambda}\delta_{ij}\right]\right\}\tag{12}$$

При записи уравнения (7) учитывалось, что $D_{1,2}'\sim1/p'$.

В систему уравнений (5)—(9) вошли безразмерные параметры: ε_1, характеризующий отношение плотностей газов, ε_2 — параметр гидростатической сжимаемости, равный отношению квадратов скорости свободного падения и скорости звука в смеси, а также число Архимеда и число Шмидта.

Подставляя в уравнение (5) вместо ρ его выражение из (9) и используя (7), после преобразований получим уравнение

$$(13)\qquad \rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=\frac{\varepsilon_1}{(1+\varepsilon_1 c)}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ar}}\,\mathrm{Sc}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(M\frac{\partial c}{\partial x_i}\right)-M\varepsilon_1\varepsilon_2\left(\frac{\partial p_*}{\partial t}+v_i\frac{\partial p_*}{\partial x_i}\right)$$

которое можно использовать вместо уравнения переноса массы (7).

Тогда система уравнений, описывающая рассматриваемое течение, принимает вид

$$(14)\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+v_i\frac{\partial\rho}{\partial x_i}+\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0$$

$$(15)\qquad \rho\frac{\partial v_i}{\partial t}+\rho v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{\delta_{i2}}{\varepsilon_1}\Delta\rho+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ar}}}\Phi$$

$$(16)\qquad \rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=\frac{\varepsilon_1}{(1+\varepsilon_1 c)}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ar}}\,\mathrm{Sc}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(M\frac{\partial c}{\partial x_i}\right)-M\varepsilon_1\varepsilon_2\left(\frac{\partial p_*}{\partial t}+v_i\frac{\partial p_*}{\partial x_i}\right)$$

$$(17)\qquad \rho=M[\varepsilon_1\varepsilon_2 p_*+\exp(-\varepsilon_2 x_2)]$$

Для большинства случаев, представляющих практический интерес, комплекс ε_2, входящий в уравнения (16), (17), принимает значения, много меньшие единицы. Например, для воздуха и углекислого газа при нормальных условиях и $L_2'=10$ м значения ε_2 оказываются равными $1.1\cdot10^{-3}$ и $1.7\cdot10^{-3}$ соответственно. Поэтому можно предположить, что влияние членов уравнений (14)—(17), имеющих порядок $O(\varepsilon_2)$, на решение незначительно. Переходя в связи с этим в системе уравнений (14)—(17) к пределу при $\varepsilon_2\to0$ и учитывая, что при этом $\rho\to M$, получим

$$(18)\qquad \frac{\partial M}{\partial t}+v_i\frac{\partial M}{\partial x_i}+M\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0$$

$$(19)\qquad M\frac{\partial v_i}{\partial t}+Mv_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial p_*}{\partial x_i}-\frac{\delta_{i2}}{\varepsilon_1}\Delta\rho+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ar}}}\Phi$$

$$(20)\qquad \frac{\partial v_i}{\partial x_i}=\frac{\varepsilon_1}{(1+\varepsilon_1 c)}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ar}}\,\mathrm{Sc}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(M\frac{\partial c}{\partial x_i}\right)$$

$$(21)\qquad M=(\varepsilon_1 c_0+1)/(\varepsilon_1 c+1)$$

Для решения систем уравнений, аналогичных системе (18)—(21), разработан весьма эффективный метод [9], сходный по своей структуре с известным методом [10] для решения уравнений Стокса. В рамках этого метода совместное итерационное решение уравнений (19), (20) позволяет рассчитать распределение скоростей и давления. Уравнение (18) используется для определения M, а концентрация c находится из уравнения (21).

Таким образом, при решении системы уравнений (18)—(21) удается избежать указанных выше трудностей, возникающих при численном интегрировании полной системы уравнений Навье — Стокса (5)—(9). В то же время она практически не уступает ей по общности применительно к рассматриваемому классу задач.

Как уже отмечалось, единственным ограничением области применимости сформулированной системы уравнений является требование малости ε_2 ($\varepsilon_2\ll1$). Однако для более точного определения области допустимых значений ε_2 необходимо непосредственное сравнение решений, полученных на основе полной системы уравнений Навье — Стокса и системы (18)—(21).

Отметим, что из системы уравнений (5) — (9) нетрудно получить уравнения нестационарной концентрационной конвекции в приближении Буссинеска. Для этого перейдем в ней к пределу при ε_1, $\varepsilon_2 \to 0$, так как предположение о малых изменениях плотности в потоке, которое лежит в основе приближения Буссинеска, эквивалентно допущению о малости значений ε_1 и ε_2.

Из уравнения состояния (9) следует, что

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0} \rho = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} M = 1 \tag{22}$$

Далее рассмотрим выражение $\delta_{i2}\Delta\rho/\varepsilon_1$, входящее в правую часть уравнения (6). Используя соотношение (11) и уравнение состояния (9), преобразуем его к виду

$$\frac{\delta_{i2}}{\varepsilon_1}\Delta\rho = \delta_{i2}\left[\frac{(c_0-c)}{(\varepsilon_1 c+1)}\exp(-\varepsilon_2 x_2) + \frac{(\varepsilon_1 c_0+1)}{(\varepsilon_1 c+1)}\varepsilon_2 \tilde{p}\right] \tag{23}$$

Переходя в (23) к пределу при ε_1, $\varepsilon_2 \to 0$, получим

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0} \frac{\delta_{i2}}{\varepsilon_1}\Delta\rho = \delta_{i2}(c_0-c) \tag{24}$$

С использованием (22) и (24) система уравнений (5) — (9) принимает вид, который соответствует приближению Буссинеска для рассматриваемого класса задач:

$$\partial v_i/\partial x_i = 0 \tag{25}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} - \delta_{i2}(c_0-c) + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ar}}}\Phi \tag{26}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v_i\frac{\partial c}{\partial x_i} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ar}}\,\mathrm{Sc}}\frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} \tag{27}$$

Как следует из приведенного выше вывода, система уравнений (25) — (27) может использоваться лишь при близких значениях молекулярных весов газов $M_2' \approx M_1'$, так как $\varepsilon_1 = M_2'/M_1' - 1$ должно быть мало. Очевидно, что это ограничение является весьма жестким и существенно уменьшает возможность использования приближения Буссинеска при решении задач концентрационной естественной конвекции. Более того, в некоторых случаях, например для задач о нестационарной естественной конвекции в замкнутом объеме при начальных условиях, соответствующих условиям равновесия, между системами уравнений (18) — (21) и (25) — (27) имеется еще одно принципиальное отличие. Оно состоит в том, что система (25) — (27) имеет решение, соответствующее состоянию нестационарного равновесия

$$v_i = 0, \qquad c = c(x_2, t), \qquad p = p(x_2, t) \tag{28}$$

а система (18) — (21) такого решения не имеет.

Действительно, значение $v_i = 0$ удовлетворяет уравнению (25), при этом уравнения (26), (27) становятся независимыми, причем уравнение (27) переходит в обычное уравнение диффузии, решение которого имеет вид $c = c(x_2, t)$.

Тогда из уравнения (26) нетрудно получить

$$p(x_2, t) = [c(x_2, t) - c_0]x_2 \tag{29}$$

В то же время очевидно, что решение (28) не удовлетворяет системе уравнений (18) — (21) даже при близких значениях молекулярных весов газов $M_2' \approx M_1'$.

Поступила 18 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
2. *Петражицкий Г. Б., Полежаев В. И.* Исследование режимов теплообмена и структуры вихревого течения при свободном движении вязкого сжимаемого газа в двумерных полостях. Тр. МВТУ им. Н. Э. Баумана, 1976, № 222.
3. *Mihaljan J. M.* A rigorous exposition of the Boussinesq approximation applicable to a thin layer of fluid. Astrophys. Journal, 1962, vol. 136, No. 3.
4. *Spiegel E. A., Veronis G.* On the Boussinesq approximation for a compressible fluid. Astrophys. Journal, 1960, vol. 131, No. 2.
5. *Gray D. D., Giorgini A.* Thi validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases. Int. J. Heat and Mass. Transfer, 1976, vol. 19, No. 5.
6. *Perez Cordon R., Velarde M. G.* On the (non linear) foundations of Boussinesq approximation applicable to a thin layer of fluid. J. phys. France, 1975, t. 36, No. 7—8.
7. *Roache P. J.* Computational fluid dynamics. Albuquerque USA, Hermosa Publ., 1976.
8. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1973.
9. *Ramshaw J. D., Trapp J. A.* A numerical technique for low-speed homogeneous two-phase flow with sharp interfaces. J. Comput. Phys., 1976, vol. 21, No. 4.
10. *Chorin A. J.* A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. J. Comput. Phys., 1967, vol. 2, No. 1.