МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 · 1980

УДК 532.011.1

К ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА В ВОДЕ

Ю. Л. ЯКИМОВ

(Москва)

В статье рассматривается вопрос об отборе решений, описывающих установившееся потенциальное обтекание тел потоком идеальной несжимаемой жидкости. Отбор основан на ограничениях, вытекающих из физических свойств реальной жидкости, и из наличия пограничного слоя на теле. В частности, для любого тела можно указать минимальное число Эйлера, ниже которого течение без кавитации становится физически недопустимым. В предельном случае при числе Эйлера, равном нулю, физически допустима только схема Кирхгофа, а сечение каверны стремится к кругу. Выведено уравнение для предельных форм каверн при малых числах кавитации и приводится сравнение с известными результатами.

В развитых кавитационных течениях кроме геометрии тела и положения точек отрыва поле скоростей жидкости зависит только от разности давлений в бесконечности и на границе полости, т. е. от числа кавитации $\sigma=2(p_0-p_k)/\rho V_0^2$, и не зависит от числа Эйлера $\mathrm{Eu}=2p_0/\rho V_0^2$ (ρ – плотность жидкости, p_k – давление в каверне, V_0, p_0 – скорость и давление далеко от тела), так как уравнения, описывающие течение несжимаемой жидкости, не зависят от аддитивной постоянной давления. При такой постановке задачи на границе тела и внутри потока могут возникнуть области с отрицательным давлением [1].

В реальной покоящейся жидкости давления не могут быть отрицательными [1], так как на границе твердого тела имеется пограничный слой с заторможенной жидкостью. Следовательно, в качестве ограничительного условия при формулировке математической постановки задачи на границе тела будет $p\geqslant 0$ (указанное ограничение может не иметь места при подвижных твердых границах). Аналогичное условие имеет место далеко от тела, где жидкость движется поступательно и покоится в связанной с ней системе координат, а также на границе каверны.

1. Рассмотрим потенциальное течение с давлением на границах области $p\geqslant 0$, тогда из гипергармоничности для функции p следует [2], что во всей области $p\geqslant 0$. Таким образом, положительность давления во всей области течения следует из указанных выше граничных условий. Непосредственно из свойств жидкости это условие не очевидно, так как, если области с $p<0$ невелики или, наоборот, скорость течения очень велика, зародыши кавитационных пузырьков могут не успеть развиться настолько, чтобы существенно изменить картину течения.

Ограничение $p\geqslant 0$ позволяет указать некоторые априорные свойства кавитационных течений, имеющих физический смысл.

В качестве примера рассмотрим предельную ситуацию установившегося течения при $\mathrm{Eu}=0$, соответствующую малым начальным давлениям или большим скоростям движения тела. Тогда из этих условий и интеграла Бернулли имеем $V\leqslant V_0$. Отсюда следует, что течения в неограниченной области, с ограниченными поверхностями каверн и твердых границ, не имеют физического смысла. Действительно, далеко от тела и каверны эти течения эквивалентны поступательному потоку и сосредоточенной главной особенности (сток для схемы Эфроса или диполь для схемы Рябушинского и т. д.). Если в какой-либо точке пространства скорости поступа-

[1] Здесь не имеется в виду специально очищенная вода, в которой возможно достижение отрицательных давлений.

тельного потока V_0 и индуцируемые этой особенностью имеют разный знак, то в симметричной относительно особенности точке скорости будут иметь одинаковый знак. Таким образом, всегда можно указать точку в потоке, для которой $V>V_0$, что противоречит полученному ограничению на скорость. Не существует также физически допустимых решений при Eu=0, обтекающих тело в трубе или периодическую систему тел, так как в зауженных местах скорость должна быть больше V_0.

Таким образом в случае Eu=0 одновременно имеет место схема Кирхгофа и принцип Бриллюэна (1913 г.) [2], о максимуме скорости на границе каверны, то есть выполняются условия теоремы М. А. Лаврентьева [3], согласно которой в плоском и осесимметричном случае сопротивление тела конечно, причем минимум сопротивления достигается на телах, геометрия которых совпадает с формой каверны при обтекании пластины или диска по схеме Кирхгофа. Этот результат изложен в [2, 5].

Докажем наличие конечного сопротивления в общем случае. Доказательство основано на почти очевидном факте, что достаточно большие трубки тока, содержащие тело и бесконечную каверну, монотонно расширяются, а при $p\geqslant 0$ со стороны внешнего потока на их поверхности действует сила сопротивления. С другой стороны, внутренний поток далеко впереди и далеко позади тела имеет одну и ту же скорость и не изменяет свой импульс, следовательно, сила сопротивления может быть приложена только к телу.

Для доказательства наличия расширяющейся трубки тока рассмотрим потенциал течения φ_0: $\varphi_0=V_0x+\varphi_1$ при $r_i\to\infty$ $\operatorname{grad}\varphi_1\to 0$, и на границе тела и каверны

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}=0,\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-V_0\cos(nx) \tag{1.1}$$

На границе каверны $V=V_0$ и, следовательно:

$$\varphi_1=\varphi_1(x_0)+\int_{x_0}^{x}V_0\,d\tau-V_0x=\varphi_1(x_0)-V_0x_0+ \tag{1.2}$$

$$+V_0\int_{x_0}^{x}\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-(R')^2}}\right]dx\approx\varphi_1(x_0)-V_0x_0+\frac{1}{2}V_0\int_{x_0}(R')^2\,dx$$

где x_0 — некоторое сечение каверны, τ — координата вдоль линии тока на поверхности каверны, R — расстояние линии тока на границе каверны от оси x.

Представим φ_1 в виде потенциала простого и двойного слоев, расположенных по Σ поверхности тела и каверны [3, 4]:

$$\varphi_1=\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}dS-\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\varphi_1\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS \tag{1.3}$$

Направление нормали внутрь тела и каверны. Кроме поверхности Σ необходимо еще написать аналогичные интегралы на бесконечно удаленной поверхности, однако в рассматриваемых случаях они несущественны. Для фиксированного двухгранного угла θ с вершиной на оси x имеет место

$$dS=-\frac{1}{\cos(nx)}dS_k\simeq\frac{1}{R'}dS_k \tag{1.4}$$

где dS_k — приращение площади каверны внутри $d\theta$. Из (1.2) и (1.3) получим, что при $R_0^2 \leqslant R_k^2 \leqslant x/\ln^{1/2} x$ для точек, далеких от Σ, последний интеграл в (13) несуществен, так как он сходится и имеет по параметрам x_i более высокий порядок убывания по сравнению с первым интегралом. Рассматривать каверны, расширяющиеся быстрее, не имеет смысла, так как с ними связано бесконечное сопротивление [4]. При этом оценка для φ_1 примет вид с учетом (1.1) и (1.4)

$$\varphi_1 \simeq -\frac{V_0}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}\frac{1}{r}\,dS_k \tag{1.5}$$

При $R_0^2 < R_k^2 \leqslant x/(\ln x)^{1+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — любое малое число, интеграл в (1.5) сходится, для любого конечного участка Σ при $r\to\infty$ интеграл эквивалентен источнику с интенсивностью $V_0 S_k/4\pi$, течение от которого в области далеко от Σ имеет монотонно расширяющиеся трубки тока, что и требовалось доказать.

Пусть теперь имеет место

$$\frac{x}{\ln^{1+\varepsilon} x} \leqslant R_k^2 \leqslant \frac{x}{\ln^{1/2} x} \tag{1.6}$$

Рассмотрим аналогичное (1.3) представление для $\Delta V_x = \partial\varphi_1/\partial x$:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial V_x}{\partial n}\,dS - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS \tag{1.7}$$

На каверне из равенства $|V_0| = V_0$ и из кинематических условий имеем

$$\Delta V_x = V_0[\cos\operatorname{arc\,tg} R' - 1] \simeq -\frac{1}{2}V_0(R')^2 \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial n} = \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{\partial V_n}{\partial \tau} \approx V_0 R'' \tag{1.9}$$

Рассмотрим (1.2) при условии (1.6). Разность потенциалов для двух различных линий тока $R_1(x)$ и $R_2(x)$ может быть представлена в виде

$$\Delta\varphi(x) = \varphi(R_1) - \varphi(R_2) = \frac{1}{2}V_0\left[\int\limits_{x_0}^{x}(R_1')^2\,dx - \int\limits_{x_0}^{x}(R_2')^2\,dx\right] \tag{1.10}$$

С другой стороны, угол между вектором скорости и осью x при $x\to\infty$ имеет порядок R', а ширина каверны — порядок R, поэтому $|\Delta\varphi_1| < |R'R| \leqslant \ln^{-1/4} x \to 0$.

Следовательно, разность больших величин в (1.10) стремится к нулю, т. е. их отношение стремится к 1:

$$\frac{\varphi(R_1)}{\varphi(R_2)} \to \frac{(R_1')^2}{(R_2')^2} \to \frac{R_1}{R_2} \to 1$$

Таким образом, если найдется на поверхности каверны линия тока такая, что интеграл от $(R')^2$ расходится, то сечение каверны плоскостью, перпендикулярной направлению движения, стремится к окружности. В частности, для осесимметричных каверн с конечным сопротивлением $R \sim \sqrt{x}/\ln^{1/4} x$ этот интеграл расходится.

Это утверждение справедливо при $\sigma = 0$ и не связано с числом Eu. Для дальнейшего важно, что в случае (1.6) поведение линий тока при $x\to 0$ в оценках (1.7)—(1.9) можно считать одинаковым.

Так как для точек, удаленных от Σ, последний интеграл в (1.7) несуществен, имеем

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma=\Sigma_0+\Sigma_1+\Sigma_2}\frac{1}{r}\frac{\partial V_x}{\partial n}dS \tag{1.11}$$

где Σ_0 — поверхность тела и каверны вблизи тела, где асимптотические оценки (1.4), (1.6), (1.8) и (1.9) еще несправедливы. Σ_1 — некоторая достаточно большая конечная часть, Σ_2 — остальная часть Σ.

Рассмотрим V_y при $r\to\infty$. Для этого (1.11) продифференцируем по y и проинтегрируем по x и, учитывая (1.9), получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}&=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}dx=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{x}dx\int\limits_{\Sigma}\frac{y}{r^3}\left(-\frac{\partial V_x}{\partial n}\right)dS=\\&=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{x}dx\int\limits_{\Sigma_0}\frac{y}{r^3}\left(-\frac{\partial V_x}{\partial n}\right)dS+\int\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2}\frac{y}{r^3}(-V_0R'')dS.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Последний интеграл существенно положителен при $y>0$, так как R'' совпадает со знаком кривизны линии тока и при условии $p_k=0$ $R''<0$.

Если точки расположены достаточно далеко от Σ_0 и Σ_1, то $r(\Sigma_0)/$ $/r(\Sigma_1)\sim 1$, а в связи с тем что интеграл от $\partial V_x/\partial n$ по $\Sigma_1+\Sigma_2$ при условии (1.6) или очень велик (при малых ε), или расходится, интегралом по Σ_0 при $r\to\infty$ можно пренебречь по сравнению с Σ_1:

$$V_y=\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\simeq\int\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2}>\int\limits_{\Sigma_1}>0 \tag{1.13}$$

Таким образом, при достаточном удалении от Σ $V_y>0$, что означает и в случае оценки (1.6) наличие монотонно расширяющейся трубки тока. При этом обтекаемое тело имеет конечное сопротивление.

Заметим, что для величины этого сопротивления может быть указана нижняя оценка, зависящая от размеров тела и начальной площади сечения каверны. Для простых случаев, как отмечено выше, М. А. Лаврентьевым получена не оценка, а нижняя граница для величины сопротивления.

2. Рассмотрим асимптотические формы тонких стационарных осесимметричных каверн. Этот вопрос рассматривался многими авторами [6–10]. Ниже будет получено более общее дифференциальное уравнение для таких каверн и проведено его сравнение с опубликованными результатами.

В [5, 6] приведено одно и то же уравнение для формы каверны, которое в стационарном случае имеет вид

$$\frac{1}{4}u''\ln u+\frac{1}{8}\frac{(u')^2}{u}-\frac{1}{2}\sigma=0\quad (u=R^2) \tag{2.1}$$

При этом в [6] учтены дополнительные члены, связанные с влиянием тела и следа, которые в (2.1) опущены.

Это же уравнение для центральной части каверны предлагается в [9, 10]. В предельном случае $\sigma=0$ в [8, 10] в тех же обозначениях предлагаются уравнения в виде

$$C\left(\frac{1}{u'}\right)'=\frac{1}{8}\frac{(u')^2}{u},\quad \varphi u'=C \tag{2.2}$$

где C — постоянная, связанная с энергией слоя жидкости. Уравнение (2.2) допускает асимптотику [5]

$$u \simeq x/\ln^{1/2} x, \quad \varphi \approx \ln^{1/2} x \tag{2.3}$$

Утверждение [6,7] о том, что (2.1) содержит асимптотику (2.3), основано на недоразумении: в действительности знаки первых двух членов (2.1) при подстановке (2.3) одинаковы, так как при выводе (2.1) предполагалось, что $\ln u \simeq \ln u/l^2 \ll 0$.

Таким образом, (2.1) и (2.2) существенно различаются, хотя они выведены в близких предположениях о тонкости каверны. Естественно предположить существование единого уравнения, описывающего форму тонких каверн.

После подстановки (1.1), (1.4) в (1.3) получим

$$\varphi_1 = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_\Sigma \frac{V_0 \cos nx}{r} dS - \frac{1}{4\pi}\int\limits_\Sigma \left[\frac{(x-x_0)}{r^3}\cos nx + \right.$$
$$\left. + \frac{(y-y_0)}{r^3}\cos ny + \frac{(z-z_0)}{r^3}\cos nz\right]\varphi_1\, dS$$

где $\Sigma=\Sigma_0+\Sigma_1+\Sigma_2$ — поверхности тела, каверны и следа. Сделав следующую замену, получим

$$y_0 = R_0(x_0)\cos\theta, \quad z = R_0(x_0)\sin\theta$$
$$\cos ny = \cos nx \cos\theta, \quad \cos nz = \cos nx \sin\theta$$
$$dS = \frac{RR'\, dx_0\, d\theta}{\cos nx} = \frac{d\theta\, du}{2\cos nx} = \frac{u'(x_0)\, dx_0\, d\theta}{2\cos nx}$$
$$\varphi = \frac{\varphi_1}{V_0}$$

$$\varphi = -\frac{1}{8\pi}\int\limits_\Sigma \frac{d\theta\, du}{r} - \frac{1}{8\pi}\int\limits_\Sigma \frac{x-x_0}{r^3}\varphi\, d\theta\, du - \tag{2.4}$$
$$-\frac{1}{8\pi}\int\limits_\Sigma \frac{y-y_0}{r^3} + \varphi\cos\theta\, d\theta\, du - \frac{1}{8\pi}\int \frac{z-z_0}{r^3}\varphi\sin\theta\, d\theta\, du$$

Рассмотрим радиальную скорость в плоскости $z=0$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{8\pi}\int\limits_\Sigma \frac{(y-y_0)\, d\theta\, du}{r^3} + \frac{3}{8\pi}\int\limits_\Sigma \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r^5}\varphi\, d\theta\, du + \tag{2.5}$$
$$+\frac{3}{8\pi}\int\limits_\Sigma \left[\frac{(y-y_0)^2}{r^5} - \frac{1}{3}\frac{1}{r^3}\right]\varphi\cos\theta\, d\theta\, du +$$
$$+\frac{3}{8\pi}\int \frac{z_0(y-y_0)}{r^5}\sin\theta\, d\theta\, du$$

Если каверна тонкая, то при вычислении вклада в вертикальную скорость на каверне от особенностей, расположенных на поверхности тела Σ_0 и следа Σ_2, можно положить $r=|x-x_0|$. В самом простом случае относительно малых размеров тела и следа полагая на этих поверхностях $x-x_0=x-x_1$ и $x_0-x=x_2-x$, $y_1=y_2=0$, $u(x_1)=u_1$; $u(x_2)=u_2$, $\varphi(x_1)=\varphi_1$, $\varphi(x_2)=\varphi_2$ получим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{u_1 R}{4(x-x_1)^3} - \frac{u_2 R}{4(x_2-x)^3} + \frac{3}{4}\frac{R\varphi_1 u_1}{(x-x_1)^4} - \tag{2.6}$$

$$-\frac{3}{4}\frac{R\varphi_2 u_2}{(x_2-x)^4}+\frac{1}{8\pi}\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{(y-y_0)u'\,d\theta\,dx_0}{r^3}+$$

$$+\frac{3}{8\pi}\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{(x-x_0)(y-y_0)u'\varphi\,d\theta\,dx_0}{r^5}+$$

$$+\frac{3}{8\pi}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[\frac{(y-y_0)^2}{r^5}-\frac{1}{3r^3}\right]u'\varphi\cos\theta\,d\theta\,dx_0+$$

$$+\frac{3}{8\pi}\int\frac{z_0(y-y_0)}{r^5}u'\varphi\sin\theta\,dx_0$$

При оценке интегралов следует учесть, что эти интегралы представляют V_y от источников и диполей, интенсивность которых пока формально можно считать независимой от формы поверхности. Если бы поверхность была бесконечной цилиндрической и произведение $\varphi u'$ было бы постоянно, то вклад от диполей вообще отсутствовал бы, а V_y определялась бы только интегралом от источников.

Таким образом, для цилиндра и постоянных u' и $\varphi u'$ имеем

$$\frac{1}{8\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y-y_0}{r^3}u'\,d\theta\,dx_0-R'=0 \tag{2.7}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r^5}\varphi u'\,d\theta\,dx_0=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{(y-y_0)^2}{r^5}-\frac{1}{3r^3}\right]\times$$

$$\times\varphi u'\cos\theta\,d\theta\,dx_0=\int\frac{z_0(y-y_0)}{r^5}\varphi u'\sin\theta\,d\theta\,dx_0=0$$

Вычитая из (2.6) тождества (2.7), получим, что разностями интегралов на некоторых промежутках $x-x_0 \gg R_0$ вследствие близости каверны к цилиндру и почти постоянных u' и $\varphi u'$ можно пренебречь. Вне этих промежутков представим r^{-n} в виде

$$\begin{aligned} r^{-n}&=((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2)^{-n/2}=\\ &=r_1^{-n}\left(1+\frac{R_0^2-2R_0R\cos\theta}{2n/r_1^2}\right)^{-n/2}=\\ &=r_1^{-n}\left(1-\frac{R_0^2-2R_0R\cos\theta}{2n/r_1^2}\right),\quad r_1=\sqrt{(x-x_0)^2+R^2}\end{aligned} \tag{2.8}$$

Подставив (2.8) в разность между (2.6) и (2.7), получим, что неизвестные функции $R_0(x_0)$, $u(x_0)$, $\varphi(x_0)$ входят только в числитель, который теперь можно представить в виде ряда Тейлора по $(x-x_0)$. После вычисления интегралов, сохраняя только главные члены (при оценке членов можно ориентироваться на асимптотику (2.3)), получим

$$\begin{aligned} V_y=R'&-\frac{Ru'}{8(x-x_1)^2}-\frac{Ru'}{8(x-x_2)^2}-\frac{1}{8}Ru'''\ln\frac{u}{(x-x_1)(x_2-x)}+\\ &+\frac{1}{2R}(\varphi u')'+\frac{Ru''}{4(x-x_1)}+\frac{Ru''}{4(x_2-x)}+\frac{Ru_1}{4(x-x_1)^3}-\\ &-\frac{Ru_2}{4(x_2-x)^3}+\frac{3}{4}\frac{R\varphi_1u_1}{(x-x_1)^4}-\frac{3}{4}\frac{R\varphi_2u_2}{(x_2-x)^4}+\frac{1}{32}\frac{(u')^2\varphi}{R^3}\end{aligned} \tag{2.9}$$

Получено выражение V_y в зависимости от площади тела и следа

(πu_1, πu_2) величины потенциала на них (φ_1, φ_2), положения и радиуса каверны, а также их производных. Имея в виду исследование асимптотики (2.3), выделим несущественные для этого последние семь членов, введя обозначение

$$a=a(x, x_1, x_2, u_1, u_2, \varphi_1, \varphi_2, u, u'')=$$
$$=u\left[\frac{u_1}{2(x-x_1)^3}-\frac{u_2}{2(x_2-x)^3}+\frac{3\varphi_1 u_1}{2(x-x_1)^4}-\frac{3\varphi_2 u_2}{2(x_2-x)^4}\right]+ \tag{2.10}$$
$$+uu''\left[\frac{1}{2(x-x_1)}+\frac{1}{2(x_2-x)}\right]$$

Конкретное выражение первой скобки в выражении (2.10) может быть и другим в зависимости от свойств тела и следа и расположенных на них особенностей.

Выражение для V_y примет вид

$$V_y=\frac{1}{2R}\left[u'-\frac{uu'}{4(x-x_1)^2}-\frac{uu'}{4(x_2-x)^2}-\right. \tag{2.11}$$
$$\left.-\frac{1}{4}uu'''\ln\frac{u}{(x-x_1)(x_2-x_1)}+(\varphi u')'+a\right]$$

С другой стороны, V_y и ΔV_x выражаются через скорость на границе V_k и угол наклона α:

$$V_y=V_k\sin\alpha,\quad \varphi'=\frac{1}{V_0}(V_k\cos\alpha-V_0) \tag{2.12}$$
$$\operatorname{tg}\alpha=R';\quad \frac{V_k^2}{2}-\frac{V_0^2}{2}=\frac{\Delta p}{\rho}$$

Равенства (2.12) являются точными. Используя малость α и $\Delta p/\rho$, получим

$$V_y=\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)\sin\alpha=R'+R'\frac{\sigma}{2}-\frac{1}{2}(R')^3=$$
$$=\frac{1}{2R}\left[u'+\frac{\sigma u'}{2}-\frac{(u')^3}{8u}\right] \tag{2.13}$$
$$\varphi'=\frac{\sigma}{2}-\frac{1}{2}(R')^2=\frac{\sigma}{2}-\frac{(u')^2}{8u}$$

Исключим из (2.11) и (2.13) V_y:

$$(\varphi u')'=\frac{uu'}{4(x-x_1)^2}+\frac{uu'}{4(x_2-x)^2}+\frac{1}{4}uu'''\ln\frac{u}{(x-x_1)(x_2-x)}- \tag{2.14}$$
$$-\frac{(u')^3}{8u}+\frac{\sigma u'}{2}-a,\quad \varphi'=\frac{\sigma}{2}-\frac{(u')^2}{8u}$$

После исключения φ получим следующее уравнение для площади каверны u:

$$\frac{\sigma}{2}-\frac{(u')^2}{8u}=\frac{d}{dx}\frac{1}{u'''}\left[\frac{uu'}{4(x-x_1)^2}+\right. \tag{2.15}$$
$$\left.+\frac{uu'}{4(x_2-x)^2}+\frac{1}{4}uu'''\ln\frac{u}{(x-x_1)(x_2-x)}-a\right]$$

К уравнениям (2.14) и (2.15) должны быть добавлены граничные условия или другие дополнительные уравнения, например условие $\varphi=0$ в плоскости миделя каверны для симметричной схемы Рябушинского. Если положить вблизи миделя $u'''\sim u'/(x_1-x_2)^2$, то в квадратных скобках (2.15) останется только член вида

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}\frac{uu'''}{u''}\ln\frac{u}{(x-x_1)(x_2-x)}+a\right]\simeq$$

$$\simeq\frac{d}{dx}\left[\frac{uu'''}{u'u''}u'\ln\frac{u}{4(x_2-x_1)^2}+a\right]\simeq u''\ln\frac{u}{4(x_2-x_1)}+a$$

Следовательно, (2.1) может быть использовано вблизи миделя, как это отмечено в [10].

При $\sigma\to 0$ главные члены правой части первого уравнения (2.14) после подстановки в них асимптотических соотношений (2.3) и $(x_2-x)=$ $=k(x-x_1)$, где $k\sim\ln x\gg 1$, взаимно сокращаются. При этом приближенно выполняются (2.2), указанные в [8–10].

Таким образом, (2.14), (2.15) не только содержат известные предельные асимптотические уравнения, но, имея более высокий порядок, позволяют в принципе получить более содержательную зависимость формы каверны от различных условий.

Поступила 2 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
2. *Биркгоф Г., Сарантонелло Э.* Струи, следы и каверны. М., «Мир», 1964.
3. *Лаврентьев М. А.* О некоторых свойствах однолистных функций с приложениями к теории струй. Математический сборник, 1938, т. 4, вып. 3.
4. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., Изд-во АН СССР, 1951.
5. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. М., «Наука», 1979.
6. *Григорян С. С.* Приближенное решение задачи об отрывном обтекании осесимметричного тела. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
7. *Якимов Ю. Л.* Об осесимметричном срывном обтекании тела вращения при малых числах кавитации. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
8. *Логвинович Г. В.* Гидродинамика течений со свободными границами. Киев, «Наукова думка», 1969.
9. *Логвинович Г. В., Серебряков В. В.* О методах расчета формы тонких осесимметричных каверн. В сб.: Гидромеханика, вып. 32. Киев, «Наукова думка», 1975.
10. *Логвинович Г. В.* Вопросы теории тонких осесимметричных каверн. Тр. ЦАГИ, 1976, вып. 1797.