

УДК 532.546

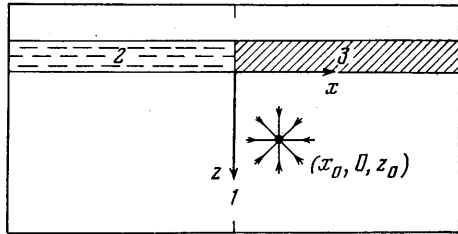
ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ ОТКАЧКЕ ИЗ НЕСОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЫ В БЛИЗИ ВОДОЕМА

А. Б. САЗОНОВ

(Москва)

Рассматривается трехмерная стационарная задача о притоке грунтовых вод к скважине типа точечного стока в полуограниченном по мощности пласте грунта. Пласт граничит с дном водоёма и пластом непроницаемого грунта. Задача исследуется в рамках потенциальной теории фильтрации, основанной на законе Дарси [1, 2], получено решение в виде квадратур.

1. Постановка задачи. Рассмотрим установившееся течение грунтовых вод к точечному стоку интенсивности Q , расположенному (см. фигуру) в точке с координатами $(x_0, 0, z_0)$, в полуограниченном по мощности пласте однородного изотропного грунта. На фигуре ось y перпендикулярна плоскости чертежа, 1 – область фильтрации, 2 – водоем, 3 – пласт непроницаемого грунта. Область фильтрации $z > 0$, где ищется решение, граничит по плоскости $z=0$ с дном водоёма при $x < 0$ и с пластом непроницаемого грунта при $x > 0$. Уравнение для пьезометрического напора при стационарном режиме фильтрации, соответствующее потенциальной теории ламинарного течения жидкости в пористых средах, основанной на законе Дарси, есть



$$(1.1) \quad \nabla^2 H(x, y, z) = 0$$

где $H = p/\gamma - z$ – пьезометрический напор, p – давление, γ – объемный вес воды. Уравнение (1.1) справедливо во всей области $z > 0$, кроме точки $(x_0, 0, z_0)$, где расположен сток, интенсивность которого выражается через пьезометрический напор формулой

$$(1.2) \quad Q = \lim_{r \rightarrow 0} \left(4\pi K r^2 \frac{\partial H}{\partial r} \right), \quad r^2 = (x - x_0)^2 + y^2 + (z - z_0)^2$$

Здесь K – коэффициент фильтрации. Граничные условия на дне водоёма (давление равно гидростатическому), на непроницаемой границе и на бесконечности имеют соответственно вид

$$(1.3) \quad H(-\infty < x < 0, y, 0) = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x} (0 < x < +\infty, y, 0) = 0, \quad [H(x, y, z)]_{\infty} = 0$$

Введём безразмерные переменные: $H' = H/z_0$, $x' = x/z_0$, $y' = y/z_0$, $z' = z/z_0$, $x_0' = x_0/z_0$, $z_0' = 1$, $Q' = Q/Kz_0^2$. Далее штрихи опущены. В безразмерных переменных уравнения (1.1), (1.3) записываются в том же виде, уравнение (1.2) принимает вид

$$(1.4) \quad Q = \lim_{r \rightarrow 0} \left(4\pi r^2 \frac{\partial H}{\partial r} \right), \quad r^2 = (x - x_0)^2 + y^2 + (z - 1)^2$$

2. Решение. Чтобы исключить особенность в точке расположения стока, представим H в виде

$$(2.1) \quad H = \Phi + H_1, \quad H_1 = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

$$r_1^2 = (x - x_0)^2 + y^2 + (z - 1)^2, \quad r_2^2 = (x - x_0)^2 + y^2 + (z + 1)^2$$

Здесь $H_1(x, y, z)$ представляет собой функцию распределения пьезометрического напора в области $z \geq 0$ в случае, когда вся плоскость $z=0$ является непроницаемой границей. Используя уравнения (1.1), (1.3), (1.4) и применяя преобразование Фурье по переменной y , получим систему уравнений

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - h^2 \Phi = 0$$

$$(2.3) \quad \Phi(-\infty < x < 0, 0) = f(x), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}(0 < x < +\infty, 0) = 0, \quad [\Phi(x, z)]_{\infty} = 0$$

$$(2.4) \quad \Phi(x, h, z) = F_y[\varphi(x, y, z)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y, z) e^{-ihy} dy$$

$$f(x) = F_y[\psi(x, y)] = (Q/\pi\sqrt{2\pi}) K_0(|h|\sqrt{(x-x_0)^2+1})$$

$$\psi(x, y) = Q/2\pi r, \quad r^2 = (x-x_0)^2 + y^2 + 1$$

Здесь F_y – оператор преобразования Фурье по переменной y , K_0 – функция Макдональда нулевого порядка. Краевая задача (2.2), (2.3) применением преобразования Фурье сводится к задаче факторизации функциональных уравнений типа Винера – Хопфа, которая может быть решена во всей области $z \geq 0$ и решение представляется в виде интегралов по комплексным переменным [3]. Чтобы представить решение в более простом виде, определим $\varphi(x, y, 0)$ при $x > 0$ и сведём краевую задачу к задаче Дирихле для полупространства. Согласно [3], решение уравнения (2.2) с граничными условиями (2.3) при $z=0, x > 0$ можно записать в виде

$$(2.5) \quad \Phi(x, 0) = \frac{e^{-|h|x}}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{dG}{\sqrt{x-u}}, \quad G = \int_{-\infty}^u \frac{e^{|\eta|} f(\eta) d\eta}{\sqrt{u-\eta}}$$

В силу (2.4) $f(\eta) \leq (Q/\pi\sqrt{2\pi}) K_0(|h|)$, поэтому

$$(2.6) \quad \lim_{u \rightarrow -\infty} G(u) = 0$$

Интегрируя выражение, стоящее в правой части (2.5), и учитывая (2.6), получим после преобразований и замены $t = -\eta$

$$\Phi(x, 0) = \frac{\sqrt{x}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-|h|(x+t)} f(-t) dt}{\sqrt{t(x+t)}}$$

Представим это выражение в виде

$$\Phi(x, 0) = \frac{\sqrt{x}}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{F_y[1/\{y^2 + (x+t)^2\}] F_y[\psi(-t, y)] dt}{\sqrt{t}}$$

Применяя обратное преобразование Фурье F_y^{-1} и пользуясь свойствами операции свёртки [4], получим после преобразований

$$(2.7) \quad \varphi(x, y, 0) = \frac{\sqrt{x}}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{I(t) dt}{\sqrt{t}}, \quad I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(-t, \xi) d\xi}{(y+\xi)^2 + (x+t)^2}$$

$y \neq 0$:

$$I(t) = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{2\sqrt{2}|y|}{k\sqrt{k-c}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}|y|}{\sqrt{k-c}} - \frac{\sqrt{2}|y|}{k\sqrt{k+c}} \ln \frac{\sqrt{k+c-\sqrt{2}|y|}}{\sqrt{k+c+\sqrt{2}|y|}} \right)$$

$$k = (At^2 + Bt + C)^{1/2}, \quad c = at + b, \quad a = 2(x_0 - x)$$

$$b = x_0^2 + 1 - x^2 + y^2, \quad A = 4(x_0 - x)^2 + 4y^2$$

$$B = 4(x_0 - x)(x_0^2 + 1 - x^2 - y^2) + 8y^2 x_0$$

$$C = (x_0^2 + 1 - x^2 - y^2)^2 + 4y^2(x_0^2 + 1)$$

$y = 0$:

$$I(t) = \frac{Q}{4\pi(t+x)\sqrt{-d}} \ln \frac{t+x+\sqrt{-d}}{t+x-\sqrt{-d}} \quad (d < 0)$$

Таблица 1

		$x_0=0$											
x	$H \cdot 10^2$	0	0.05	0.1	0.25	0.4	0.5	0.6	0.75	0.9	1.0	2.0	5.0
		0	3.10	4.22	5.91	6.52	6.61	6.55	6.28	5.91	5.63	3.31	1.10

		$x_0=1$											
x	$H \cdot 10^2$	0	0.1	0.25	0.5	0.75	1.0	1.1	1.25	1.5	1.75	2.0	5.0
		0	3.59	5.84	8.58	10.6	11.6	11.7	11.5	10.7	9.44	8.20	2.14

Таблица 2

z	$x=-1$	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0
0.25	1.59	2.16	2.92	3.88	5.00	6.26	7.31	7.52	7.12	6.47	5.79	3.32
0.5	3.06	4.22	5.90	8.20	10.8	12.5	12.0	10.4	8.63	7.25	6.18	3.33
2.0	3.70	4.31	4.95	5.57	6.05	6.28	6.22	5.89	5.42	4.91	4.41	2.70
3.0	2.14	2.29	2.43	2.55	2.64	2.70	2.72	2.71	2.66	2.59	2.50	1.97
5.0	0.99	1.02	1.05	1.07	1.09	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.12	1.06

Таблица 3

z	$x=0$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	5.0
0.25	3.81	5.97	8.22	10.3	11.9	12.7	12.6	11.8	10.6	9.44	8.33	4.74
0.5	5.30	7.31	9.80	12.7	15.6	17.1	16.3	14.0	11.8	10.0	8.60	4.74
2.0	4.82	5.52	6.25	6.93	7.46	7.72	7.66	7.33	6.83	6.28	5.74	3.76
3.0	2.90	3.09	3.27	3.41	3.53	3.60	3.63	3.62	3.58	3.50	3.40	2.77
5.0	1.42	1.46	1.50	1.53	1.56	1.58	1.60	1.61	1.62	1.62	1.62	1.54

$$I(t) = Q[2\pi(t+x)\sqrt{d}]^{-1} \operatorname{arctg} [\sqrt{d}(t+x)^{-1}] \quad (d > 0)$$

$$I(t) = Q(2\pi)^{-1}(t+x)^{-3} \quad (d=0) \quad d = (t-x_0)^2 - (t+x)^2 + 1$$

Решение в точке с координатами (x_1, y_1, z_1) области $z > 0$ определяется из формулы для решения задачи Дирихле для полупространства [5]

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{2\pi} \iint_{z=0} \varphi(s) \frac{\partial(1/r)}{\partial z} ds$$

где $\varphi(s)$ — функция $\varphi(x, y, 0)$, определенная при $x > 0$ формулой (2.7), при $x < 0$ $\varphi(x, y, 0) = \psi(x, y)$, $r^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2$.

Результаты численного счета пьезометрического напора по полученным формулам показывают, что в случае расположения пьезометрических датчиков вблизи непроницаемой границы влияние водосема следует учитывать при $x_0 \approx 3$ (табл. 1). В силу пропорциональности решения величине Q при счете полагалось $Q = -1$. В табл. 1 приведены результаты численного счета для $H \cdot 10^2$ при $y=0$, $z=0$, в табл. 2, 3 при $y=0$, $x_0=0$ и при $y=0$, $x_0=1$ соответственно. Из их рассмотрения следует, что при использовании полученного решения в расчетах наиболее удобно располагать датчики ниже стока на глубине порядка 2÷5, если значения ширины реки и непроницаемого пласта в реальных условиях достаточно велики. В этом случае погрешности измерений и неточности, связанные с идеализацией профилей дна водоема и непроницаемого пласта будут сказываться меньше, чем при расположении датчиков вблизи границы.

В заключение автор выражает благодарность В. Б. Баранову и В. М. Шестакову за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

Поступила 14 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехиздат, 1952.
2. Шейдеггер А. Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. М., Гостехиздат, 1960.

3. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
 4. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1976.
 5. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.

УДК 532.556.2:621.125

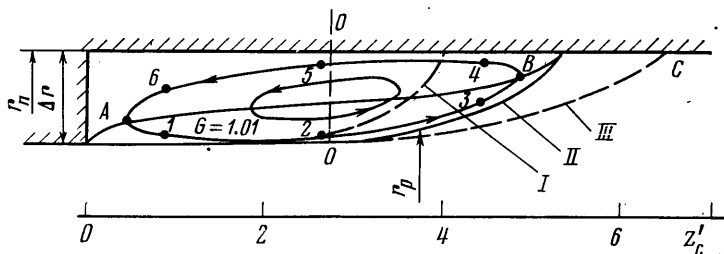
ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА В КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ С ВНЕЗАПНЫМ РАСШИРЕНИЕМ

А. В. ГАРКУША, С. И. КУЧЕРЕНКО

(Харьков)

При течении потока в каналах с резким изменением проходной площади наряду с основным потоком, движущимся в продольном направлении, за уступом существует зона, в которой жидкость совершает циркуляционное движение. На границе соприкосновения этих областей образуется свободный турбулентный пограничный слой (слой смешения), характеризующийся резким изменением скорости.

В экспериментальных исследованиях осевых потоков [1-4] были определены структуры потока в канале, длина циркуляционной зоны, вид разделительной линии тока, отделяющей основной поток от области циркуляционного движения, и т. д.



Фиг. 1

Между тем в некоторых отраслях техники необходимо рассчитывать закрученные потоки, обтекающие уступ. Причем данных по таким течениям крайне мало [5-9].

Исследования газодинамических характеристик течения при внезапном расширении закрученного потока проведены на экспериментальной установке, которая состояла из тангенциального завихрителя, позволяющего получить углы закрутки α_0 на входе в кольцевой канал от 90° до 30° , входного и рабочего участков. Угол закрутки отсчитывался от тангенциального направления, а его минимальное значение определялось отсутствием отрыва потока от внутренней цилиндрической поверхности. Рабочий участок имел постоянный наружный и внутренний диаметры ($r_n/r_b=2.25$), а степень расширения канала варьировалась путем изменения наружного диаметра входного участка r_s (фиг. 1). Степень расширения в опытах принимала значения: $n=F_2/F_1=1.16, 1.37$ и 1.67 , а величина $\Delta r/(r_n-r_b)$ соответственно $0.106, 0.212$ и 0.318 , где F_2 и F_1 — кольцевые площади соответственно рабочего и входного участков. Кроме того, исследовалось внезапное расширение в канале при $n=1.44$ и $\alpha_0=17^\circ$.

Основной метод исследования — траверсирование потока пневмометрическими зондами. Траверсирование производилось отдельными трубками с целью получения точечных значений параметров потока, что особенно важно в области смешения, характеризующейся значительным градиентом измеряемых величин. Большая часть опытов проведена при значении безразмерной скорости на входе $\lambda_0=0.4$.

Основные особенности течения закрученных потоков показаны на примере канала со степенью расширения $n=1.37$, для которого на фиг. 1 нанесены линии тока относительного расхода $G'=1.0$, разделяющие циркуляционную зону и основной поток, при углах закрутки на входе $\alpha_0=32, 45$ и 90° , показанные кривыми I, II и III соответственно. Как видно из фиг. 1 увеличение закрутки на входе приводит к уменьшению области обратных токов, причем наиболее интенсивно при значениях