

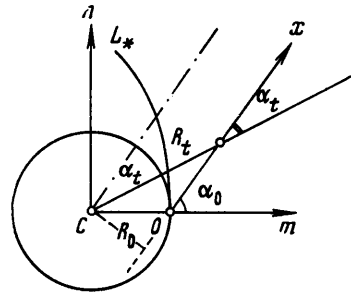
**ДВИЖЕНИЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ СТРУИ В ПОЛЕ
ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ**

В. Е. ЕПИХИН, А. Е. КУЛАГО, В. Я. ШКАДОВ

(Москва)

Значительный интерес представляют течения струй вязкой жидкости в поле массовых сил, зависящих от осевой координаты. Такие течения реализуются при вертикально-центробежном способе получения минерального волокна за счет воздействия на расплав минерала центробежной силы вращающихся в вертикальной плоскости валков [1]. Развитие слоя жидкости на вращающемся цилиндре рассмотрено в работах [2, 3]. Объяснение неустойчивости слоя расплава и срыва струй на основе тейлоровского механизма дается в [4]. В данной статье приводится частное решение для ускоряющихся неизотермических струй вязкой несжимаемой жидкости. Это решение применяется для объяснения динамики срывающихся струй с равномерно вращающегося валка. Приводится анализ устойчивости течений.

1. Постановка задачи. Введем в рассмотрение декартову систему координат, связанную с валком. Абсолютное ускорение центра масс жидкого элемента складывается из переносного, относительного и кориолисова ускорений. Будем считать, что движение отрывающихся частиц происходит под действием центробежных сил. Влияние относительного и кориолисова ускорений, отклоняющих частицы от прямолинейного движения, мало. Рассмотрим течение жидкости в цилиндрической системе координат x, y, θ с прямолинейной осью, совпадающей с осью симметрии образующейся струйки, которая составляет угол α_0 с радиусом валка, проведенным в место срыва частиц. Схема течения показана на фиг. 1.



Фиг. 1

Особенностью рассматриваемого процесса является необходимость решения тепловой задачи, так как основные физические параметры — вязкость расплава μ , коэффициент теплопроводности λ , коэффициент поверхностного натяжения γ — являются функциями температуры [1]. Уравнения движения и неразрывности жидкости, а также уравнение энергии и неизвестной поверхности струи представим в виде [3]

$$(1.1) \quad \rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_r \left[2 \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \mu \Delta u + \rho R_0 \cos \alpha_0 \Omega^2$$

$$(1.2) \quad \rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu_r \left[\frac{\partial T}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \mu \left(\Delta v - \frac{v}{y^2} \right)$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial yu}{\partial x} + \frac{\partial yv}{\partial y} = 0$$

$$(1.4) \quad \rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda y \frac{\partial T}{\partial y} \right) +$$

$$+ A \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{v}{y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

$$(x > 0, t > 0, h(x, t) > y > 0)$$

$$(1.5) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = v, \quad y = h(x, t)$$

Примем во внимание геометрическое тождество (см. фиг. 1)

$$(1.6) \quad R_0 \cos \alpha_0 + x = R_t \cos \alpha_t$$

Здесь R_t — расстояние от точки на оси струи до центра вращения; R_0 — радиус вала вместе со слоем расплава.

Граничные условия выражают осевую симметрию течения, отсутствие касательных и скачок нормальных напряжений, обусловленный поверхностным натяжением [5], а также закон теплообмена с внешней средой на поверхности струи [6]

$$(1.7) \quad v = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad y = 0$$

$$(1.8) \quad \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2b}{1-b^2} \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y} \right) \right] + \gamma_T \theta_s = 0$$

$$(1.9) \quad p - p^e = \frac{2\gamma}{R_s} + 2\mu \left(\frac{1+b^2}{1-b^2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{b^2}{1-b^2} \frac{v}{y} \right) + \gamma_T \theta_n$$

$$(1.10) \quad \frac{\lambda}{\sqrt{1+b^2}} \left(\frac{\partial T}{\partial y} - b \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \alpha(T - T^e) = 0, \quad 0 \leq |b| < 1$$

Условия (1.8)–(1.10) выполняются при $y = h(x, t)$.

В уравнениях и граничных условиях (1.1)–(1.10) используются следующие обозначения:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$b = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \theta_s = \left(\frac{\partial T}{\partial x} + b \frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{\sqrt{1+b^2}}{1-b^2}$$

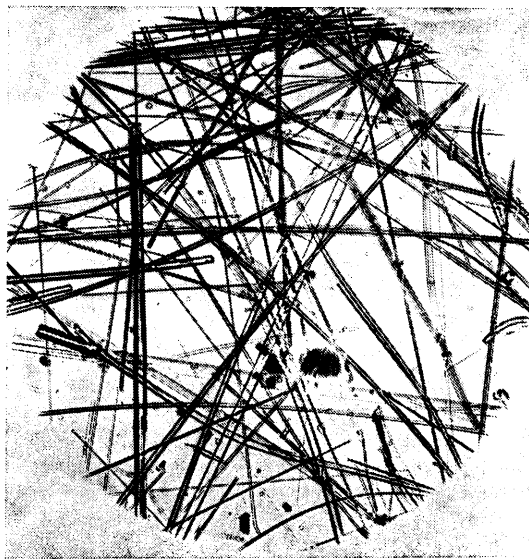
$$\theta_n = \left(b \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{\sqrt{1+b^2}}{1-b^2}, \quad (\cdot)_r = \frac{\partial(\cdot)}{\partial T}$$

$$\frac{2}{R_s} = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{1+b^2} \frac{\partial b}{\partial x} \right)$$

Здесь t — время; u, v — составляющие скорости в осевом (x) и радиальном (y) направлениях; $\rho = \text{const}$ — плотность расплава; T, T^e — температура струи и окружающей среды; p, p^e — давление в струе и в среде соответственно; $R_s/2$ — средний радиус кривизны поверхности струи; A —

термический эквивалент работы; C_v — коэффициент теплоемкости жидкости при постоянном объеме; α — коэффициент теплоотдачи струи, определенный в книге [6]; Ω — угловая скорость вращения валка.

Начально-краевая задача (1.1) — (1.10) должна быть дополнена граничными условиями при $x=0$, при $x \rightarrow \infty$, а также начальным условием при $t=0$. В литературе известны частные решения этой задачи в случае $\Omega=0$, $\alpha=0$, а именно



Фиг. 2

решение Рэлея (T_0, h_0, u_0 — постоянные) [7]

$$T=T_0, v=0, h=h_0, u=u_0, p=p^e+\gamma/h_0$$

решение Бора (T_0, h_0 — постоянные) [8]

$$T=T_0, v=0, h=h_0, u=\mu_0(y, t), p=p^e+\gamma/h_0$$

решение тепловой задачи Бора (h_0 — постоянная)

$$T=T_0(y, t), v=0, h=h_0, u=u_0(y, t), p=p^e+\gamma/h_0$$

Течения свободных капиллярных струй с равномерным и неравномерным профилем продольных скоростей неустойчивы по отношению к начальным периодическим возмущениям с длиной волны, большей некоторого критического значения [9].

На фиг. 2 показаны в увеличенном виде застывшие волокна минеральной ваты. Радиус мало изменяется вдоль одного и того же волокна. Это отмечается также в [1]. Предположим, что срывающаяся струя представляет собой прямой круговой цилиндр, радиус которого изменяется со временем.

Будем искать решение задачи (1.1) — (1.10) в виде

$$T(x, y, t) = T_0(y, t), \quad v = -\frac{1}{2} y u_1(t)$$

$$(1.11) \quad h = h_0(t), \quad u = u_0(y, t) + x u_1(t)$$

$$p(x, y, t) = p_0(y, t)$$

При этом уравнение неразрывности удовлетворяется автоматически. Подстановка соотношений (1.11) в уравнения (1.1), (1.2), (1.4) позволяет расщепить их, если приравнять отдельно члены, содержащие и не содержащие x в качестве сомножителя:

$$(1.12) \quad \rho \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 u_1 - \frac{1}{2} y u_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = \\ = \mu_T \frac{\partial T_0}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\mu}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \rho R_0 \cos \alpha_0 \Omega^2$$

$$(1.13) \quad \dot{u}_1 + u_1^2 = \Omega^2$$

$$(1.14) \quad \frac{\partial p_0}{\partial y} = -\mu_T u_1 \frac{\partial T_0}{\partial y} - \rho \left(-\frac{1}{2} y \dot{u}_1 + \frac{1}{4} y u_1^2 \right)$$

$$(1.15) \quad \rho C_v \left(\frac{\partial T_0}{\partial t} - \frac{1}{2} y u_1 \frac{\partial T_0}{\partial y} \right) = \\ = \lambda_T \left(\frac{\partial T_0}{\partial y} \right)^2 + \frac{\lambda}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial T_0}{\partial y} \right) + A \mu \left[3u_1^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 \right]$$

В уравнениях (1.13), (1.14) точка обозначает дифференцирование по t . Уравнение (1.13) интегрируется непосредственно. Из уравнения (1.14) с учетом граничного условия (1.9) можно получить формулу для вычисления $p_0(y, t)$:

$$(1.16) \quad p_0(y, t) = p^e + \gamma/h_0 + \gamma_T \frac{\partial T_0}{\partial y} \Big|_{y=h_0} - \\ - \frac{1}{8} (h_0^2 - y^2) (2\Omega^2 - 3u_1^2) - u_1 \mu(T_0), \quad 0 \leq y \leq h_0(t)$$

Решения уравнений (1.12), (1.15) удовлетворяют следующим граничным условиям на оси и на поверхности струи:

$$(1.17) \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial T_0}{\partial y} = 0, \quad y=0$$

$$(1.18) \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0, \quad y=h_0(t)$$

$$(1.19) \quad \lambda \frac{\partial T_0}{\partial y} + \alpha(T_0 - T^e) = 0, \quad y=h_0(t)$$

Неизвестная поверхность определяется уравнением

$$(1.20) \quad \dot{h}_0 = -h_0 u_1 / 2$$

Выполним замену независимых переменных $Y = y/h_0(t)$, $t_1 = t$, тогда производные преобразуются согласно формулам

$$(1.21) \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{\dot{h}_0}{h_0} Y \frac{\partial}{\partial Y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{h_0(t)} \frac{\partial}{\partial Y}$$

Опустим индекс при t_1 , воспользуемся этими формулами и преобразуем с помощью (1.20) уравнения (1.12), (1.15), имея в виду тождество (1.21). Последний член в уравнении (1.15) опущен, так как проведенные оценки указывают на малость вязкостной диссипации энергии по сравнению с остальными величинами.

Краевая задача (1.12), (1.15), (1.17)–(1.19) рассматривается теперь на единичном отрезке

$$(1.22) \quad \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 u_1 = \frac{1}{\rho h_0^2} \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu Y \frac{\partial u_0}{\partial Y} \right) + R_0 \cos \alpha_0 \Omega^2$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial Y} = 0, \quad Y=0; \quad Y=1$$

$$(1.23) \quad \frac{\partial T_0}{\partial t} = \frac{1}{\rho C_v h_0^2} \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\lambda Y \frac{\partial T_0}{\partial Y} \right)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial Y} = 0, \quad Y=0; \quad \lambda \frac{\partial T_0}{\partial Y} + \alpha h_0 (T_0 - T^e) = 0, \quad Y=1$$

Преобразуем независимую переменную t , зависимую переменную $u_0(Y, t)$ и приведем задачу (1.22), (1.23) к стандартной форме

$$(1.24) \quad \frac{\partial U_0}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu Y \frac{\partial U_0}{\partial Y} \right), \quad \frac{\partial U_0}{\partial Y} = 0, \quad Y=0; \quad Y=1$$

$$(1.25) \quad \frac{\partial T_0}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho C_v} \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\lambda Y \frac{\partial T_0}{\partial Y} \right)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial Y} = 0, \quad Y=0; \quad \lambda \frac{\partial T_0}{\partial Y} + \alpha h_0 (T_0 - T^e) = 0, \quad Y=1$$

$$\tau = \int_0^t \frac{d\varphi}{h_0^2(\varphi)}, \quad U_0(\tau, Y) = u_0(Y, t) \frac{h_0^2(0)}{h_0^2(\tau)} - R_0 \cos \alpha_0 \Omega^2 h_0^2(0) \tau$$

Уравнения (1.13), (1.20) для определения $u_1(\tau)$, $h_0(\tau)$, а также $t(\tau)$ удобно представить в следующем виде:

$$\dot{u}_1 + h_0^2 (u_1^2 - \Omega^2) = 0, \quad \dot{h}_0 = -h_0^3 u_1 / 2, \quad \dot{t} = h_0^2$$

Здесь точка обозначает дифференцирование по t .

Преобразуем задачи (1.24), (1.25) к безразмерному виду. В качестве масштабов измерения длины и времени используем радиус волокна в начальный момент и время полного оборота валка

$$U_0, T_0 \rightarrow \frac{U_0}{h_0(0)\Omega}, \quad \frac{T_0 - T^e}{T_D - T^e}, \quad Fo = \tau \Omega h_0^2(0) = \int_0^t \frac{\Omega d\varphi}{h_0^2(\varphi)/h_0^2(0)}$$

$$(1.26) \quad \frac{\partial U_0}{\partial Fo} = \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial T_0}{\partial Y} \frac{\partial U_0}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left(Y \frac{\partial U_0}{\partial Y} \right)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial Y} = 0, \quad Y=0; \quad Y=1$$

$$(1.27) \quad \frac{\partial T_0}{\partial Fo} = \frac{1}{Pe_\tau} \left(\frac{\partial T_0}{\partial Y} \right)^2 + \frac{1}{Pe} \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left(Y \frac{\partial T_0}{\partial Y} \right)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial Y} = 0, \quad Y=0, \quad \frac{\partial T_0}{\partial Y} + Bi T_0 = 0, \quad Y=1$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$Re = \rho h_0^2(0) \Omega / \mu, \quad Re_\tau = \rho h_0^2(0) \Omega / (\mu_\tau \Delta T), \quad \Delta T = T_D - T^e$$

$$Re = \rho C_v h_0^2(0) \Omega / \lambda, \quad Re_T = \rho C_v h_0^2(0) \Omega / (\lambda_T \Delta T),$$

$$Bi = \alpha h_0(\tau) / \lambda = Nu \lambda_e / \lambda$$

Здесь T_D — температура слоя расплава на валке; Bi , Nu — обозначают безразмерные параметры Био и Нуссельта; Fo — число Фурье.

2. Исследование течения в струе. Уравнение (1.13) имеет интегралы

$$(2.1) \quad u_1(C_0, t) = \Omega [C_0 + \exp(-2\Omega t)] / [C_0 - \exp(-2\Omega t)], \quad t \geq 0$$

$$(2.2) \quad u_1(t) = \Omega, \quad t \geq 0$$

Здесь C_0 — постоянная интегрирования.

Время установления t_* функции $u_1(t)$ оценивается из условия

$$(2.3) \quad \exp(-2\Omega t) \leq \exp(-4) \sim \frac{1}{80}, \quad 2\Omega t \geq 4$$

Равенство имеет место при $t = t_* = 2/\Omega$; t_* равняется удвоенному времени полного оборота валка. Решение краевой задачи (1.24) в случае постоянной μ было дано Бором для струи постоянной толщины [8]. В безразмерном виде с учетом (1.26) это решение можно представить рядом

$$U_0(Fo, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_0(Y j_{0n}) \exp(-Fo j_{0n}^2 / Re)$$

(2.4)

$$J_0'(j_{0n}) = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

В формуле (2.4) $J_0(z)$ обозначает функцию Бесселя нулевого порядка. Числовые выражения для корней j_{0n} имеют вид

$$j_{00} = 0, \quad j_{01} = \pi \cdot 1.22, \quad j_{02} = \pi \cdot 2.23, \quad j_{03} = \pi \cdot 3.24, \dots$$

Ограничимся оценкой второго члена ряда (2.4). Пусть, как и при оценке t_* в (2.3), ставится условие

$$Fo j_{01}^2 / Re \geq 4, \quad Fo \geq Fo_* = 4Re / j_{01}^2 \sim 0.23Re$$

Оценка числа Рейнольдса в случае $h_0(0) = 5 \cdot 10^{-4}$ см, $\Omega = 420$ сек⁻¹, $\rho = 2.5$ г/см³; $\mu = 9-300$ Пз позволяет получить $Re = 10^{-5}$. Другими словами, при $Fo > 0.23 \cdot 10^{-5}$ можно считать $U_0 = U_0(Fo)$. Интеграл задачи (1.22) в случае равномерного профиля представим в виде

$$(2.5) \quad u_0(C_0, C_1, t) = \frac{R_0 \cos \alpha_0 \Omega [C_0 \exp(\Omega t) - \exp(-\Omega t)] + C_1(1 + C_0)}{C_0 \exp(\Omega t) + \exp(-\Omega t)}$$

Здесь C_0, C_1 — постоянные интегрирования.

В том случае, когда $u_0(0) = 0, u_1(0) = 0$, решение принимает следующий вид ($C_0 = 1, C_1 = 0$):

$$(2.6) \quad u_0(t) = R_0 \cos \alpha_0 \Omega \operatorname{th}(\Omega t), \quad u_1(t) = \Omega \operatorname{th}(\Omega t)$$

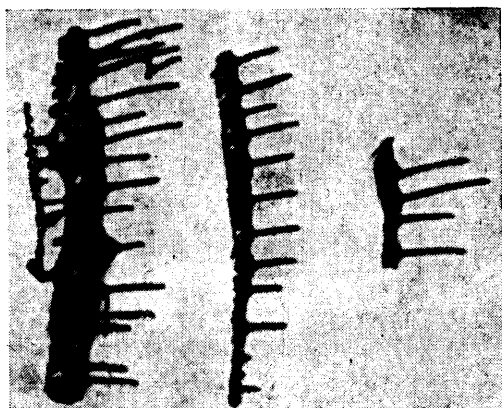
Кроме (2.5), (2.6) имеется решение, соответствующее (2.2):

$$(2.7) \quad u_0(t) = R_0 \cos \alpha_0 \Omega, \quad u_1(t) = \Omega, \quad t \geq 0$$

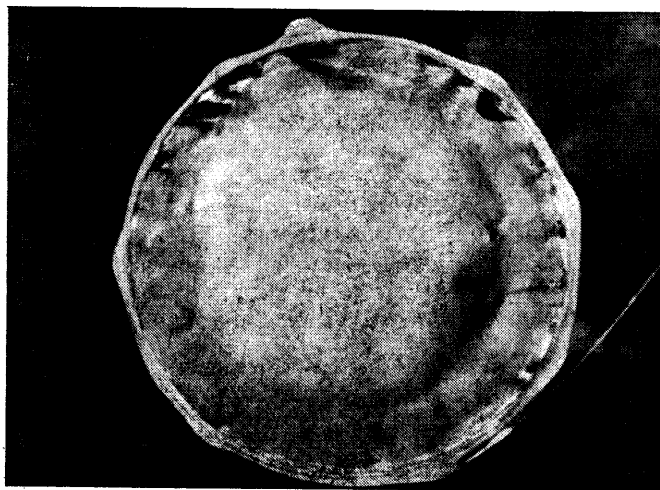
Оно аналогично решению, использованному в [10] при изучении истечения жидкости из вращающейся трубки. Используя уравнение (1.20), найдем закон изменения толщины струи $h_0(t)$. Выражения (2.1), (2.6), (2.7) для $u_1(t)$ позволяют получить соответственно формулы

$$h_0(t) = h_0(0) \left\{ (1 + C_0) / [C_0 \exp(\Omega t) + \exp(-\Omega t)] \right\}^{1/2}$$

$$h_0(t) = h_0(0) / \operatorname{ch}^{1/2}(\Omega t), \quad h_0(t) = h_0(0) \exp(-\Omega t / 2)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Построенные решения не учитывают граничные эффекты вблизи начала и на свободном конце струи $l(t)$, это является определенной идеализацией реального процесса вытягивания волокна в поле центробежных сил. Представляет интерес зависимость координаты $X(t, x_0)$ сечения струи от времени, занимавшего при $t=0$ положение x_0 :

$$(2.8) \quad X(0, x_0) = x_0$$

Субстанциальная производная лагранжевой координаты $X(t, x_0)$ дает скорость жидкого элемента в этом сечении. Используя вид решения (1.11), получим уравнение для определения закона движения по радиусу от центра вращения C :

$$dX/dt = u_0 + Xu_1$$

Коэффициенты в правой части этого равенства определим в соответствии с формулами (2.6), что позволяет получить уравнение с разделяющимися переменными

$$(2.9) \quad dX/dt = (R_0 \cos \alpha_0 + X) \Omega \text{th}(\Omega t)$$

Решение уравнения (2.9) с учетом начального условия (2.8) имеет вид

$$(2.10) \quad X(t, x_0) = x_0 \operatorname{ch}(\Omega t) + R_0 \cos \alpha_0 [\operatorname{ch}(\Omega t) - 1]$$

На фиг. 3 представлена фотография типичного образца, полученного в результате быстрого замораживания вращающегося слоя расплава. Застывшие струйки располагаются в радиальном направлении.

В неподвижной системе координат движение частиц жидкости происходит как в радиальном, так и в трансверсальном направлении. Угол поворота в случае равномерного вращения является линейной функцией времени

$$(2.11) \quad \psi = \Omega t$$

В неподвижной системе координат $Стп$, связанной с центром вращения, параметрическая зависимость (2.10), (2.11) представляет уравнение спирали

$$(2.12) \quad r = R(\psi, x_0) = x_0 \operatorname{ch} \psi + R_0 \cos \alpha_0 (\operatorname{ch} \psi - 1)$$

В данном случае срыв струи происходит по касательной к поверхности вращающегося цилиндра. Схематическое изображение зависимости в полярной системе координат представлено на фиг. 1 — это линия L_* . Фотография срывающейся струи, полученная с помощью неподвижной камеры, представлена на фиг. 4. Пренебрегая концевым эффектом, уравнение (2.10) можно использовать для определения закона изменения длины струи $l(t, l_0)$ во времени: $l(0, l_0) = x_0$.

Если имеются данные об угловой скорости вращения вала и о длине образующихся волокон, то можно решить обратную задачу и определить время вытягивания волокна. Пусть, например, $R_0 = 20$, $l = 4$ см. Подстановка в уравнение (2.10) позволяет получить уравнение

$$(1 + x_0/R_0) \operatorname{ch}(\Omega t) = 1 + l/R_0 (\cos \alpha_0 \sim 1, x_0/R_0 \ll 1)$$

С помощью таблиц найдем $\Omega t \approx 0.62$. В данном случае вытягивание волокна происходит за время порядка 0.6 времени полного оборота.

Приведем результаты решения тепловой задачи. Краевая задача (1.27) решалась численно методом прямых [11]. Уравнение теплопроводности сводится к задаче Коши по времени для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно сеточного решения. При исходных данных: $\Omega = 420$ 1/сек, $T_0(y, 0) = 1340^\circ \text{C}$, $\lambda = 1.25$ ккал/м·ч°С, $C_v = 0.29$ ккал/кг·°С, $\rho = 2.5$ г/см³, $h_0(0) = 5 \cdot 10^{-4}$ см (пример 1 из [1], стр. 97), $T^e = 20^\circ \text{C}$, получены близкие результаты. Охлаждение волокна до средней температуры 670°C происходит за время порядка 0.12 времени полного оборота вала. Сужение струи составляет $h_0/h_0(0) = 0.99$ ($Fo \sim \Omega t$). Графики изменения безразмерной температуры на оси (линия 1) и на поверхности струи (линия 2) в зависимости от числа Фурье показаны на фиг. 5. Расчеты показали, что при $\Omega = 40, 60, 80, 100$ 1/сек время застывания струи оценивается сверху величиной $0.01/\Omega$ сек. При этом струя считается затвердевшей после охлаждения ее поверхности до температуры 1153°C . Разность температур на оси и на поверхности струи больше при больших Ω .

3. Устойчивость струйного течения. Исследуем влияние малых отклонений начальной формы поверхности струи от цилиндрической на течение жидкости в струе. Примем для простоты $T = \text{const}$. Представим поле скоростей возмущенного движения, давление и форму струи в безразмерном виде

$$u(x, y, t) = u(x, t) + U(x, y, t), \quad v(x, y, t) = v(y, t) + V(x, y, t),$$

$$(3.1) \quad p_*(x, y, t) = p_0(y, t) + P(x, y, t) \\ h_*(x, t) = h_0(t) + H(x, t)$$

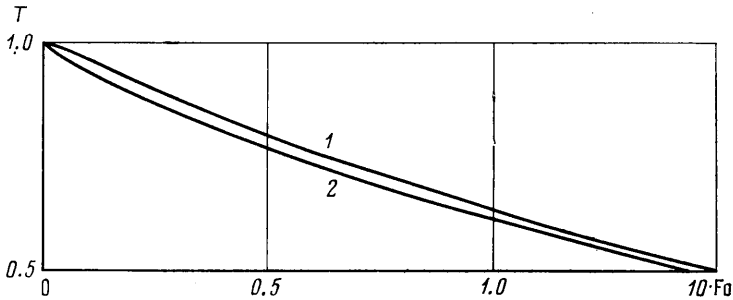
Подстановка выражений (3.1) в уравнения движения и неразрывности позволяет получить в линейном приближении следующую краевую задачу:

$$(3.2) \quad U_t + u_x U + u U_x + v U_y = -P_x + \Delta U / \text{Re} \\ V_t + u V_x + v V_y + v_y V = -P_y + (\Delta V - V/y^2) / \text{Re} \\ y U_x + (y V)_y = 0 \\ H_t + u H_x = V, \quad y = h_0(t)$$

$$(3.3) \quad U_y = V = 0, \quad y = 0 \\ U_y + V_x + 2H_x(2v_y + v/y) = 0$$

$$(3.4) \quad P = -(H + h_0^2 H_{xx}) / (\text{We } h_0^2) + 2V_y / \text{Re}$$

Здесь граничные условия (3.4) выполняются при $y = h_0(t)$, число Рейнольдса то же, что в формуле (2.4), число Вебера равно $\text{We} = \gamma / (\rho \Omega^2 h_0^3(0))$. Индексы t, x, y обозначают дифференцирование по соответствующим переменным. Коэффициенты системы уравнений (3.2) зависят от x, t .



Фиг. 5

С учетом вида решения, описывающего основное течение, будем искать U, V, H в виде комбинаций

$$(3.5) \quad U(x, y, t) = U_0(y, t) + x U_1(t) \\ V(x, y, t) = -y U_1(t) / 2, \quad H(x, t) = H_0(t) + x H_1(t)$$

Здесь $H_1(t)$ — тангенс угла наклона поверхности по отношению к оси струи.

Подстановка выражений (3.5) в систему уравнений (3.2) и разделение слагаемых, содержащих и не содержащих x в качестве множителя, позволяет получить следующие уравнения:

$$U_{0t} + u_1 U_0 + u_0 U_1 - \frac{y u_1 U_{0y}}{2} = -P_x + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial U_0}{\partial y} \right)$$

$$(3.6) \quad \dot{U}_1 + 2u_1 U_1 = 0$$

$$(3.7) \quad -y \dot{U}_1 / 2 + y U_1 u_1 / 2 = -P_y$$

$$(3.8) \quad \dot{H}_0 + u_0 H_1 = -h_0 U_1 / 2, \quad \dot{H}_1 + u_1 H_1 = 0$$

Граничные условия (3.4) преобразуются к виду

$$(3.9) \quad U_{0y} = -3H_1 u_1$$

$$(3.10) \quad P = -H_0 / (\text{We } h_0^2) - U_1 / \text{Re} - x H_1 / (\text{We } h_0^2)$$

Решение уравнения (3.7) с учетом условия (3.10) позволяет получить

$$P(x, y, t) = -(h_0^2 - y^2) (\dot{U}_1 - u_1 U_1) / 4 - H_0 / (\text{We } h_0^2) - U_1 / \text{Re} - x H_1 / (\text{We } h_0^2)$$

Отсюда можно вычислить слагаемое $-P_x = H_1 / (We h_0^2)$ в правой части первого уравнения (3.6).

Возьмем основное решение в форме (2.7). Из второго уравнения системы (3.6) и из равенств (3.8) вытекают формулы

$$\begin{aligned} U_1(t) &= U_1(0) \exp(-2\Omega t), \quad H_1(t) = H_1(0) \exp(-\Omega t) \\ H_0(t) &= H_0(0) + U_1(0) h_0(0) [\exp(-5\Omega t/2) - 1] / (5\Omega) + \\ &+ R_0 \cos \alpha_0 H_1(0) [\exp(-\Omega t) - 1] \end{aligned}$$

Вычислим предельное значение $H_2(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H_0(t) = H_0(0) - h_0(0) U_1(0) / (5\Omega) - R_0 \cos \alpha_0 H_1(0)$$

Предельный наклон поверхности струи и градиент скорости равняются соответственно

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} U_1(t) = 0$$

Аналогично поведение $U_0(y, t)$ при $t \rightarrow \infty$. Это позволяет сделать вывод об устойчивости основного режима течения по отношению к малым возмущениям начальной формы и скорости струи рассмотренного вида. Исследование режимов течения, определяемых формулами (2.1), (2.5), а также (2.6), можно провести аналогично.

Таким образом, выведены формулы, описывающие течение в неизотермической капиллярной струе, срывающейся с равномерно вращающегося вала цилиндрической формы. Показано, что в широком диапазоне изменения угловой скорости остывание струи происходит на временах порядка одной сотой времени полного оборота вала. Сужение струи незначительно; струя формируется из возмущений слоя расплава на валке с достаточно малой длиной волны. Выведена формула зависимости удлинения струи от времени.

Давление в струе складывается в результате действия давления среды, поверхностного натяжения, градиента поверхностного натяжения и вязких напряжений в жидкости.

В заключение авторы выражают благодарность А. А. Зайцеву за обсуждение результатов работы.

Поступила 2 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Тобольский Г. Ф. Минеральная вата и изделия из нее. Челябинск, Южн.-Уральское кн. изд-во, 1968.
2. Пухначев В. В. Движение жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести. ПМТФ, 1977, № 3.
3. Moffatt H. K. Behaviour of a viscous film on the outer surface of a rotating cylinder. J. Mec., 1977, vol. 16, No. 5.
4. Кулаго А. Е., Мясников В. П. Расчет диаметра струй при неустойчивости Тейлора-Гельмгольца. Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 2.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
6. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. М.—Л., Машгиз, 1962.
7. Rayleigh (J. W. Strutt). The theory of sound. London Macmillan, 1894 (рус. перев.: Рэлей. Теория звука, т. 2. М.—Л., Гостехиздат, 1944).
8. Bohr N. Determination of the surface tension of water by the method of jet vibration. Phil. Trans. Roy. Soc. (London), 1909, vol. A209, p. 281—317 (рус. перев.: Бор Нильс. Избр. науч. тр., т. 1. М., «Наука», 1970).
9. Епизин В. Е., Шкадов В. Я. Течение и неустойчивость капиллярных струй, взаимодействующих с окружающей средой. Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 6.
10. Kitamura Y., Egawa K., Takahashi T. Drop formation from a liquid jet ejected from a rotating nozzle. J. Chem. Eng. Jap., 1977, vol. 10, No. 1.
11. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 2. М., Физматгиз, 1960.