

$\alpha = \alpha_k(\xi)$:

$$(3.1) \quad \xi_0 = \frac{[(1+\mu_1) + (1-\mu_1)\gamma][(1+\mu_2) - (\mu_2-1)\gamma]}{2[(3\gamma-1) + 2\gamma\sqrt{3-\gamma}]}$$

$$\mu_{1,2} = 1/2(3 \mp \sqrt{33})$$

Этот же результат можно получить более простым способом. Для этого преобразуем второе уравнение из (1.2)

$$b(a_1+a_2) - a_1a_2 = M_{2n}^2(1+b^2) - 1$$

$$a_1 = \text{ctg}(\alpha_1' + \chi); \quad a_2 = \text{ctg}(\alpha_2' + \chi); \quad b = -a_3 = \text{ctg}(\alpha - \chi)$$

отсюда следует

$$(b-a_1)(b-a_2) = (1+b^2)(1-M_{2n}^2)$$

После применения формулы (2.1) получим новую связь

$$(3.2) \quad 2 \cos \alpha_1' \cos \alpha_2' = [\cos(\alpha_1' - \alpha_2') + \sin \alpha](1 - M_{2n}^2)$$

В предельном случае, когда $\alpha_1' = \alpha_2' = \alpha_k'$, отсюда получается

$$(3.3) \quad \cos \alpha_k' = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_k}{2} \right) \sqrt{1 - M_{2n}^2} = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_k}{2} \right) \sqrt{\frac{(\gamma+1)(1-\xi)}{2\gamma}}$$

При $\xi = \xi_0$: $\alpha_k = \alpha_k' = \alpha_0$, поэтому

$$(3.4) \quad \xi_0 = \frac{2\gamma\sqrt{3-\gamma} - 3\gamma + 1}{\gamma + 1}$$

Формула (3.4), очевидно, более простая, чем (3.1). При $\gamma = 1.4$ обе они дают $\xi_0 \approx 0.1424$.

Чтобы равенство $\alpha_k = \alpha_0$ имело место, требуется еще условие $\xi_0 \geq 0$. Легко найти, что $\xi_0 = 0$ при $\gamma = \gamma_k = (7 + \sqrt{33})/8 \approx 1.5931$. На основе (3.4) можно доказать, что при $\gamma \leq \gamma_k$ имеем $\xi_0(\gamma) \geq 0$, т. е. возможен случай $\alpha_k = \alpha_k'$ и кривая $\alpha = \alpha_k(\xi)$ состоит из двух монотонных ветвей. При $\gamma > \gamma_k$ кривая $\alpha_k(\xi)$ не касается прямой $\alpha = \alpha_0$ на интервале $[0, 1]$ и является монотонной возрастающей кривой.

Докажем, что при $1 \leq \gamma \leq \gamma_k$ совпадение углов падения и отражения возможно только при $\xi_0 \leq \xi \leq 1$ [3]. Действительно, пусть $\alpha_1' = \alpha = \alpha_0$, тогда из (2.1) имеем $\chi = \pi/4 - \alpha_2'/2$. С другой стороны, из (1.1) следует, что

$$\text{ctg} \chi = \frac{(\gamma+1) + (\gamma-1)\xi}{(1-\xi)\sin 2\alpha} - \text{tg} \alpha$$

Отсюда видно, что при $\alpha = \alpha_0$ $\text{ctg} \chi$ будет возрастающей функцией от ξ , поэтому при $\xi_0 \leq \xi$ имеем $\chi \leq \chi_0$ или $\alpha_2' \geq \alpha_0 = \alpha_1'$, т. е. реализуется слабая отраженная волна. В противном случае, когда $\xi < \xi_0$, имеем $\alpha_2' < \alpha_0 = \alpha_1'$, что невозможно, так как в действительности реализуется только слабая отраженная волна.

В случае $3 \geq \gamma \geq \gamma_k$ совпадение углов падения и отражения возможно для всех значений ξ .

Автор выражает большую благодарность В. П. Стулову за обсуждение и ценные советы.

Поступила 21 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
2. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
3. Арутюнян Г. М., Карчевский Л. В. Отраженные ударные волны. М., «Машиностроение», 1973.

УДК 533.6.011.8

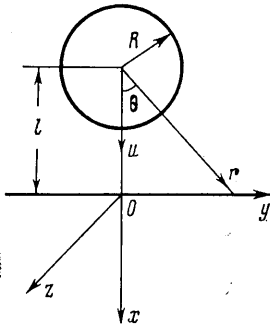
О ВЛИЯНИИ ПЛОСКОЙ СТЕНКИ НА ДВИЖЕНИЕ АЭРОЗОЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ В НЕОДНОРОДНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

И. Н. ИВЧЕНКО, С. М. МУРАДЯН

(Ереван)

Методом последовательных приближений исследовано влияние плоской поверхности на термофоретическую силу, действующую на аэрозольную частицу радиуса R , находящуюся на расстоянии l от поверхности и движущуюся в нормальном к ней направлении. Задача решена в первом приближении по $R/l \ll 1$.

Теория движения аэрозольных частиц в неоднородном температурном поле развита только для неограниченных газовых сред [1, 2]. Однако в реальных условиях газ ограничен жесткой поверхностью, которая оказывает влияние как на поле скоростей, так и на температурное поле в окрестности частицы. Возмущение этих полей поверхностью, ограничивающей течение газа, вызывает изменение как стоксовской силы сопротивления, так и термофоретической силы, обусловленной температурным полем.



В монографии [3] представлены исследования влияния стенки на стоксовскую силу сопротивления. Что касается влияния стенки на тепловую силу, то эти исследования в литературе отсутствуют.

1. Рассмотрим движение аэрозольной частицы в режиме течения со скольжением при малых числах Рейнольдса в нормальном направлении к бесконечной плоской стенке в газе с неоднородным температурным полем, обусловленным разностью температур между двумя удаленными на большое расстояние плоскими поверхностями. При малых числах Рейнольдса и Пекле распределение средней скорости и температуры газа может быть получено из следующей системы уравнений гидродинамики и теплопроводности:

$$(1.1) \quad \eta \Delta v = \nabla p, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \Delta T = 0$$

Здесь η — вязкость газа, v — средняя скорость, p — давление, T — температура газа.

Распределение температуры внутри частицы удовлетворяет однородному уравнению Лапласа

$$(1.2) \quad \Delta T_p = 0$$

Введем систему координат, изображенную на фигуре. Граничные условия для скорости газа имеют вид

$$(1.3) \quad \begin{aligned} v(0, y, z) = 0, \quad v(-\infty, y, z) = 0 \\ v_r = u \cos \theta \\ v_\theta = -u \sin \theta + C_m \lambda \sigma_{r\theta} + C_{Sl} \frac{v}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Здесь C_m — коэффициент изотермического скольжения [1], C_{Sl} — коэффициент теплового скольжения [1], λ — длина свободного пробега газовых молекул ($\lambda \ll R$), $\sigma_{r\theta}$ — компонента тензора вязких напряжений, v — кинематическая вязкость газа.

Граничные условия для уравнений теплопроводности имеют вид

$$(1.4) \quad T(0, y, z) = T_0, \quad \kappa_g \frac{\partial T}{\partial r} = \kappa_p \frac{\partial T_p}{\partial r}, \quad T - T_p = C_t \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \quad (r=R)$$

Здесь κ_g и κ_p — коэффициенты теплопроводности газа и частицы, C_t — коэффициент температурного скачка [4].

Вдали от частицы тепловое поле линейно с постоянным градиентом $(\nabla T)_\infty$.

2. **Приближенный метод решения.** Чтобы удовлетворить граничным условиям как на стенке, так и на поверхности частицы, воспользуемся методом отражений [3]. В силу линейности уравнений и граничных условий поля скоростей, давления и температуры представим в виде суммы полей

$$(2.1) \quad \begin{aligned} v = v^{(1)} + v^{(2)} + v^{(3)} + \dots, \quad p = p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(3)} + \dots \\ T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)} + \dots \end{aligned}$$

Поле $v^{(1)}$ удовлетворяет граничным условиям на частице в отсутствие стенки, $v^{(2)}$ компенсирует $v^{(1)}$ на стенке, $v^{(3)}$ компенсирует $v^{(2)}$ на поверхности частицы и т. д. Аналогично вводятся и поля $T^{(i)}$.

Сила, действующая на частицу, может быть получена суммированием сил, обусловленных полями $v^{(i)}$. Поля скоростей с четными номерами не дают вклада в силу [5], поэтому действующая на частицу сила может быть представлена в виде

$$(2.2) \quad F = F^{(1)} + F^{(3)} + \dots$$

Поле $T^{(1)}$ дает распределение температуры у стенки в отсутствие частицы

$$(2.3) \quad T^{(1)} = T_{0p} + (\nabla T)_\infty r \cos \theta$$

Здесь $T_{0p} = T_0 + (\nabla T)_x l$ — температура в центре частицы.

Поля $v^{(1)}$, $p^{(1)}$ дают распределение скоростей и давления локальных течений газа в окрестности частицы, обусловленных неоднородностью температуры и движением частицы. Поле $T^{(2)}$ учитывает искажение $T^{(1)}$ частицей. Решение уравнений теплопроводности и гидродинамики для этих полей имеет вид

$$(2.4) \quad v_r^{(1)} = \left(\frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} \right) \cos \theta, \quad v_\theta^{(1)} = \left(\frac{A}{2r^3} - \frac{B}{2r} \right) \sin \theta$$

$$p^{(1)} = p_\infty + \eta \frac{B}{r^2} \cos \theta, \quad T^{(2)} = C \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos \theta$$

Здесь A , B , C — постоянные, определяемые из граничных условий (1.3), (1.4).

Поскольку $v^{(1)}$ входит в качестве граничного условия для $v^{(2)}$, слагаемые A/r^3 дают вклад в отраженное от стенки поле $\sim (R/l)^3$, поэтому с точностью до членов первого порядка по R/l этими слагаемыми можно пренебречь. В этом приближении для поля $v^{(1)}$ в декартовых координатах имеем

$$(2.5) \quad v_x^{(1)} = \frac{B}{2} \left[\frac{(x+l)^2}{r^3} + \frac{1}{r} \right], \quad v_y^{(1)} = \frac{B}{2} \frac{(x+l)y}{r^3}, \quad v_z^{(1)} = \frac{B}{2} \frac{(x+l)z}{r^3}$$

3. Определение полей $v^{(2)}$ и $T^{(3)}$. Из решения системы гидродинамических уравнений $v^{(1)}$, $p^{(1)}$ можно методом зеркальных отражений [3] получить новое решение при помощи формул

$$(3.1) \quad v_x^* = v_x^{(1)} - 2x \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{x^2}{\eta} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x}, \quad v_y^* = -v_y^{(1)} - 2x \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial y} + \frac{x^2}{\eta} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial y}$$

$$v_z^* = -v_z^{(1)} - 2x \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial z} + \frac{x^2}{\eta} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial z}, \quad p^* = p^{(1)} + 2x \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x} - 4\eta \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial x} \frac{4v_x^{(1)}}{\partial x}$$

Новое решение v^* , p^* удовлетворяет следующим граничным условиям на стенке:

$$(3.2) \quad v_x^* = v^{(1)}, \quad v_y^* = -v_y^{(1)}, \quad v_z^* = -v_z^{(1)}$$

Поле $v^{(2)}$ соответствует зеркальному отражению v^* относительно стенки

$$(3.3) \quad v_x^{(2)} = -v_x^*(-x, y, z), \quad v_y^{(2)} = v_y^*(-x, y, z), \quad v_z^{(2)} = v_z^*(-x, y, z)$$

Используя (2.5), (3.1), (3.3), будем иметь

$$(3.4) \quad v_x^{(2)} = -\frac{B}{2} \left[\frac{1}{r} + \frac{x^2 + l^2}{r^3} - \frac{6lx(l-x)^2}{r^5} \right]$$

$$v_y^{(2)} = -\frac{B}{2} \left[\frac{(x+l)y}{r^3} + \frac{6lxy(l-x)}{r^5} \right]$$

$$v_z^{(2)} = -\frac{B}{2} \left[\frac{(x+l)z}{r^3} + \frac{6lzx(l-x)}{r^5} \right]$$

Поле $T^{(3)}$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$(3.5) \quad \Delta T^{(3)} = 0$$

$$T^{(3)}(0, y, z) = -T^{(2)}(0, y, z) = -\frac{CR^2}{l^2 + y^2 + z^2}$$

Поле $T^{(3)}$ удовлетворяет однородному уравнению Лапласа с неоднородным граничным условием на стенке. Граничное условие на стенке эквивалентно добавочной температуре стенки, которая не превосходит величины CR^2/l^2 . Из этого можно заключить, что поле $T^{(3)}$ в окрестности аэрозольной частицы имеет порядок R^2/l^2 . Таким образом, с точностью, до членов первого порядка по R/l возмущение температурного поля стенкой не влияет на величину тепловой силы.

4. Вычисление поправок к тепловой силе. Поле $v^{(2)}$ входит в граничное условие для поля $v^{(3)}$. Разложим $v^{(2)}$ на поверхности частицы в ряд Тейлора по степеням R/l . Для вычисления поправок первого порядка по R/l следует использовать только первый член этого разложения $v^{(2)}(-l, 0, 0)$, поскольку $|v^{(2)}| \sim R/l$. Использование в качестве граничного условия первого члена разложения эквивалентно наличию у частицы добавочной скорости $-v^{(2)}(-l, 0, 0)$ относительно окружающей среды

$$(4.1) \quad v_x^{(2)}(-l, 0, 0) = -3B/4l, \quad v_y^{(2)} = v_z^{(2)} = 0$$

Таким образом, с точностью до членов первого порядка по R/l влиянием возмущения стенкой температурного поля можно пренебречь. Однако возмущение поля локальных течений, обусловленных неоднородным температурным полем, в окрестности частицы оказывается первого порядка по R/l . Влияние добавочной скорости приводит к увеличению как силы сопротивления, так и тепловой силы в одинаковое число раз. Выражения для тепловой силы и стоксовской силы сопротивления, полученные путем интегрирования тензора вязких напряжений, имеют вид

$$(4.2) \quad F_T = F_T^* \left(1 + \frac{9}{8} \frac{R}{l} \zeta \right), \quad F = F^* \left(1 + \frac{9}{8} \frac{R}{l} \zeta \right)$$

$$\zeta = \frac{(1 + 2C_m \lambda / R)}{(1 + 3C_m \lambda / R)}$$

Здесь F_T^* , F^* — тепловая и стоксовская силы в отсутствие стенки.

Приведенный анализ показывает, что стенка не оказывает влияния на скорость термофореза аэрозольных частиц, находящихся вдали от нее ($R/l \ll 1$), поскольку и тепловая и стоксовская силы изменяются в одинаковое число раз.

В заключение авторы выражают благодарность Ю. И. Яламову за постановку задачи, обсуждение результатов и постоянное внимание к работе.

Поступила 8 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивченко И. Н., Яламов Ю. И.* Гидродинамический метод расчета скорости термофореза умеренно крупных нелетучих аэрозольных частиц. Ж. физ. химии, 1971, т. 45, № 3.
2. *Ивченко И. Н., Яламов Ю. И.* О термофорезе аэрозольных частиц в почти свободномолекулярном режиме. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
3. *Ханпель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., «Мир», 1976.
4. *Loyalka S. K.* Momentum and temperature-slip coefficients with arbitrary accommodation at the surface. J. Chem. Phys., 1968, vol. 48, No. 12.
5. *Brenner H.* Effect of finite boundaries on the Stokes resistance of an arbitrary particle. J. Fluid Mech., 1962, vol. 12, pt. 1.

УДК 533.697.4

О ВОЗМОЖНОСТИ БЕЗОТРЫВНОГО ТЕЧЕНИЯ В СОПЛЕ С СИЛЬНО ИЗОГНУТЫМИ СТЕНКАМИ

Н. А. ПОДСЫПАНИНА, Э. Г. ШИФРИН, М. А. ПУЛАКОВ

(Москва)

Приводится пример расчета течения в плоском сопле Лаваля, контур которого на дозвуковом участке имеет вогнутость по отношению к направлению набегающего потока. В рамках гипотезы о безотрывном течении идеального газа на стенках построенного сопла отсутствуют области замедления потока. Это позволяет предположить, на основании известных критериев, существование безотрывного пограничного слоя, что должно обеспечивать безотрывность течения в целом.

Метод [1] профилирования сопел состоит в решении задачи Дирихле для уравнения Чаплыгина в прямоугольнике, расположенном в дозвуковой части плоскости годографа и опирающемся на звуковую линию. Ни краевая задача, ни алгоритм численного решения не налагают ограничений на высоту прямоугольника β . Если