УДК 536.25

ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ ВБЛИЗИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Н. Л. ЗОЛОТОВ

(Ленинград)

В статье [1] было приведено однопараметрическое решение системы универсальных уравнений для свободной конвекции вблизи вертикальной пластины, справедливое для произвольного распределения температуры по ее поверхности. В частности, было показано, что для задачи с синусоидальным распределением даже в первом приближении уже получалось удовлетворительное совпадение с точным решением.

Для случая чисто гидродинамической задачи об обтекании тела с заданным распределением скорости на внешней границе пограничного слоя второе, двухпараметрическое приближение дает для частной задачи с синусоидальным распределением скорости практически почти полное совпадение с точным решением [2].

В настоящей статье рассматривается задача, приводящая к двум связанным между собой дифференциальным уравнениям. Представилась возможность убедиться в том, что и в этом более сложном случае быстрота сходимости метода обобщенного подобия позволяет ограничиться двухпараметрическим приближением для получения решений, близких к точным численным решениям конкретных задач.

1. Решение универсальных уравнений свободной конвекции вблизи неизотермической вертикальной пластины в двухпараметрическом приближении. В двухпараметрическом приближении универсальные уравнения свободной конвекции вблизи неизотермической вертикальной пластины и соответствующие им граничные условия имеют вид [1]

$$\ddot{u}+\left(\lambda_1+\frac{3}{4}\lambda_1^*\right)\Phi\dot{u}-\left(\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_1^*\right)u^2+S=$$
$$=(\lambda_1\lambda_1^*+\lambda_2)\left(u\frac{\partial u}{\partial\lambda_1}-\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_1}\dot{u}\right)+(2\lambda_1^*+\lambda_1)\lambda_2\left(u\frac{\partial u}{\partial\lambda_2}-\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_2}\dot{u}\right),$$

$$\frac{\ddot{S}}{\sigma}+\left(\lambda_1+\frac{3}{4}\lambda_1^*\right)\Phi\dot{S}-\lambda_1uS=(\lambda_1\lambda_1^*+\lambda_2)\left(u\frac{\partial S}{\partial\lambda_1}-\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_1}\dot{S}\right)+ \tag{1.1}$$
$$+(2\lambda_1^*+\lambda_1)\lambda_2\left(u\frac{\partial S}{\partial\lambda_2}-\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_2}\dot{S}\right)$$

$$\lambda_1^*=-\frac{4}{3\sigma}\dot{S}(0,\lambda_1,\lambda_2)+\frac{8}{3}\lambda_1 \tag{1.2}$$

$$\Phi=u=0,\quad S_w=1,\quad \eta=0;\quad u\to0,\quad S\to0,\quad \eta\to\infty \tag{1.3}$$

Здесь u – безразмерная продольная скорость; Φ – безразмерная функция тока; S – безразмерная температура; λ_1 и λ_2 – первый и второй из учитываемых параметров подобия; точка над буквой – производная по безразмерной поперечной координате η.

Система (1.1) была численно проинтегрирована с использованием метода итераций [3]. Уравнения в конечно-разностных отношениях решались методом простой прогонки [4]. За начальную точку расчета принималась точка ($\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$). В отличие от работы [3] при переходе к новому значению λ_2 в начальной точке ($\lambda_1=0$, $\lambda_2\neq0$) величины $(\partial u/\partial\lambda_1)$, $(\partial\Phi/\partial\lambda_1)$ и $(\partial S/\partial\lambda_1)$ брались при старом значении λ_2. Удалось получить полное двухпараметрическое решение системы (1.1) в областях

$$-1.90\leqslant\lambda_1\leqslant0,\quad -1.95\leqslant\lambda_2\leqslant0;\quad -1.90\leqslant\lambda_1\leqslant0,\quad 0\leqslant\lambda_2\leqslant1.0$$
$$0\leqslant\lambda_1\leqslant0.25,\quad -0.05\leqslant\lambda_2\leqslant0;\quad 0\leqslant\lambda_1\leqslant0.25,\quad 0\leqslant\lambda_2\leqslant1.95$$

Расчеты проводились при числе Прандтля $\sigma=0.7$ и шагах $\Delta\eta=0.2$, $\Delta\lambda_1=-0.1$, $\Delta\lambda_1=0.025$, $\Delta\lambda_2=\pm0.05$.

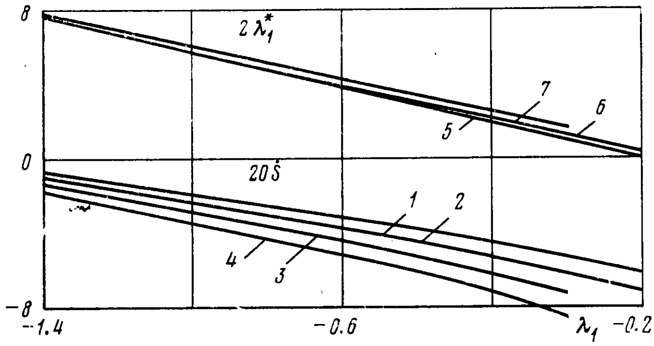
На фиг. 1 приведены результаты численного интегрирования универсальных уравнений (1.1), показаны графики универсальных функций $\dot{S}(0, \lambda_1, \lambda_2)$ (кривым *1–4* соответствуют значения $\lambda_2=1.0$, 0, -1.0, -1.95) и $\lambda_1^*(\lambda_1, \lambda_2)$ (кривым *5–7* соответствуют $\lambda_2=1.0$, 0, -1.95).

2. Обсуждение результатов. Как видно из фиг. 1, кривые $\lambda_1^*(\lambda_1, \lambda_2)$ тесно группируются и близки к линейному закону; наблюдается почти полное отсутствие зависимости уклона этих кривых от параметра λ_2 и лишь небольшой сдвиг их вдоль оси λ_1. Согласно (2), справедливо соотношение

$$\lambda_1^*(\lambda_1, \lambda_2)=a(\lambda_2)-b\lambda_1+\varepsilon(\lambda_1, \lambda_2) \tag{2.1}$$

Слагаемое $\varepsilon(\lambda_1, \lambda_2)$ характеризует отклонение $\lambda_1^*(\lambda_1, \lambda_2)$ от линейной зависимости и легко табулируется, если a и b уже выбраны.

При определении параметров λ_1 и λ_2 в функции от x можно довольствоваться однопараметрическим приближением [2]. При таком походе a и b могут быть приня-



Фиг. 1

ты просто постоянными, а ε — функцией одного λ_1. В этом случае, если прямую для приближенного представления действительной кривой $\lambda_1^*(\lambda_1)$ провести по касательной к ней в точке $\lambda_1=0$, то получим

$$\lambda_1^*(\lambda_1)=a-b\lambda_1; \quad a=0.59, \quad b=2.22, \quad \varepsilon=0 \tag{2.2}$$

Согласно [1, 2], справедливы соотношения

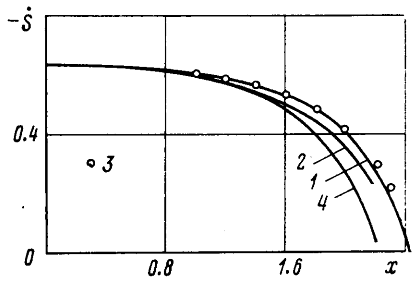
$$\lambda_1(x)=\frac{a\vartheta'}{\vartheta^b}\int_0^x \vartheta^{b-1}(\xi)\,d\xi; \qquad \lambda_2(x)=\left[\frac{\lambda_1(x)}{\vartheta'}\right]^2\vartheta\vartheta'' \tag{2.3}$$

Здесь $\vartheta(x)=\beta[T_w(x)-T_\infty]$ — безразмерный перепад температур между поверхностью пластины и неподвижной жидкостью; штрих — производная по x.

Влияние второго параметра λ_2 существенно для определения приведенного теплового потока $\dot{S}(0, x)$, для чего используются зависящие от параметра λ_2 кривые $\dot{S}(0, \lambda_1, \lambda_2)$.

Проиллюстрируем применение результатов двухпараметрического решения универсальных уравнений (1.1) к частной задаче о свободной конвекции вблизи неизотермической вертикальной пластины с синусоидальным распределением температуры поверхности $\vartheta=\sin x$.

В каждом сечении x по формулам (2.3) определяем параметры $\lambda_1(x)$ и $\lambda_2(x)$. Применяя линейную интерполяцию результатов двухпараметрического решения, определяем соответствующий найденным значениям λ_1 и λ_2 приведенный тепловой поток $\dot{S}(0, x)$, который на фиг. 2 сравниваем с точным численным решением, взятым из работы [5]. На фиг. 2 обозначено: *1* — точное численное решение; *2* — полное однопараметрическое решение; *3* — двухпараметрическое решение настоящей работы; *4* — локальное однопараметрическое решение.



Фиг. 2

Как видно из графика, если локальное однопараметрическое и полное однопараметрическое решения дают некоторое расхождение с точным численным решением, то учет второго параметра позволяет получить практически полное совпадение по методу обобщенного подобия с точным решением. Погрешность составляет менее 1%.

Данный частный пример иллюстрирует быстроту сходимости метода обобщенного подобия в задачах о свободной конвекции вблизи вертикальной неизотермической пластины.

Поступила 14 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. *Золотов Н. Л.* Метод обобщенного подобия в задачах свободной конвекции с произвольным распределением температуры или теплового потока на вертикальной стенке. Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 3.
2. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1978.
3. *Озерова Е. Ф., Симуни Л. М.* Численное решение уравнений двухпараметрической теории пограничного слоя. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1970, № 313.
4. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.
5. *Kao T. T., Domoto G. A., Elrod H. G.* Jr. Free convection along a nonisothermal vertical flat plate. Trans. ASME. J. Heat Transfer, 1977, vol. C 99, No. 1.

Технический редактор *Е. В. Синицына*

Сдано в набор 17.07.80 Подписано к печати 11.09.80 Т-16641 Формат бумаги $70\times108^1/_{16}$
Высокая печать Усл. печ. л. 16,8 Уч.-изд. л. 19,1 Бум. л. 6 Тираж 1920 экз. Зак. 3290

Издательство «Наука». 103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Шубинский пер., 10