7. *Политов В. С., Кузнецов Г. Ф.* О гидравлических сопротивлениях цилиндрических камер с закрученным потоком рабочего тела. В сб.: Некоторые вопросы исследования вихревого эффекта и его промышленного применения. Куйбышев, 1974.
8. *Корст Г.* Теория определения донного давления в околозвуковом и сверхзвуковом потоках. Механика. Сб. перев. и обзоров иностр. период. лит-ры, 1957, № 5.
9. *Силантьев Б. А.* Экспериментальное исследование турбулентного обмена на границе зоны отрыва. ПМТФ, 1966, № 5.
10. *Абрамович Г. Н., Макаров И. С., Худенко Б. Г.* Турбулентный след за плохо обтекаемым телом в ограниченном потоке. Изв. вузов, Авиационная техника, 1961, № 1.
11. *Шнеэ Я. И., Гаркуша А. В., Кучеренко С. И.* Об одном способе уменьшения потерь энергии при внезапном расширении потока. Энергетическое машиностроение. Респ. межвед. темат. научно-техн. сб., 1976, вып. 22.

---

УДК 532.592

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА В ДИНАМИКЕ ГРАВИТИРУЮЩЕГО ГАЗА

А. Н. ГОЛУБЯТНИКОВ, А. Л. КАЛАМКАРОВ

*(Москва)*

В рамках ньютоновской механики рассматривается сферически-симметричная задача об адиабатическом движении гравитирующего совершенного газа при наличии ударной волны, возникающей в результате неоднородного гравитационного коллапса или точечного взрыва. Следуя методу [1, 2], строится система интегродифференциальных неравенств, определяющих, в частности, закон движения ударной волны по известному начальному состоянию газа.

В качестве примеров исследованы некоторые автомодельные и предельные к ним решения задачи о гравитационном сжатии пыли с образованием сильной ударной волны, возможно с выделением энергии; автомодельная задача о точечном взрыве в покоящемся газе, а также задача о равновесии газового шара при $\gamma={}^4/_3$ и произвольном распределении энтропии. В этих случаях неравенства сводятся к алгебраическим и решаются численно.

1. В лагранжевых переменных ($t$ – время, $m$ – масса шара радиуса $r(m, t)$) уравнения адиабатического сферически-симметричного движения гравитирующего совершенного газа и условия на разрыве имеют вид

$$\ddot{r}+4\pi r^2 p' + \frac{km}{r^2} = 0, \qquad p=(\gamma-1)f(m)\rho^\gamma, \qquad \rho=\frac{1}{4\pi r^2 r'} \tag{1.1}$$

$$[r]_1{}^2=[\dot{r}\dot{M}-4\pi r^2 p]_1{}^2 = \left[\dot{M}\left(\frac{\dot{r}^2}{2}+\frac{p}{(\gamma-1)\rho}\right)-4\pi r^2 \dot{r} p\right]_1^2 = 0 \tag{1.2}$$

где $p$ – давление, $\rho$ – плотность, $\dot{r}\equiv\partial r/\partial t$, $r'\equiv\partial r/\partial m$, функция $f(m)$ связана с распределением энтропии, $m=M(t)$ – закон движения ударной волны, $k$ – гравитационная постоянная. Индексами 1,2 обозначены соответственно состояния газа перед и за ударной волной.

Для построения неравенств рассмотрим интегральное уравнение энергии и уравнение вириала. В случае расходящейся ударной волны в области за ударной волной

$$\mathrm{E} \equiv T+U-kV=E_0 + \int_0^t \left[\left(\frac{\dot{r}^2}{2}+\frac{p}{(\gamma-1)\rho}-\frac{kM}{R}\right)\dot{M}-4\pi R^2 \dot{r} p\right]_1 d\tau \tag{1.3}$$

$$\Psi\equiv 2T+3(\gamma-1)U-kV = \frac{1}{2}(\dot{I}-R^2\dot{M})^{\boldsymbol{\cdot}}-R(\dot{r}\dot{M}-4\pi R^2 p)_1 \tag{1.4}$$

$$T=\frac{1}{2}\int_0^M \dot{r}^2\, dm, \qquad U=\int_0^M \frac{f(m)\,dm}{(4\pi r^2 r')^{\gamma-1}}$$

(1.5)
$$V=\int_0^M \frac{m\,dm}{r}, \qquad I=\int_0^M r^2\,dm$$

Здесь $T$, $U$, $V$ – кинетическая, внутренняя и потенциальная энергии газа, $I$ – момент инерции, $E_0$ – энергия взрыва, $R=r(M, t)$.

На основании неравенства Гёльдера [3] имеют место простые оценки [1, 2]

(1.6)
$$T\geqslant T_-\equiv\frac{(\dot{I}-R^2M^{\cdot})^2}{8I}, \qquad V\geqslant\left(\frac{3}{5}\right)^{1/2}\frac{M^{5/2}}{I^{1/2}}$$

(1.7)
$$U\geqslant\frac{F(M)}{R^{3(\gamma-1)}}, \qquad F(M)=\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\gamma-1}\left[\int_0^M f^{1/\gamma}(m)\,dm\right]^{\gamma}$$

Учитывая, что удельная энтропия растет со временем на ударных волнах, которые могут двигаться за передней ударной волной, из условий на разрыве (1.2) получим

(1.8)
$$f\geqslant\nu\rho_1^{\gamma-1}\left(D^2-\frac{\gamma-1}{2\gamma}a_1^2\right)\left(1+\frac{2}{\gamma-1}\frac{a_1^2}{D^2}\right)^{\gamma}$$
$$\nu=\frac{2(\gamma-1)^{\gamma-1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}, \qquad a_1^2=\frac{\gamma p_1}{\rho_1}, \qquad D=\dot{R}-\dot{r}_1$$

Использование оценок (1.6) – (1.8) вместе с уравнениями (1.3), (1.4) дает систему интегродифференциальных неравенств, содержащих $M$ и $I$ в случае отсутствия гравитации [1, 2]. Наличие гравитации осложняет задачу из-за отрицательности гравитационной потенциальной энергии – $kV$. Для вывода системы неравенств необходимо оценить величину $V$ сверху. При $\gamma>4/3$ с помощью тройного неравенства Гёльдера [3] и интегрирования по частям получим

(1.9)
$$U\geqslant G(M)V^{4(\gamma-1)}\left(V-\frac{M^2}{2R}\right)^{1-\gamma}$$

$$G=\frac{1}{(8\pi)^{\gamma-1}}\left\{\int_0^M\left[\frac{m^{2(\gamma-1)}}{f(m)}\right]^{1/3\gamma-4}dm\right\}^{4-3\gamma}$$

Неравенство (1.9) в сочетании с уравнением энергии (1.3) дает алгебраическое неравенство, которое приводит к двусторонней оценке величины $V$:

(1.10)
$$M^2/2R<V_-<V<V_+$$

В пределе при $\gamma=4/3$ в оценке (1.9)

(1.11)
$$G=\left[\operatorname*{essmax}_{[0,M]}\frac{(8\pi)^{1/3}m^{2/3}}{f(m)}\right]^{-1}$$

При любом $\gamma>1$ полезно использовать оценку [2, 4]

(1.12)
$$V\leqslant\left\{\int_0^M mF(m)^{1/3(1-\gamma)}\,dm\right\}U^{1/3(\gamma-1)}$$

Сопоставляя интегральные уравнения (1.3) и (1.4) и используя неравенства (1.5) – (1.12), при $4/3<\gamma\leqslant 5/3$ получим

(1.13)
$$\begin{cases}\Psi\geqslant 3(\gamma-1)\mathrm{E}+(5-3\gamma)T_-+(3\gamma-4)kV_-\\ \Psi\leqslant 2\mathrm{E}+(3\gamma-5)U_-+kV_+\end{cases}$$

При $\gamma>5/3$

$$\begin{cases}\Psi\geqslant 2\mathrm{E}+(3\gamma-5)U_-+kV_-\\ \Psi\leqslant 3(\gamma-1)\mathrm{E}+(5-3\gamma)T_-+(3\gamma-4)kV_+\end{cases}$$

Здесь $U_-$ – максимальная из нижних оценок $U$ (1.7), (1.9), (1.12).

При $1<\gamma\leqslant{}^4/_3$ в неравенства (1.13) будет входить лишь верхняя оценка $V_+$, которую можно получить из уравнений (1.3), (1.4) и неравенств (1.11), (1.12) только при подходящих начальных данных. В случае $\gamma={}^5/_3$ оценки $V_-$, $V_+$ явно находятся с помощью решения квадратного уравнения.

2. Неравенство (1.12), в частности, можно использовать для исследования состояния равновесия газового шара массы $M$. Как известно [5], при $\gamma={}^4/_3$ и постоянном $f(m)$ решение существует при единственном значении массы $M$. Простая оценка $M$ сверху дана в [6]. Приведем двустороннюю оценку массы шара при любом $f(m)$. В силу уравнения вириала $E_0=0$ и, следовательно, в силу (1.12)

$$k\int\limits_0^M mF(m)^{1/3(1-\gamma)}\,dm\geqslant 1 \tag{2.1}$$

Из (2.1) следует оценка $M$ снизу. Используя уравнение равновесия, можно получить неравенство (ср. с [6])

$$(kM^2)^{3/4}\leqslant\left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/4}\int\limits_0^M f^{3/4}(m)\,dm \tag{2.2}$$

Если правая часть (2.2) возрастает медленнее левой, имеем оценку $M$ сверху. В частности, при $f(m)=\mathrm{const}$ получим

$$\frac{1}{3}\leqslant\left(\frac{\pi k^3}{2f^3}\right)^{1/2}M\leqslant\sqrt{3} \tag{2.3}$$

Отметим, что при некоторых функциях $f(m)$ система неравенств (2.1), (2.2) может не иметь решений и, следовательно, состояние равновесия невозможно.

3. Применим развитый выше метод интегральных неравенств к анализу ряда инвариантно-групповых разрывных решений.

Рассмотрим тестовую автомодельную задачу о точечном взрыве в покоящемся газе, определяемую размерными постоянными $k$ и величиной размерности энергии $E$. Построенная оценка типа (1.9) нетривиальна только при $\gamma={}^4/_3$. В этом случае уравнения равновесия интегрируются [7] и решение перед ударной волной имеет вид

$$\begin{aligned}&r=\frac{1}{64\pi^2}\frac{k}{E}m^2,\qquad \rho=(8\pi)^5\frac{E^3}{k^3m^5}\\&p=\frac{(8\pi)^7E^4}{3k^3m^6},\qquad f(m)=(8\pi)^{1/3}km^{4/3}\end{aligned} \tag{3.1}$$

Энергия, выделяющаяся при взрыве $E_0=\alpha E$, $\alpha\geqslant0$. В силу автомодельности $R(t)=C(kE)^{1/5}t^{4/5}$, $C$ – безразмерный параметр, который требуется оценить при заданных значениях $\alpha$. В случае $\alpha=1312\,\pi^2/3\approx4312$ за ударной волной реализуется решение со скоростью, пропорциональной радиусу [7, 8] ($v=2r/3t$), и известно точное значение постоянной $C=(200\,\pi)^{2/5}\approx13.16$. При этом система неравенств (1.13) дает следующую оценку безразмерного закона движения ударной волны: $10.42\leqslant C\leqslant 14.85$, т. е. относительная погрешность оценки $\Delta_+\approx12.8\%$, $\Delta_-\approx20.8\%$. Если, например, $\alpha=10^4$, при наличии полости вблизи центра $14.67\leqslant C\leqslant20.14$. При $\alpha=10^3$, что соответствует отсутствию полости, $5.48\leqslant C\leqslant7.95$.

В качестве второй тестовой задачи рассмотрим известное точное автомодельное решение задачи о сильном взрыве в коллапсирующей пыли при $\gamma={}^4/_3$ [4, 9]. Размерные определяющие параметры $k$, $E$. Решение перед ударной волной

$$\begin{aligned}&r=\frac{km^2}{E}\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}(1-\xi)^{2/3},\qquad \xi=\frac{tE^{3/2}}{km^{5/2}}\\&\dot r=-\left(\frac{4km}{3}\right)^{1/3}\left(\frac{km^{5/2}}{E^{3/2}}-t\right)^{-1},\qquad p=0\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$M(t)=E^{3/5}t^{2/5}\xi_1^{-2/5}k^{-2/5}$$

Здесь $\xi_1$ – значение безразмерной переменной $\xi$ на ударной волне, возникающей в результате выделения энергии $E_0=\alpha E$. В случае $\alpha=72.5^{-2/3}$ имеем в области за ударной волной [4, 9]

(3.3) $$r=\left(\frac{225}{2}km\right)^{1/3}t^{2/3},\qquad \dot r=\frac{2}{3}\frac{r}{t},\qquad \rho=\frac{1}{150\pi kt^2}$$

$$p=\frac{2^{4/3}m^{2/3}}{3^{2/3}5^{8/3}\pi k^{1/3}t^{8/3}}$$

Здесь $\xi_1={}^1/_6$, $x=(1-\xi_1)/\xi_1=5$.

Система неравенств (1.13) позволяет получить следующую оценку: $3.74\leqslant x\leqslant 5.065$, при этом относительная погрешность оценки закона движения ударной волны

$$R(t)=\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}(kE)^{1/5}t^{4/5}\frac{(1-\xi_1)^{2/3}}{\xi_1^{4/5}}$$

составляет $\Delta_+\approx0.8\%$; $\Delta_-\approx20.3\%$.

4. Рассмотрим в качестве решения перед ударной волной автомодельное решение, отвечающее параболическому коллапсу пыли и определяемое гравитационной постоянной $k$ и постоянной $A$ с размерностью $[A]=ML^{\omega-3}$. Решение перед ударной волной имеет вид

(4.1) $$r=\left(\frac{m}{A}\right)^{1/(3-\omega)}\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}(1-\xi)^{2/3},\qquad \xi=tk^{1/2}A^{3/2(3-\omega)}m^{-\omega/2(3-\omega)},\qquad p=0$$

При $\gamma>{}^4/_3$ оценка (1.9) нетривиальна только при $\omega<{}^5/_2$. В рассматриваемой автомодельной задаче нельзя образовать константу размерности энергии, поэтому с помощью неравенств можно изучить лишь случай $E_0=0$, когда ударная волна возникает вследствие фокусировки газа без дополнительного выделения энергии. В этом случае

$$M(t)=\xi_1^{-2(3-\omega)/\omega}t^{2(3-\omega)/\omega}k^{(3-\omega)/\omega}A^{3/\omega},\qquad \xi_1<1$$

иначе решение перед ударной волной имеет особенности.

В случае $\gamma={}^5/_3$, $0<\omega<{}^5/_2$ система неравенств (1.13) дает следующую двустороннюю оценку для $x=(1-\xi_1)/\xi_1$

(4.2) $$x\geqslant\frac{\omega(3-\omega)}{3(10-3\omega)}\left[\sqrt{1+\frac{(10-3\omega)}{2(3-\omega)^2}}-1\right]$$

$$\frac{3^{11}(5-2\omega)^2(x+\omega/3)^{16/3}}{2^{15}\cdot5^3(3-\omega)^{10/3}\omega^4x^{4/3}}\leqslant\frac{3-\omega}{5-\omega}+\frac{4(5-\omega)}{10-3\omega}B(x)-\frac{4\omega(3-\omega)}{3(5-\omega)(10-3\omega)x}$$

$$B(x)=\frac{2^5\omega^4(3-\omega)^{5/3}}{3^6(5-2\omega)(5-\omega)^2(x+\omega/3)^{8/3}x^{4/3}}$$

Например, при $\omega=2$, когда из $k$ и $A$ можно составить постоянную с размерностью скорости, из неравенств (4.2) следует $0.122\leqslant x\leqslant0.68$, относительная погрешность оценки закона движения ударной волны $R(t)$ составляет при этом $\Delta_\pm\approx55.5\%$.

В заключение рассмотрим решение, предельное к автомодельным, инвариантное относительно подгруппы основной группы инвариантности системы уравнений (1.1) [4] с оператором

(4.3) $$X=\frac{\partial}{\partial t}+3m\frac{\partial}{\partial m}+r\frac{\partial}{\partial r}+v\frac{\partial}{\partial v}+2p\frac{\partial}{\partial p}$$

Это решение имеет вид

(4.4) $$r=r_0e^\tau R(\mu);\qquad \mu=\frac{me^{-3\tau}}{m_0};\qquad \tau=\frac{t}{t_0}$$

где $t_0$, $r_0$, $m_0$ — характерные параметры размерности времени, длины и массы.

Пусть перед ударной волной имеет место параболический коллапс пыли, тогда без ограничения общности

(4.5) $$R(\mu)=\left(\frac{\varkappa\mu}{2}\right)^{1/3}\ln^{2/3}\mu,\qquad \varkappa=\frac{km_0t_0^2}{r_0^3}$$

Не выходя за рамки инвариантности решения относительно группы с оператором (4.3), можно рассмотреть только случай $E_0=0$. $M(t)=m_0\mu_1e^{3\tau}$, где $\mu_1$ — значение $\mu$ на ударной волне, возникающей в момент времени $t=-\infty$. Решение перед ударной волной регулярно, если $\mu_1>1$. В случае $4/3\leqslant\gamma\leqslant5/3$ из системы неравенств (1.13), в частности, следует

$$(4.6)\qquad x=\frac{1}{3}\ln\mu_1\geqslant\frac{2}{3\gamma+5}\left[\sqrt{1+\frac{(3\gamma+5)(3\gamma-4)}{18}}-1\right]$$

Например, при $\gamma=5/3$ построенные неравенства дают оценку $0.049\leqslant x\leqslant0.35$, что отвечает следующей относительной погрешности оценки закона движения ударной волны $R(t)$: $\Delta_\pm\approx66\%$.

Приведенные примеры инвариантно-групповых решений, исследование которых полезно для изучения асимптотик неавтомодельных задач и выяснения области применимости метода интегральных неравенств, показывает, что выведенные оценки могут обеспечить хорошую точность в определении закона движения ударной волны, во многих практических случаях достаточную для решения задачи.

Поступила 17 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голубятников А. Н.* Об оценках движения ударных волн в одномерных нестационарных задачах газовой динамики. Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 4.
2. *Голубятников А. Н.* Интегральные неравенства в задачах газовой динамики. В сб. Некоторые вопросы механики сплошных сред. М., Изд-во МГУ, 1978.
3. *Харди Г., Литтльвуд Д., Полия Г.* Неравенства. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
4. *Голубятников А. Н.* О сферически-симметричном движении гравитирующего газа при наличии сильной ударной волны. Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 5.
5. *Чандрасекар.* Введение в учение о строении звезд. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
6. *Хокинг С., Эллис Дж.* Крупномасштабная структура пространства – времени. М., «Мир», 1977.
7. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1972.
8. *Станюкович К. П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М., «Наука», 1971.
9. *Каламкаров А. Л.* О сильном взрыве в коллапсирующем газе. Докл. АН СССР, 1978, т. 242, № 6.

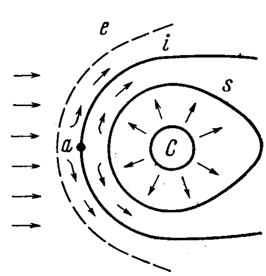
УДК 533.6.011.5

# О ДВИЖЕНИИ СВЕРХЗВУКОВОГО ИСТОЧНИКА

**С. Ф. ЧЕКМАРЕВ**

*(Новосибирск)*

Будем рассматривать движение тела, с поверхности которого истекает со сверхзвуковой скоростью газ. Поток газа может иметь различную природу. Он может создаваться, например, с помощью непрерывно расположенных по поверхности тела газодинамических источников [1] или с помощью испарения тела [2]. Естественным примером тела, создающим сверхзвуковой поток (солнечный ветер), является Солнце. Вследствие истечения газа с поверхности вокруг тела существует собственная газодинамическая атмосфера, в которой (и вместе с которой) тело и движется. Ниже будем называть такое тело сверхзвуковым источником.




Рассмотрим простейший случай, когда тело имеет форму сферы и поток газа с поверхности сферически симметричен. Пусть такой сверхзвуковой источник движется в затопленном пространстве. В системе координат, связанной с телом, схема течения имеет вид, показанный на фигуре. Здесь $C$ – тело, $i$ – контактная поверхность, разделяющая внешний поток и собственную атмосферу, $s$ – ударная волна в собственной атмосфере (в ограниченной ею области газ движется от тела со сверхзвуковой скоростью), $l$ – ударная волна во внешнем потоке (она реализуется при сверхзвуковой скорости движения тела). Газодинамическая структура такого течения подробно исследовалась в [3–5] для случая обтекания Солнца межзвездным ветром (в этих работах: $C$ – Солнце, собственная атмосфера – солнечный ветер, внешний поток – межзвездный ветер).

Минимальное расстояние от тела до ударной волны $s$ реализуется в направлении на «лобовую точку» поверхности $i$ – точку $a$ на фигуре. Пусть $r_1$ – минимальный