

одним из элементов которой является сопло, определяют минимальное рабочее давление (здесь p_{01} — полное давление на выходе из сопла). С этой целью по результатам измерений p и p_0' было определено среднее значение коэффициента восстановления давления в выходных сечениях сопл. Параметры неравномерного потока осреднялись методом, позволяющим одновременно с достаточной точностью удовлетворить выполнение четырех интегральных соотношений, выражающих равенство полной энергии, расхода, импульса и энтропии в исходном и осредненном потоке [9].

В радиусных соплах потери полного давления очень велики. В выходном сечении сопла I величина $\langle \sigma \rangle = \langle p_{01} \rangle / p_0 = 0.45$ ($\langle p_{01} \rangle$ — среднее значение полного давления), а среднее значение числа Маха $\langle M \rangle = 4.15$. Уменьшение начального угла излома контура (сопло II), ослабляющее интенсивность скачков, приводит к уменьшению потерь ($\langle \sigma \rangle = 0.53$) и к небольшому росту среднего числа Маха ($\langle M \rangle = 4.2$). Двукратное уменьшение h^* с одновременным увеличением H/h^* (сопло III) увеличивает потери ($\langle \sigma \rangle = 0.35$). Поэтому возросло отличие среднего числа Маха ($\langle M \rangle = 4.6$) от расчетного ($M_0 = 6.1$). В профилированных соплах влияние скачков уплотнения ослабевает и коэффициент восстановления давления выше, чем в радиусных соплах. Так, в модели VI $\langle \sigma \rangle = 0.6$ ($\langle M \rangle = 4.6$).

Поступила 15 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Кгалгерман М. Г., Левин В. А., Мальков В. М., Туник Ю. В. Поле течения и коэффициенты усиления в резонаторной полости ГДЛ на продуктах горения керосина. Двумерный расчет и сравнение с экспериментом. Физика горения и взрыва, 1979, т. 15, № 1.
2. Кгалгерман М. Г., Мальков В. М., Шевырин Ю. А., Шейтельман Г. Ю. Влияние параметров торможения, размеров и контура сопла на коэффициент усиления в ГДЛ на продуктах сгорания жидких углеводородных топлив. Физика горения и взрыва, 1979, т. 15, № 6.
3. Верзовский В. П. Численный расчет плоских сверхзвуковых сопл с изломом контура. Таблицы координат сопл на числа $M=3-7$. Тр. ЦАГИ, 1975, вып. 1680.
4. Пирумов У. Г. Обратная задача теории сопла и численное решение внутренних задач газовой динамики. В сб.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике, вып. 6. М., Изд-во МГУ, 1974.
5. Колмогоров В. Ф. Численное решение обратной задачи теории сопла Лавала применительно к двумерным наравновесным течениям совершенного газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2.
6. Anderson J. D., Harris E. L. Modern advances in the physics of gasdynamic lasers. AIAA Paper, 1972, No. 143.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
8. Основы газовой динамики. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
9. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. М., «Наука», 1969, с. 254.

УДК 533.6.011.72

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРОЦЕССА РЕГУЛЯРНОГО ОТРАЖЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН ОТ ТВЕРДОЙ СТЕНКИ

ЛЕ КУОК ХЫУ

(Москва)

С помощью геометрического подхода удалось найти новую связь между геометрическими характеристиками косо́й ударной волны. С помощью полученных формул доказаны некоторые особенности процесса отражения.

Известно, что регулярное отражение ударной волны от твердой стенки в идеальном газе возможно только при угле падения, меньшем некоторого критического угла α_k . Геометрически это означает [1, 2], что в предельном случае, когда $\alpha = \alpha_k$, ударная поляра, построенная для отраженной волны R , должна касаться вектора скорости набегающего потока. Требуется найти связь между геометрическими характеристиками α (угол падения), α' (угол отражения), χ (угол поворота течения), а также найти критический угол α_k .

1. Пусть φ — угол между скоростью газа перед волной и фронтом волны. Тогда между χ и φ существует связь

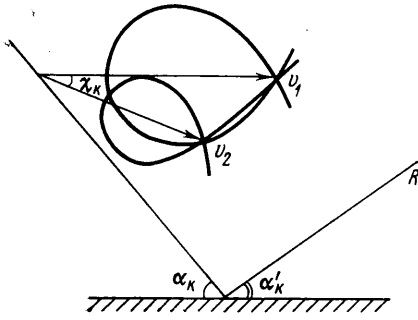
$$(1.1) \quad \operatorname{ctg} \chi = \operatorname{tg} \varphi \left[\frac{(\gamma+1)M^2}{2(M^2 \sin^2 \varphi - 1)} - 1 \right]$$

Каждый луч $\chi = \text{const}$ пересекает ударную поляру в трех точках и можно построить три угла скачка: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (фиг. 1) (углу φ_3 соответствует ударная волна с убыванием энтропии). Условимся, что всякий угол, лежащий в одной полуплоскости с углом χ , носит знак плюс, а в противном случае — минус. Перепишем (1.1) в виде кубического уравнения относительно $a = \text{ctg } \varphi$:

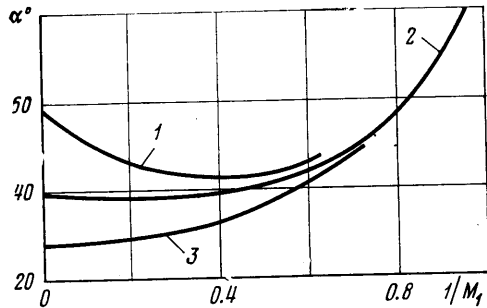
$$2ca^3 + Qa^2 - 2(M^2 - 1)ca + P = 0$$

$$c = \text{ctg } \chi; \quad P = 2 + (\gamma - 1)M^2; \quad Q = 2 + (\gamma + 1)M^2$$

Обозначим корни этого уравнения через a_i ($i=1, 2, 3$), тогда по теореме Виета



Фиг. 1



Фиг. 2

имеем

$$(1.2) \quad J_1 = a_1 + a_2 + a_3 = -\frac{Q}{2c}; \quad J_2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = 1 - M^2,$$

$$J_3 = a_1a_2a_3 = -\frac{P}{2c}$$

Легко доказать, что

$$\text{ctg}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) = \frac{J_3 - J_1}{J_2 - 1} = -\frac{1}{c} = \text{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \chi\right)$$

Отсюда следует, что при косом скачке уплотнения сумма углов скачка равна углу поворота течения плюс $\pi/2$:

$$(1.3) \quad \sum_{i=1}^3 \varphi_i = \frac{\pi}{2} + \chi$$

2. С помощью индекса k обозначим предельные величины в случае, когда регулярное отражение сменяется маховским. Параметры за падающей волной обозначаются с помощью штриха. Применим (1.3) к ударной поляре за падающей волной

$$(2.1) \quad \varphi_i' = \alpha_i' + \chi \quad (i=1, 2), \quad \varphi_3' = -(\alpha - \chi), \quad \alpha_1' + \alpha_2' + 2\chi = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

где α_1', α_2' — углы отражения сильной и слабой отраженных волн. В предельном случае, когда $\alpha_1' = \alpha_2' = \alpha_k'$, получим

$$(2.2) \quad \alpha_k' + \chi_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_k}{2}$$

Формулы (2.1) и (2.2) представляют собой новые связи между геометрическими характеристиками процесса отражения.

Чтобы найти α_k , перепишем (1.2), учитывая (2.2):

$$(2.3) \quad \begin{aligned} M_2^2 - 1 &= a_k(2b_k - a_k) \\ 2 + (\gamma + 1)M_2^2 &= 2c_k(b_k - 2a_k) \\ 2 + (\gamma - 1)M_2^2 &= 2a_k^2 b_k c_k \end{aligned}$$

где M_2 — число Маха за первым скачком, $b_k = -a_3 = \text{ctg}(\alpha_k - \chi_k)$.

Любое из этих уравнений можно использовать в качестве уравнения для α_n . Из общих свойств ударной поляры легко доказать следующие равенства:

$$b = \frac{(\gamma+1)M_{1n}^2}{2+(\gamma-1)M_{1n}^2} \text{ctg } \alpha, \quad M_2^2 = M_{2n}^2(1+b^2)$$

$$M_{1n} = M_1 \sin \alpha, \quad M_{2n} = M_2 \sin(\alpha - \chi), \quad \xi = \frac{p_1}{p_2} = \frac{(\gamma+1)}{2\gamma M_{1n}^2 - (\gamma-1)}$$

Здесь ξ — интенсивность волны. После подстановки этих величин в первое уравнение из (2.3) получим соответствующие уравнения для $x = \sin \alpha_n$, когда фиксировано M_{1n} , ξ или фиксировано само число Маха M_1 :

$$\begin{aligned} F_1(x) &= 4\gamma \left(1 - \frac{1}{M_{1n}^2}\right)^2 x^3 - 4 \left(\gamma + \frac{1}{M_{1n}^2}\right) \left(1 - \frac{1}{M_{1n}^2}\right) x^2 + \\ &+ (\gamma+1) \left[\frac{2(\gamma-1)}{M_{1n}^2} - (3\gamma-1) \right] x + (\gamma+1)^2 = 0 \\ (2.4) \quad F_2(x) &= 4\gamma(1-\xi)^2 x^3 - 4\gamma(1-\xi^2) x^2 - [(3\gamma-1) - \\ &- (\gamma-1)\xi][(\gamma+1) + (\gamma-1)\xi]x + [(\gamma+1) + (\gamma-1)\xi]^2 = 0 \\ F_3(x) &= 4\gamma x^5 - 4\gamma x^4 - \left[(\gamma+1)(3\gamma-1) + \frac{8\gamma}{M_1^2} \right] x^3 + \\ &+ \left[\frac{4(\gamma-1)}{M_1^2} + (\gamma+1)^2 \right] x^2 + 2 \left[\frac{2\gamma}{M_1^4} + \frac{\gamma^2-1}{M_1^2} \right] x + \frac{4}{M_1^4} = 0 \end{aligned}$$

Эти уравнения всегда имеют корень, лежащий в интервале $[0, 1]$, так как функции $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$ в концах этого интервала принимают значения разного знака. При $M_{1n} = \infty$ (т. е. $\xi = 0$) эти уравнения превращаются в уравнение

$$4\gamma x^3 - 4\gamma x^2 - (\gamma+1)(3\gamma-1)x + (\gamma+1)^2 = 0$$

При $\gamma = 1.4$ это уравнение дает $\alpha_n(M_{1n} = \infty; \gamma = 1.4) = 39.9706^\circ$.

Несмотря на то что полученные уравнения значительно упрощаются по сравнению с теми уравнениями, которые получены в [2, 3], их приходится решать на ЭВМ. Численные результаты совпадают с результатами, полученными раньше, и представлены на фиг. 2 (случай $\gamma = 1.05$ — линия 1, $\gamma = 1.4$ — линия 2, $\gamma = 3.0$ — линия 3).

По сравнению с уравнениями, полученными в [2, 3], (2.4) обладают еще одним преимуществом: в них параметры ξ , M_{1n}^{-2} , M_1^{-2} , γ входят со второй степенью. Это дает возможность качественно исследовать зависимость α_n от этих параметров. Легко видеть, что эти квадратичные уравнения имеют корень тогда и только тогда, когда $4x^2 + \gamma - 3 \geq 0$, т. е. всегда имеем

$$\alpha_n \geq \alpha_0 = \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{3} - \gamma}$$

Каждое значение x может отвечать двум значениям каждого из параметров M_{1n} , M_1 , ξ . Однако эти параметры меняются только на интервале $[0, 1]$, поэтому возможны два случая: если α_n достигает минимума α_0 на $[0, 1]$, то кривая зависимости α_n от каждого из данных параметров состоит из двух монотонных ветвей, в противном случае она является монотонной кривой на $[0, 1]$.

3. Формулы (2.1) и (2.2) весьма удобны для исследования процесса отражения. С их помощью можно просто доказать все особенности этого процесса. Например, можно доказать, что $\alpha_0 = \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{3} - \gamma}$ является единственным значением α , при котором углы падения и отражения равны: $\alpha = \alpha' = \alpha_0$. Пусть $\alpha_1' = \alpha = \alpha_0$. Тогда из (2.1) следует, что $\alpha_2' + \chi = \pi/2 - \chi$. После применения двух последних уравнений из (1.2) имеем

$$M_2^2 = \frac{1}{\sin(\alpha_0 - \chi) \sin(\alpha_0 + \chi)}, \quad (\gamma-1)M_2^2 = \frac{2 \cos \alpha_0}{\sin(\alpha_0 - \chi) \sin(\alpha_0 + \chi)}$$

Отсюда видно, что $\alpha_0 = \frac{1}{2} \arcsin \cos(\gamma-1)/2$

В работе [3] было найдено значение ξ_0 , отвечающее точке минимума кривой

$\alpha = \alpha_k(\xi)$:

$$(3.1) \quad \xi_0 = \frac{[(1+\mu_1) + (1-\mu_1)\gamma][(1+\mu_2) - (\mu_2-1)\gamma]}{2[(3\gamma-1) + 2\gamma\sqrt{3-\gamma}]}$$

$$\mu_{1,2} = 1/2(3 \mp \sqrt{33})$$

Этот же результат можно получить более простым способом. Для этого преобразуем второе уравнение из (1.2)

$$b(a_1+a_2) - a_1a_2 = M_{2n}^2(1+b^2) - 1$$

$$a_1 = \text{ctg}(\alpha_1' + \chi); \quad a_2 = \text{ctg}(\alpha_2' + \chi); \quad b = -a_3 = \text{ctg}(\alpha - \chi)$$

отсюда следует

$$(b-a_1)(b-a_2) = (1+b^2)(1-M_{2n}^2)$$

После применения формулы (2.1) получим новую связь

$$(3.2) \quad 2 \cos \alpha_1' \cos \alpha_2' = [\cos(\alpha_1' - \alpha_2') + \sin \alpha](1 - M_{2n}^2)$$

В предельном случае, когда $\alpha_1' = \alpha_2' = \alpha_k'$, отсюда получается

$$(3.3) \quad \cos \alpha_k' = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_k}{2} \right) \sqrt{1 - M_{2n}^2} = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_k}{2} \right) \sqrt{\frac{(\gamma+1)(1-\xi)}{2\gamma}}$$

При $\xi = \xi_0$: $\alpha_k = \alpha_k' = \alpha_0$, поэтому

$$(3.4) \quad \xi_0 = \frac{2\gamma\sqrt{3-\gamma} - 3\gamma + 1}{\gamma + 1}$$

Формула (3.4), очевидно, более простая, чем (3.1). При $\gamma = 1.4$ обе они дают $\xi_0 \approx 0.1424$.

Чтобы равенство $\alpha_k = \alpha_0$ имело место, требуется еще условие $\xi_0 \geq 0$. Легко найти, что $\xi_0 = 0$ при $\gamma = \gamma_k = (7 + \sqrt{33})/8 \approx 1.5931$. На основе (3.4) можно доказать, что при $\gamma \leq \gamma_k$ имеем $\xi_0(\gamma) \geq 0$, т. е. возможен случай $\alpha_k = \alpha_k'$ и кривая $\alpha = \alpha_k(\xi)$ состоит из двух монотонных ветвей. При $\gamma > \gamma_k$ кривая $\alpha_k(\xi)$ не касается прямой $\alpha = \alpha_0$ на интервале $[0, 1]$ и является монотонной возрастающей кривой.

Докажем, что при $1 \leq \gamma \leq \gamma_k$ совпадение углов падения и отражения возможно только при $\xi_0 \leq \xi \leq 1$ [3]. Действительно, пусть $\alpha_1' = \alpha = \alpha_0$, тогда из (2.1) имеем $\chi = \pi/4 - \alpha_2'/2$. С другой стороны, из (1.1) следует, что

$$\text{ctg} \chi = \frac{(\gamma+1) + (\gamma-1)\xi}{(1-\xi)\sin 2\alpha} - \text{tg} \alpha$$

Отсюда видно, что при $\alpha = \alpha_0$ $\text{ctg} \chi$ будет возрастающей функцией от ξ , поэтому при $\xi_0 \leq \xi$ имеем $\chi \leq \chi_0$ или $\alpha_2' \geq \alpha_0 = \alpha_1'$, т. е. реализуется слабая отраженная волна. В противном случае, когда $\xi < \xi_0$, имеем $\alpha_2' < \alpha_0 = \alpha_1'$, что невозможно, так как в действительности реализуется только слабая отраженная волна.

В случае $3 \geq \gamma \geq \gamma_k$ совпадение углов падения и отражения возможно для всех значений ξ .

Автор выражает большую благодарность В. П. Стулову за обсуждение и ценные советы.

Поступила 21 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
2. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
3. Арутюнян Г. М., Карчевский Л. В. Отраженные ударные волны. М., «Машиностроение», 1973.

УДК 533.6.011.8

О ВЛИЯНИИ ПЛОСКОЙ СТЕНКИ НА ДВИЖЕНИЕ АЭРОЗОЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ В НЕОДНОРОДНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

И. Н. ИВЧЕНКО, С. М. МУРАДЯН

(Ереван)

Методом последовательных приближений исследовано влияние плоской поверхности на термофоретическую силу, действующую на аэрозольную частицу радиуса R , находящуюся на расстоянии l от поверхности и движущуюся в нормальном к ней направлении. Задача решена в первом приближении по $R/l \ll 1$.