

ЛАМИНАРНЫЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ ПЛОСКОСТИ СИММЕТРИИ

И. Г. БРЫКИНА, Э. А. ГЕРШБЕЙН, С. В. ПЕЙГИН

(Москва)

Аналитическими и численными методами исследуется ламинарный пространственный пограничный слой в плоскостях симметрии затупленных тел, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. В первом приближении интегрального метода последовательных приближений получено аналитическое решение задачи, справедливое для случая непроницаемой поверхности, для малых значений параметра вдува и произвольных значений параметра отсоса. Для больших значений параметров вдува и отсоса в случае, когда вектор скорости вдуваемого газа составляет острый угол с вектором скорости внешнего течения на поверхности тела, получено асимптотическое решение. Приводятся некоторые результаты численного решения задачи для тел различной формы и широкого диапазона изменения углов атаки и параметров вдува и отсоса. Приводится сравнение аналитических и численных решений, оценивается область применимости аналитических формул.

На основании решений, полученных в данной работе, и работ других авторов предлагается формула для расчета тепловых потоков к идеально каталитической поверхности в плоскости симметрии затупленных тел, обтекаемых сверхзвуковым потоком диссоциированного и ионизованного воздуха под различными углами атаки.

Ранее течение в плоскостях симметрии на непроницаемой поверхности либо при малом вдуве в рамках теории ламинарного пограничного слоя рассматривалось в ряде работ [1-4]. Асимптотическое решение уравнений пространственного пограничного слоя при сильном нормальном вдуве или отсосе приведено в [5, 6].

1. Постановка задачи. Рассмотрим сверхзвуковое пространственное течение около затупленных тел, обладающее плоскостью симметрии. Выберем систему криволинейных неортогональных координат (ξ^*, η^*, ζ^*) , нормально связанную с обтекаемой поверхностью. Пусть $\zeta^* = \text{const}$ — есть семейство поверхностей, параллельных поверхности тела ($\zeta^* = 0$), ξ^*, η^* выбраны на поверхности тела следующим образом. Пусть $z = F(x, y)$ — уравнение поверхности тела в декартовой системе координат. Выберем следующую параметризацию поверхности: $x = \xi^*, y = \eta^*, z = F(\xi^*, \eta^*)$. Пусть $\eta^* = 0$ — плоскость симметрии течения. В ее окрестности с точностью до членов порядка $(\eta^*)^2$ уравнения пространственного пограничного слоя имеют вид [1]

$$\begin{aligned} (1.1) \quad & \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^*} (\rho^* u^*) + \rho^* w^* + \frac{\partial}{\partial \zeta^*} (\rho^* v^*) = 0 \\ & \rho^* D^* u^* = \rho_e^* \frac{u_e^*}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u_e^*}{\partial \xi^*} + \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial \zeta^*} \right) \\ & \rho^* (D^* w^* + w^{*2} + B_1 u^{*2}) = \\ & = \rho_e^* \left(w_e^{*2} + \frac{u_e^*}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial w_e^*}{\partial \xi^*} + B_1 u_e^{*2} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \left(\mu^* \frac{\partial w^*}{\partial \zeta^*} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho^* D^* H^* &= \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left\{ \frac{\mu^*}{\sigma} \left[\frac{\partial H^*}{\partial \xi^*} + (\sigma - 1) \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left(\frac{u^{*2}}{2} \right) \right] \right\} \\ \rho^* c_p^* D^* T^* &= \frac{u^*}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial p^*}{\partial \xi^*} + \mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi^*} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left(\frac{\mu^* c_p^*}{\sigma} \frac{\partial T^*}{\partial \xi^*} \right) \\ p^* &= \rho^* R T^*, \quad D^* \equiv \frac{u^*}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^*} + v^* \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \\ g_{11} &= 1 + (F_{\xi}^*)^2, \quad g_{12} = F_{\xi}^* F_{\eta}^* \\ B_1 &= \frac{1}{g_{11}} \left[\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial \xi^* \partial \eta^*} - \sqrt{g_{11}} \frac{\partial^2 \sqrt{g_{11}}}{\partial \eta^{*2}} - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial g_{12}}{\partial \eta^*} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \xi^*} \right]\end{aligned}$$

Здесь u^* , $\eta^* w^*$, v^* — составляющие скорости в направлениях ξ^* , η^* , ζ^* соответственно; T^* , ρ^* , p^* , H^* , μ^* , c_p^* , σ — абсолютная температура, плотность, давление, полная энтальпия, коэффициент вязкости (предполагалось, что $\mu^* \sim (T^*)^\omega$) и теплоемкости газа, число Прандтля, $g_{\alpha\beta}$ — ковариантные составляющие основного метрического тензора.

Граничные условия для системы (1.1) следующие:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} u^* = u_w^* \geq 0, \quad w^* = w_w^* \geq 0, \quad T^* = T_w^*, \quad (\rho^* v^*)_w = G (\zeta^* = 0) \\ u^* \rightarrow u_e^*, \quad w^* \rightarrow w_e^*, \quad H^* \rightarrow H_e^*, \quad T^* \rightarrow T_e^* \quad (\zeta^* \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Индексы w и e соответствуют значениям переменных на поверхности тела и внешней границе пограничного слоя. Переходя в уравнениях (1.1) и граничных условиях (1.2) к новым зависимым и независимым переменным, получим

$$\begin{aligned}(1.3) \quad s &= \frac{1}{R_0} \int_{\xi=0}^{\xi} \sqrt{g_{11}} d\xi^*, \quad \zeta = \sqrt{\frac{u_e^* \rho_e^*}{\mu_e^* R_0 s}} \int_0^{\zeta} \rho d\zeta^* \\ u &= \frac{\partial f}{\partial \zeta} = \frac{u^*}{u_e^*}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = \frac{w^*}{w_e^*}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_e^*} \\ \mu &= \frac{\mu^*}{\mu_e^*}, \quad T = \frac{T^*}{T_e^*}, \quad g = \frac{H^* - H_w^*}{H_e^* - H_w^*} \\ \rho^* v^* &= - \sqrt{\frac{\mu_e^* u_e^* \rho_e^*}{R_0 s}} [\beta_4 \varphi + \beta f + s f_s' + s u \zeta_s'] \\ \beta &= \frac{1}{2} \frac{d \ln u_e^* \mu_e^* \rho_e^* s}{d \ln s}, \quad \beta_1 = \frac{d \ln u_e^*}{d \ln s} \\ \beta_2 &= \frac{d \ln (1 - H_w)}{d \ln s}, \quad \beta_3 = \frac{d \ln w_e^*}{d \ln s}, \quad \beta_4 = \frac{R_0 s w_e^*}{u_e^*} \\ \beta_5 &= B_1 \frac{R_0 u_e^* s}{w_e^*}, \quad l = \mu \rho, \quad \alpha = \frac{u_e^{*2}}{2 H_e^*} \\ \beta(0) &= \beta_1(0) = 1, \quad \beta_2(0) = \beta_3(0) = \beta_5(0) = 0, \quad \beta_4(0) = c \\ H_w &= \frac{H_w^*}{H_e^*}, \quad T_w = \frac{T_w^*}{T_0}, \quad \alpha^* = \frac{\alpha(1 - \sigma)}{1 - H_w} \\ (1.4) \quad (lu_{\zeta}')_{\zeta}' &= s(uu_s' - f_s' u_{\zeta}') - u_{\zeta}'(\beta f + \beta_4 \varphi) + \beta_1(u^2 - T) \\ (lw_{\zeta}')_{\zeta}' &= s(uw_s' - f_s' w_{\zeta}') - w_{\zeta}'(\beta f + \beta_4 \varphi) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\beta_3(uw-T)+\beta_4(w^2-T)+\beta_5(u^2-T) \\
 & \left(\frac{l}{\sigma}T_{\zeta}'\right)'_{\zeta}=s(uT_s'-f_s'T_{\zeta}')-T_{\zeta}'(\beta f+\beta_4\Phi)-\frac{2\alpha}{1-\alpha}l(u_{\zeta}')^2 \\
 & \left[\frac{l}{\sigma}(g_{\zeta}'-\alpha^*(u^2)_{\zeta}')\right]'_{\zeta}=s(ug_s'-f_s'g_{\zeta}')-g_{\zeta}'(\beta f+\beta_4\Phi)-\beta_2(1-g)u \\
 (1.5) \quad & \zeta=0: u=u_w\geq 0, w=w_w\geq 0, g=0 \\
 & T=T_wT_0^*/T_e^*, \quad \beta_4\Phi+\beta f+sf_s'=\Phi(s) \\
 & \zeta\rightarrow\infty: u\rightarrow 1, w\rightarrow 1, T\rightarrow 1 (g\rightarrow 1)
 \end{aligned}$$

2. Решение уравнений методом последовательных приближений. Общее аналитическое решение задачи в первом приближении. Метод последовательных приближений был впервые предложен в [7] для двумерных задач пограничного слоя; в дальнейшем в несколько ином виде он был использован для решения трехмерных задач пограничного слоя [1, 8, 9].

Основная задача состоит в определении теплового потока и компонент напряжения трения на поверхности тела. После двукратного интегрирования уравнений импульсов и уравнения энергии для полной энтальпии (1.4) по координате ζ (от ζ до ∞ и от 0 до ζ) с учетом граничных условий ($u_w=w_w=0$) получается система интегродифференциальных уравнений, которая решалась методом последовательных приближений аналогично [9]. Строился итерационный процесс, выражающий каждое последующее приближение для искомых функций через предыдущее таким образом, чтобы все приближения удовлетворяли граничным условиям как на теле, так и на внешней границе пограничного слоя. Для этого на каждом шаге вводились дополнительные неизвестные функции $\delta_u^{(n+1)}$, $\delta_w^{(n+1)}$, $\delta_g^{(n+1)}$ (уравнения для которых получаются из условий на внешней границе) и производился переход к вспомогательным поперечным координатам

$$\zeta_i^{(n)} = \zeta / \sqrt{\delta_i^{(n+1)}} \quad (i=u, w, g)$$

Итерационный алгоритм, по которому, задав каким-либо способом нулевое приближение, можно определить все последующие приближения для искомых функций, аналогичен по виду алгоритму, приведенному в [9], и поэтому здесь не приводится.

В первом приближении этого метода получено аналитическое решение задачи для компонент скорости, энтальпии, коэффициентов трения и теплопередачи при двух способах задания нулевого приближения:

$$(2.1) \quad u^{(0)}=w^{(0)}=g^{(0)}=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\zeta} e^{-\xi^2} d\xi$$

$$(2.2) \quad u^{(0)}=w^{(0)}=g^{(0)}=1-e^{-\zeta}$$

Коэффициенты трения и теплопередачи, например, находятся по формулам (для нулевого приближения (2.1)):

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad c_{fi} &= \frac{0.234}{\sqrt{\delta_i B_{\infty}}} + 0.468 \sqrt{\delta_i} \beta^i \left[1 - \frac{\Phi_1}{2B_{\infty}} + H_w \left(2.41 - \frac{\Phi_2}{2B_{\infty}} \right) \right] + 2D, \\
 i=u, w, \quad c_g &= \frac{0.117(1-\alpha^*)}{\sigma \sqrt{\delta_g B_{\infty}}} + D + 0.234 \sqrt{\delta_g} \beta^g \left(1 - \frac{\Phi_1}{2B_{\infty}} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{fu} &= \sqrt{\text{Re}} \frac{2\tau_u}{\rho_e^* u_e^*} \\
 c_{fw} &= \sqrt{\text{Re}} \frac{2\tau_w}{\rho_e^* u_e^* w_e^*}, \quad c_q = \frac{q \sqrt{\text{Re}}}{\rho_e^* u_e^* (H_e^* - H_w^*)} \\
 \tau_{us} &= \mu^* \frac{\partial u^*}{\partial \xi^*}, \quad \tau_w = \mu^* \frac{\partial w^*}{\partial \xi^*}, \quad q = \lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial \xi^*}, \quad \beta^s = \beta_2 \\
 \text{Re} &= \frac{u_e^* \rho_e^* R_0 s}{\mu_e^*}, \quad \beta^w = \frac{\beta_s + \beta_4 + \beta_5}{1 - \alpha}, \quad \beta^u = \frac{\beta_1}{1 - \alpha} \\
 (2.4) \quad B_\infty &= 0.068 + 0.057 l_w, \quad \Phi_1 = 0.068 + 0.091 l_w, \quad \Phi_2 = 0.091 + 0.159 l_w \\
 D &= \Phi \left(1 - 0.117 \frac{D_\infty}{B_\infty} \right), \quad D_\infty = 0.234 + 0.33 l_w, \quad l_w = \sqrt{\frac{H_w}{1 - \alpha}}
 \end{aligned}$$

Функции δ_i ($i=u, w, g$) в случае обтекания непроницаемой поверхности определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
 \delta_i &= \frac{1}{FG_{is}} \int_0^s \frac{FG_i \alpha_i}{B_\infty} ds, \quad i=u, w, g, \quad \alpha_u = \alpha_w = 1 \\
 \alpha_g &= \frac{1 - \alpha^*}{\sigma}, \quad F(s) = u_e^* \mu_e^* \rho_e^* E, \quad E = \exp \left(\int_0^s 2 \frac{w_e^*}{u_e^*} ds \right) \\
 G_i &= \exp \left(\int_0^s \frac{\beta^i (\Phi_1 + \Phi_2 H_w)}{B_\infty} ds \right) \quad (i=u, w), \quad G_g = 1
 \end{aligned}$$

При наличии вдува или отсоса с поверхности функции δ_i определяются из дифференциальных уравнений

$$\delta_i A_{i\infty} + s B_\infty \frac{d\delta_i}{ds} + \sqrt{\delta_i} \Phi D_\infty = \alpha_i \quad (i=u, w, g)$$

$$A_{g\infty} = 2(\beta + \beta_4) B_\infty + \beta g \Phi_1, \quad A_{i\infty} = 2(\beta + \beta_4) B_\infty + \beta^i (\Phi_1 + H_w \Phi_2), \quad i=u, w$$

Расчеты по формулам, полученным при задании нулевого приближения в виде (2.1) и (2.2), проведенные для линий растекания трехмерных тел различной формы, обтекаемых под углами атаки от 0 до 30°, показали, что распределения вдоль охлажденной поверхности величин теплового потока и коэффициентов трения, отнесенных к их значениям в критической точке, слабо зависят от нулевого приближения (аналогичный результат был получен в [9] для осесимметричных тел и стреловидных крыльев, обтекаемых под разными углами скольжения и атаки). То, что решение в первом приближении для относительных величин слабо зависит от вида нулевого приближения, можно показать и аналитически, путем оценки членов в уравнениях. Для относительных распределений теплового потока и компонент напряжения трения вдоль непроницаемой поверхности были получены приближенные формулы, не зависящие от вида нулевого приближения:

$$(2.5) \quad q^* = \frac{q(s)}{\tau(0)} = (1 - \alpha^*) F \left[2E(1 + c) u_{e*}^* (0) \int_0^s (1 - \alpha^*) F ds \right]^{-1/2}$$

$$(2.6) \quad \tau_u^* = \frac{\tau_u(s)}{\tau_u(0)} = \frac{(1+\delta_u^* \beta^u) \sqrt{2c+3} u_e^*{}^{1/2} (\mu_e^* \rho_e^*)^{1/2}}{2\sqrt{\delta_u^*} (c+2) s^{1/2} (u_{es}^*{}'(0))^{1/2}}$$

$$\tau_w^* = \frac{\tau_w(s)}{\tau_w(0)} = \frac{(1+\delta_w^* \beta^w) \sqrt{2+3c} w_e^* (u_e^* \mu_e^* \rho_e^*)^{1/2}}{2c \sqrt{\delta_w^*} (1+2c) s^{1/2} (u_{es}^*{}'(0))^{1/2}}$$

$$\delta_i^* = \frac{1}{FG_{is}} \int_0^s FG_i ds, \quad G_i = \exp \int_0^s \frac{\beta^i}{s} ds, \quad i=u, w$$

Формулы для относительных коэффициентов трения выписаны здесь для простоты для сильно охлажденной поверхности тела ($T_w \ll 1$). Отметим, что величины τ_u^* и τ_w^* слабо зависят от температуры стенки $T_w = \text{const}$, что подтверждается и численными расчетами (см. п. 5).

В случае осесимметричного течения формулы (2.5) – (2.6) переходят в соответствующие формулы работы [9], полученные для осесимметричного пограничного слоя, а формула (2.5) для теплового потока при $\sigma=c=1$ в точности совпадает с формулой Лиза [10].

Для величин напряжения трения и теплового потока к непроницаемой трехмерной поверхности в окрестности критической точки, отнесенных к соответствующим значениям в критической точке осесимметричного тела ($c=1$), можно получить следующие приближенные выражения, характеризующие их зависимости от параметра c :

$$(2.7) \quad c_q^* = \frac{c_q}{c_{qoc}} = \sqrt{\frac{1+c}{2}}$$

$$(2.8) \quad c_{fu}^* = \frac{c_{fu}}{c_{fuoc}} = \frac{(2+c+2T_w) \sqrt{2.54+0.81 T_w}}{(2T_w+3) \sqrt{1.54+c+0.81 T_w}}$$

$$c_{fw}^* = \frac{c_{fw}}{c_{fwoc}} = \frac{(1+c(2+2T_w)) \sqrt{2.54+0.81 T_w}}{(3+2T_w) \sqrt{1+c(1.54+0.81 T_w)}}$$

При обтекании проницаемой поверхности зависимость величин теплового потока и коэффициентов трения в критической точке, отнесенных к их значениям при $\Phi=0$, от параметра Φ на основании (2.3) – (2.4) имеет вид

$$(2.9) \quad \frac{q}{q_{\Phi=0}} = -\Phi(t_g - t_g^*) + \sqrt{\Phi^2 t_g^2 + 1}$$

$$\frac{\tau_i}{\tau_{i\Phi=0}} = -\Phi(t_i - t_i^*) + \sqrt{\Phi^2 t_i^2 + 1}, \quad i=u, w$$

$$t_g = 0.317(1+1.41 T_w^{1/2}) \sqrt{\frac{\sigma}{(1+c)t}}, \quad t_g^* = 1.58 \sqrt{\frac{\sigma t}{1+c}}$$

$$t = 1+0.838 T_w^{1/2}, \quad t_i = 0.317(1+1.41 T_w^{1/2})/t^i$$

$$t_i^* = 1.58 t^i [1+c+\beta^i(0)(1+2T_w)]^{-1}$$

$$t^i = (1+c)t + \beta^i(0) [0.5+0.67(T_w^{1/2}+T_w)+1.17 T_w^{3/2}]$$

При малых вдувах и отсосах выражения (2.9) дают линейную зависимость от параметра Φ . При больших значениях параметра отсоса также

получаем линейную зависимость от параметра Φ (что следует и из асимптотического решения уравнений пограничного слоя при $\Phi \gg 1$).

Точность полученных формул будет оценена ниже путем сравнения с численным решением.

3. Асимптотическое решение задачи при сильном наклонном вдуве или отсосе. Сильный вдув. Рассмотрим асимптотическое решение уравнений пространственного ламинарного пограничного слоя в плоскости симметрии в случае, когда вектор скорости вдуваемого газа составляет острый угол с вектором скорости внешнего невязкого течения на поверхности тела. В этом случае аналогично случаю нормального вдува [5] при больших значениях параметра вдува $\Phi(s)$ задача (1.1) — (1.2) является сингулярной и для ее решения может быть использован метод внешних и внутренних сращиваемых разложений, в котором пограничный слой разбивается на слой вдуваемых газов, примыкающий к телу (внешнее решение), и слой смещения (внутреннее решение) [5].

Решение асимптотических уравнений для коэффициентов разложения в ряд по малому параметру $\varepsilon^2 = |\Phi|^{-1}(0)$ для первых ненулевых членов (см. работы [5, 11]) дает следующие размерные формулы для компонент напряжения трения и теплового потока на поверхности тела (звездочки здесь и далее опущены):

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} &= - \frac{\mu}{(\rho v)_w} \left(\frac{(\rho u)_w}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u_w}{\partial \xi} - \frac{\rho_e u_e}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u_e}{\partial \xi} \right) \\ \mu \frac{\partial w}{\partial \xi} &= - \frac{\mu}{(\rho v)_w} \left[\rho_w \left(\frac{u_w}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial w_w}{\partial \xi} + w_w^2 + B_1 u_w^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \rho_e \left(\frac{u_e}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial w_e}{\partial \xi} + w_e^2 + B_1 u_e^2 \right) \right] \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} &= - \frac{\mu}{\sigma(\rho v)_w} \left[\frac{c_p(\rho u)_w}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial T_w}{\partial \xi} - \frac{\alpha u_w}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right] \end{aligned}$$

Профили составляющих скорости и температуры поперек слоя вдуваемых газов могут быть найдены численно; в виде рядов по поперечной координате [5]; асимптотическим методом в виде рядов по малой поперечной кривизне векторных линий градиента давления. Течение в слое смещения описывается уравнениями (1.1) при замене v на $V \equiv v - u(\xi^*)_{,\xi}' / \sqrt{g_{11}}$, где $\xi^*(\xi)$ — уравнение разделяющей линии тока. Положение этого слоя определяется условиями

$$(3.2) \quad \begin{aligned} u &\rightarrow u_e, w \rightarrow w_e, T \rightarrow T_e \quad (\xi \rightarrow +\infty), V=0 \quad (\xi=0) \\ u &\rightarrow u^\circ, w \rightarrow w^\circ, T \rightarrow T^\circ \quad (\xi \rightarrow -\infty) \end{aligned}$$

где значения $u^\circ, w^\circ, T^\circ$ определяются на разделяющей линии тока из внешнего решения.

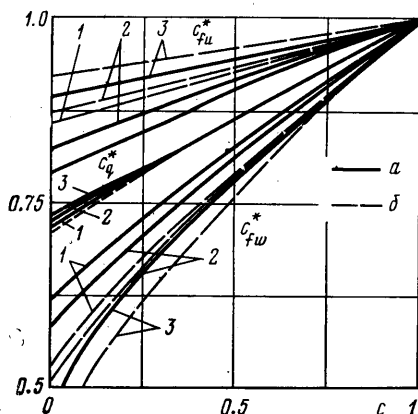
Сильный отсос. При больших значениях параметра $\Phi(s)$ решение уравнений (1.1) можно искать в виде ряда по $\varepsilon^2 = \Phi^{-1}(0)$ [6]. Решая асимптотические уравнения в первом приближении для коэффициентов разложения в ряд по ε^2 , получим следующие размерные формулы:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} U_i &= U_{ie} + (U_{iw} - U_{ie})e^{-\nu}, U_1 = u, U_2 = w \\ T &= T_e + (T_w - T_e - a)e^{-\sigma\nu} + ae^{-2\nu} \end{aligned}$$

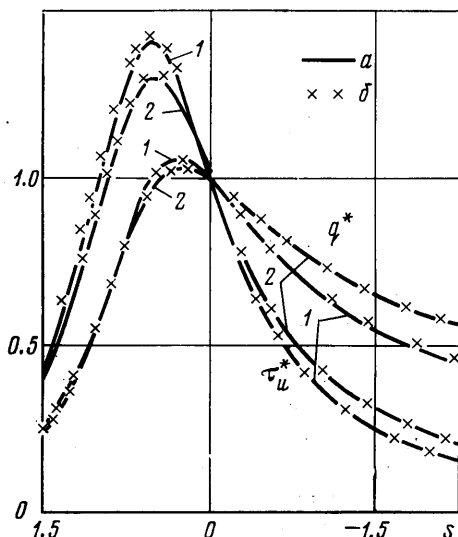
$$a = \frac{V_{\infty}^2 \sigma (u_e - u_w)^2}{2c_p T_0 (\sigma - 2)}, \quad \rho v = (\rho v)_w, \quad y = - \int_0^{\xi} \frac{(\rho v)_w}{\mu} d\xi$$

На поверхности тела при $\xi=0$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} &= -(\rho v)_w (u_e - u_w), \quad \mu \frac{\partial w}{\partial \xi} = -(\rho v)_w (w_e - w_w) \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} &= c_p (\rho v)_w (T_w - T_e) - \frac{(\rho v)_w V_{\infty}^2}{2T_0} (u_e - u_w)^2 \end{aligned}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

4. Численное решение задачи конечно-разностным методом. Решение уравнений слоя смещения. Система уравнений (1.4) с граничными (1.5) решалась численно на ЭВМ. Решение производилось с помощью программы, созданной для решения уравнений пограничного слоя на проницаемой поверхности. Использовалась неявная двухточечная разностная схема [12] с точностью аппроксимации $O(\Delta \xi)^4 + O(\Delta s)^2$.

Рассматривалось течение однородного сжимаемого газа в ламинарном пограничном слое в плоскости симметрии трехосного эллипсоида и эллиптического параболоида, обтекаемых под различными углами атаки. В расчетах принималось $\gamma=1.1-1.4$, $\sigma=0.71$, $\omega=0.5-0.95$. Угол атаки варьировался в пределах $0 \leq \theta \leq 30^\circ$, параметр вдува Φ и температура поверхности T_w брались постоянными и варьировались в пределах $-5 \leq \Phi \leq +5$, $T_w^*/T_0^*=0.01-0.5$.

Расчет параметров на внешней границе пограничного слоя также производился численно конечно-разностным методом с помощью схемы Рунге — Кутты с порядком аппроксимации $O(\Delta s)^5$. Давление на внешней границе пограничного слоя подсчитывалось по формуле Ньютона $p/p_0 = \cos^2 \varphi$, где p_0 — давление в критической точке, φ — угол между вектором скорости набегающего потока и вектором внешней нормали к телу. Результаты расчетов и их обсуждение приведено в п. 5.

Уравнения слоя смещения (1.4) с граничными условиями (3.2), записанными в переменных (1.3), решались с помощью той же программы аналогично работе [9]. При этом, в силу того что система (1.4) инвариантна относительно преобразования $\xi = \xi^* + c(s)$, граничные условия записывались в виде

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u &= 1, \quad T = 1, \quad w = 1 \quad (\xi^* = \xi_{\infty}) \\ u &= w = \sqrt{\rho_0 / \rho_w}, \quad T = \frac{\rho_0}{\rho_w} \quad (\xi^* = 0) \end{aligned}$$

а второе условие в (3.2), которое в переменных (1.3) имеет вид $\Phi = 0$ ($\xi = \xi^*$),

заменилось следующим:

$$(4.2) \quad \Phi = \Phi^- < 0 \quad (\xi^0 = 0)$$

Величины ξ_∞ и Φ^- выбирались достаточно большими, чтобы выполнялась асимптотика решения уравнений на бесконечности. После решения задачи в переменных (s, ξ^0) определялось значение переменной $\xi^0 = c(s)$, при котором $\Phi = 0$, и производился возврат к исходным переменным (s, ξ) .

5. Сопоставление аналитических и численных решений. *Тепловой поток и коэффициенты трения на непроницаемой поверхности.* Сравнение аналитического решения в первом приближении с численным показывает, что отличие теплового потока и коэффициентов трения, подсчитанных по формулам (2.3) — (2.4) и полученных из численного решения, не превышает 20% для всех вариантов расчета. Отличие же относительных величин, выраженных формулами (2.5) — (2.8), от численных значительно меньше. Например, погрешность формулы (2.7) для теплового потока c_q^* при $0.01 \leq T_w \leq 0.5$ не превосходит 3%. Это видно из фиг. 1, где приведены зависимости от параметра c коэффициентов трения и теплообмена в критической точке, отнесенных к своим значениям при $c=1$ (осесимметричное тело). Здесь $T_w=0.01, 0.1, 0.5$ — линии 1–3, линии a — численное решение, линии b — расчет по формулам (2.7) — (2.8). Заметим, что формула (4.11) работы [13], полученная на основании аппроксимации многочисленных расчетов, имеет погрешность 4%. Для компоненты трения c_{fu}^* максимальная погрешность формул (2.8) не превышала при $T_w=0.01$ — 7.8%, $T_w=0.1$ — 6.1%, $T_w=0.5$ — 3.5%. Для компоненты трения c_{fw}^* максимальная погрешность формул (2.8) при тех же значениях T_w не превышала соответственно 10.8, 7.4 и 5%.

Отметим, что влияние температуры стенки на относительные коэффициенты трения в критической точке проявляется сильнее, чем на относительный тепловой поток. Расчеты также показали, что эти относительные величины практически не зависят от параметров γ и ω .

Пример сравнения распределений вдоль поверхности относительных значений теплового потока и коэффициента трения вдоль оси s , отнесенных к своим значениям в критической точке, приведен на фиг. 2, где показано распределение этих величин вдоль плоскости симметрии эллиптического параболоида для различных параметров c и угла атаки 30° . Здесь $c=0.25, 4$ — линии 1, 2 соответственно, линии a — численное решение, линии b — расчет по формулам (2.5) — (2.6). Сравнение распределений, подсчитанных по приближенным аналитическим формулам (2.5) — (2.6) для различных углов атаки и форм тела и полученных из численного решения данной работы, показывает аналогично работе [9] хорошую точность полученных формул.

Отметим некоторые характерные особенности распределения теплового потока и компонент напряжения трения, отнесенных к своим значениям в критической точке вдоль плоскости симметрии трехмерного тела. Во-первых, $\tau_u^*(s)$, $q^*(s)$, $\tau_w^*(s)$ слабо зависят от параметров γ и ω и от температуры поверхности (для $T_w = \text{const}$). Например, значения q^* , τ_u^* и τ_w^* в плоскости симметрии эллиптического параболоида ($c=0.25$), обтекаемого под нулевым углом атаки, подсчитанные при $T_w=0.1$, изменялись по сравнению с этими же величинами, подсчитанными при $T_w=0.01$, менее чем на 1.5%, а при $T_w=0.5$ изменение q^* составляло менее 2.5%, а τ_u^* и τ_w^* — менее 4.5%.

Во-вторых, следует отметить, что максимальное значение теплового потока, отнесенного к его значению в критической точке, получается не в критической точке тела, обтекаемого под углом атаки, а сдвинуто в сторону уменьшения радиуса продольной кривизны контура тела в его плоскости

симметрии. С увеличением угла атаки этот максимум увеличивается и сдвигается дальше от критической точки. Коэффициенты трения ведут себя аналогичным образом, причем для τ_w^* этот эффект наиболее выражен.

Отметим также, что при малых значениях параметра s начиная с некоторого s значения $\tau_w(s)$ становятся отрицательными. Это в данном случае является следствием того, что выбранная нами система координат является неортогональной. Истинная проекция вектора напряжения трения на поверхность на направление, лежащее в касательной плоскости к телу и перпендикулярное его плоскости симметрии, определяется по формуле

$$(5.1) \quad \mu \frac{\partial w}{\partial \xi_{pr}} = \mu \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial g_{12}}{\partial \eta} \mu \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

Эта величина при тех же значениях s является величиной положительной и, таким образом, плоскость симметрии для всех значений s , при которой производился расчет, является плоскостью растекания.

Тепловой поток в плоскости симметрии затупленного трехмерного тела с идеально каталитической поверхностью, обтекаемого гиперзвуковым потоком химически реагирующего газа. В ряде работ [14–16] было показано, что при обтекании затупленных осесимметричных тел потоком химически реагирующего газа распределение теплового потока вдоль идеально каталитической поверхности $q(s)$, отнесенного к его значению в критической точке, слабо зависит от степени диссоциации и практически совпадает с относительным распределением $q^*(s)$, полученным для однородного сжимаемого газа. Аналогичный результат получен в работе [17] для случая течения ионизованного газа с различной степенью ионизации в пограничном слое на сфере.

Будем предполагать, что и в случае обтекания затупленного трехмерного тела с идеально каталитической поверхностью тепловой поток вдоль плоскости симметрии, отнесенный к своему значению в критической точке, слабо зависит от степени диссоциации или ионизации газа. Это предположение косвенно подтверждается результатами численных расчетов настоящей работы, которые показали слабую зависимость относительного теплового потока от параметров ω и γ .

С учетом этого предположения можно предложить следующую формулу для определения теплового потока в плоскости симметрии затупленного трехмерного тела, обтекаемого под углом атаки потоком диссоциированного или ионизованного газа:

$$(5.2) \quad q(s, c) = \frac{q(s, c)}{q(0, c)} \frac{q(0, c)}{q(0, 1)} q(0, 1)$$

где $q(0, 1)$ — тепловой поток в критическую точку осесимметричного тела, определяемый по формуле Фейя и Ридделла [18]:

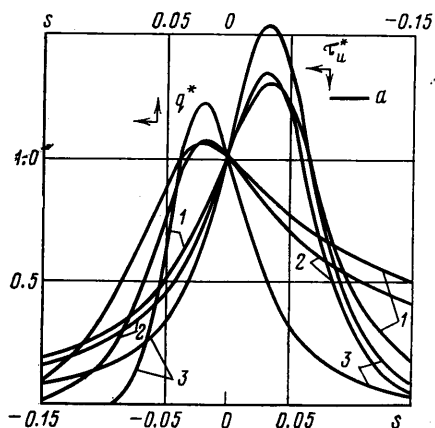
$$(5.3) \quad q(0, 1) = 0.76 \sigma^{-0.8} l_w^{0.4} (h_c - h_w) \left(\mu_{co} \frac{\partial u_c}{\partial x}(0) \right)^{1/2} \times \\ \times \left[1 + \frac{h_d (Le^{0.52} - 1)}{h_c} \right]$$

Здесь h_d — теплота диссоциации, Le — число Льюиса. $q(0, c)/q(0, 1)$ определяется по формуле (2.7), а $q(s, c)/q(0, c)$ — по формуле (2.5). В случае течения ионизованного газа тепловой поток в критической точке осесимметричного тела определяется по формуле (2.2) работы [17].

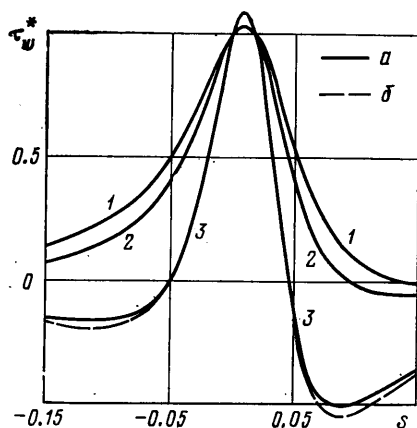
Ламинарный пограничный слой в плоскости симметрии на проницаемой поверхности. Сравнение аналитического решения с численным показывает,

что формулы (2.5) для теплового потока и компонент напряжения трения, полученные в первом приближении интегрального метода последовательных приближений, могут быть использованы только при малых параметрах вдува ($-\Phi \leq 0.3$). С увеличением параметра вдува отличие решения становится значительным. При наличии отсоса формулы (2.5) дают хорошую точность во всем диапазоне изменения параметра отсоса от малых значений до больших.

Влияние вдува и отсоса на относительные распределения теплового потока и напряжения трения вдоль плоскости симметрии показано на



Фиг. 3



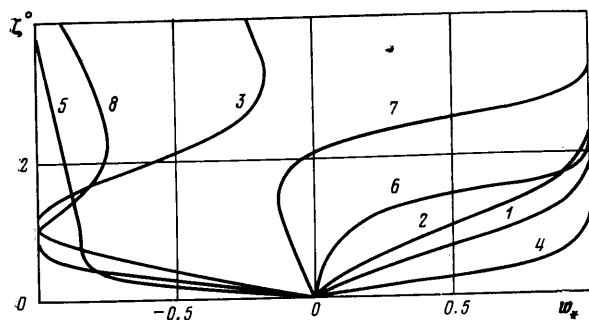
Фиг. 4

фиг. 3, 4. Рассматривалось течение газа, обтекающего эллипсоид с соотношениями полуосей 1:2:4 под углом атаки 30° при $T_w=0.1$, $\sigma=0.71$, $\Phi=5, 0, -2$ — линии 1—3 соответственно; линии a — численное решение, линии b — асимптотическое решение при сильном вдуве. На фиг. 5 в качестве примера приведено распределение $w_* = w/|w_{\max}|$ поперек пограничного слоя в плоскости симметрии эллипсоида (1:2:4), обтекаемого под нулевым углом атаки для различных значений параметра вдува и в различных сечениях по s ; $s=0$, $\Phi=0, 5, -2$ — линии 1, 4, 6; $s=0.0886$, $\Phi=0, -2$ — линии 2, 7; $s=0.258$, $\Phi=0, 5, 2$ — линии 3, 5, 8. Здесь $|w_{\max}|$ — максимальное абсолютное значение w/w_* поперек пограничного слоя при фиксированном значении s , а координаты ξ° и ξ связаны следующим образом: $\xi=\xi^\circ$ при $\Phi=2, 5$; $\xi=2\xi^\circ$ при $\Phi=0$; $\xi=5\xi^\circ$ при $\Phi=-2$. Сравнение асимптотических решений с численными показывает, что формулы (3.1) и (3.4) для абсолютных значений теплового потока и трения, полученные из асимптотического решения, дают хорошую точность при параметрах вдува $-\Phi \geq 2-3$ и параметрах отсоса $\Phi \geq 3-5$. Заметим, что относительные распределения для компонент напряжения трения, отнесенные к своим значениям в критической точке, дают хорошее совпадение уже при $|\Phi| \sim 1$.

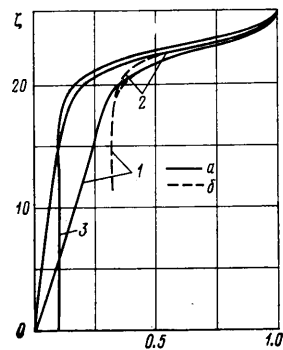
Отметим некоторые особенности относительных распределений в случае интенсивного массообмена на поверхности. Во-первых, так же как и в случае непроницаемой поверхности, относительные величины слабо зависят от температуры поверхности (при $T_w = \text{const}$) и параметров γ и ω . Зависимость этих распределений от параметра s становится более сильной (по сравнению со случаем, когда $\Phi=0$) при интенсивном вдуве и более слабой при интенсивном отсосе.

Во-вторых, смещение максимума относительных величин в сторону уменьшения радиуса продольной кривизны контура тела в плоскости симметрии при обтекании тел под углом атаки имеет место и в случае массообмена на поверхности, причем величина этого максимума, при прочих равных условиях, увеличивается при увеличении $-\Phi$.

В данной работе был произведен расчет пространственного слоя смешения, возникающего при сильном вдуве газа с поверхности тела в пограничный слой. Результаты этого расчета приведены на фиг. 6, где показаны распределения скоростей и температуры поперек пограничного слоя



Фиг. 5



Фиг. 6

при $c=0.25$, $\Phi=-5$. Линии 1, 2, 3 соответствуют профилям u/u_e , w/w_e , T/T_e ; линии a — численное решение полных уравнений пограничного слоя, линии $б$ — численное решение уравнений слоя смешения. Видно, что между решениями полных уравнений пограничного слоя и решениями уравнений слоя смешения имеется хорошее совпадение.

Поступила 19 II 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Шевелев Ю. Д. Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М., «Наука», 1977.
2. Селиверстов С. Н. Расчет ламинарного пограничного слоя на линии растекания лобовой поверхности сегментального тела в сверхзвуковом потоке газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.
3. Башкин В. А. Численное интегрирование уравнений пространственного ламинарного пограничного слоя на линиях растекания. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1970, т. 10, № 6.
4. Андреев Г. Н. Расчет ламинарного пограничного слоя на линии растекания тел вращения. Научн. тр. Ин-та мех. МГУ, 1972, № 19.
5. Гершбейн Э. А. Асимптотическое решение уравнений трехмерного ламинарного многокомпонентного пограничного слоя при сильном вдуве. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 2.
6. Гершбейн Э. А. Асимптотическое решение уравнений трехмерного ламинарного многокомпонентного пограничного слоя при интенсивном отсосе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 4.
7. Тирский Г. А. Метод последовательных приближений для интегрирования уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя с химическими реакциями, включая реакции ионизации. Отчет Ин-та механ. МГУ, 1969, № 1016.
8. Брыкина И. Г., Шевелев Ю. Д. Приближенное решение задачи о трехмерном ламинарном пограничном слое в несжимаемой жидкости. ПМТФ, 1974, № 2.
9. Брыкина И. Г., Гершбейн Э. А., Пейгин С. В. Ламинарный пограничный слой на стреловидных крыльях бесконечного размаха, обтекаемых под углом атаки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 3.
10. Lees L. Laminar heat transfer over blunt-nosed bodies at hypersonic flight speeds. Jet Propulsion, 1956, vol. 26, No. 4.

11. Гершбейн Э. А., Пейгин С. В. Ламинарный пограничный слой на частично подвижной поверхности при наличии вдува или отсоса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, № 5.
12. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. В сб.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М., «Наука», 1964.
13. Тирский Г. А. Определение тепловых потоков в окрестности критической точки двойной кривизны при обтекании тела диссоциирующим газом произвольного химического состава. ПМТФ, 1965, № 1.
14. Kemp N. H., Rose P. H., Detra R. W. Laminar heat transfer around blunt bodies in dissociated air. J. Aerospace Sci., 1959, vol. 26, No. 7.
15. Мурзинов И. Н. Ламинарный пограничный слой на сфере в гиперзвуковом потоке равномерно диссоциирующего воздуха. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.
16. Громов В. Г. Расчет ламинарного пограничного слоя при наличии неравновесных химических реакций. В сб.: Новые применения метода сеток в газ. динамике. Вып. 1. М., Изд-во Моск. ун-та, 1971.
17. Суслов О. Н. Многокомпонентная диффузия и теплообмен при обтекании тела химически равновесным ионизованным газом. ПМТФ, 1972, № 3.
18. Фей, Ридделл. Теоретический анализ теплообмена в лобовой точке, омываемой диссоциированным воздухом. В сб.: Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций. М., Изд-во иностр. лит., 1962.