зультаты, таким образом, в значительной мере подтверждают выводы [2] о том, что гармонические колебания потока увеличивают начальную амплитуду волн вблизи передней кромки пластины, а затем волны развиваются независимо от наложенных осцилляций.

Авторы благодарят А. Г. Володина за помощь в расчетах.

Поступила 16 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левченко В. Я., Соловьев А. С.* Устойчивость осциллирующего пограничного слоя. Изв. СО АН СССР, Сер. техн. н., 1975, вып. 3, № 13.
2. *Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я.* Генерация и развитие возмущений малой амплитуды в ламинарном пограничном слое при наличии акустического поля. Изв. СО АН СССР, Сер. техн. н., 1975, вып. 3, № 13.
3. *Bacon J., Pfenninger W., Moore C.* Investigations of a 30° swept and a 17-foot chord straight suction wing in the presence of internal sound external sound and mechanical vibrations. Summary of Laminar Boundary Layer control Research (ASD TDR–63–554), 1964, vol. 1.
4. *Knapp C. F., Roache P. J.* A combined visual and hot-wire anemometer investigation of Boundary layer transition. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 1.
5. *Власов Е. В., Гиневский А. С.* Влияние акустических возмущений на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный. Уч. зап. ЦАГИ, 1971, т. 2, № 2.
6. *Власов Е. В., Гиневский А. С., Каравосов Р. К.* Реакция неустойчивого ламинарного пограничного слоя на акустические возмущения. В сб. Турбулентные течения. М., «Наука», 1977.
7. *Поляков Н. Ф.* Индуцирование гидродинамических волн в ламинарном пограничном слое продольным звуковым полем. Симпоз. по физике акустико-гидродинамических явлений. Сухуми, 1975, М., «Наука», 1975.
8. *Ackerberg R. C., Phillips J. H.* The unsteady laminar boundary layer on a semi-infinite flat plate due to small Fluctuations in the magnitude of the free-stream velocity. J. Fluid Mech., 1972, vol. 51, pt. 1.
9. *Stewartson K., Stuart J. T.* A non-linear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow. J. Fluid Mech., 1971, vol. 48, pt 3.
10. *Рабинович М. И.* О методе усреднения в нелинейной оптике. В сб. Нелинейные процессы в оптике. Новосибирск, «Наука», 1970.
11. *Зельман М. Б.* О нелинейном развитии возмущений в плоскопараллельных потоках. Изв. СО АН СССР, Сер. техн. н., 1974, вып. 3, № 13.
12. *Годунов С. К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Усп. матем. н., 1961, т. 16, вып. 3.

УДК 532.546

ОБ УРАВНЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

А. В. КОСТЕРИН

(Казань)

Предложен общий закон нелинейной анизотропной фильтрации. В переменных годографа скорости получено соответствующее уравнение для давления жидкости. Условия эллиптичности этого уравнения выражены через диссипативную функцию.

1. Рассмотрим изотермическую установившуюся фильтрацию вязкой несжимаемой жидкости через недеформируемый пористый скелет. Энергию Φ, рассеиваемую за единицу времени в единице объема пористой среды в целом, можно записать в виде

$$\Phi = p_i q_i, \quad p_i = -\partial p/\partial x_i \tag{1.1}$$

где p – давление в жидкости, x_i – декартовы координаты, q_i – компоненты скорости фильтрации. По повторяющемуся индексу проводится суммирование.

Билинейная форма (1.1) с точностью до постоянного множителя, равного абсолютной температуре, совпадает с производством энтропии. При этом q_i, p_i являются термодинамическими силами и потоками соответственно. Из теории Циглера [1,2] следует закон фильтрации в виде

$$p_i = f\frac{\partial\Phi}{\partial q_i},\qquad f=\Phi\left(q_i\frac{\partial\Phi}{\partial q_i}\right)^{-1} \tag{1.2}$$

Это равенство имеет простой геометрический смысл: вектор p_i в пространстве скоростей ортогонален поверхности уровня диссипативной функции. Рассмотрим некоторые частные случаи. Изотропная фильтрация. При этом $\Phi=\Phi(q)$, $q^2=q_iq_i$, и соотношение (1.2) сводится к уравнению [3]

$$p_i=\Phi q_i/q^2 \tag{1.3}$$

Двумерная фильтрация, диссипативная функция квазиоднородна по Циглеру. При этом [1, 4]

$$u\frac{\partial\Phi}{\partial u}+v\frac{\partial\Phi}{\partial v}=F(\Phi),\qquad \Phi=\Phi(\xi),\qquad \xi=\sqrt{u^2+v^2}\,z\left(\frac{v}{u}\right)$$

Здесь $u=q_1$, $v=q_2$, $z(v/u)$ – произвольная функция. Если $z=(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)^{1/2}$, $\theta=\operatorname{arctg}(v/u)$, то $\xi^2=a^2u^2+b^2v^2$ и закон фильтрации (1.2) сводится к следующему:

$$p_1=a^2\Phi u/\xi^2,\qquad p_2=b^2\Phi v/\xi^2 \tag{1.4}$$

Случай $\Phi=\xi^2$ соответствует линейной анизотропной фильтрации. Замена переменных $x_1'=ax_1$, $x_2'=bx_2$, $u'=au$, $v'=bv$ приводит уравнения (1.4) к виду (1.3). Этот результат другим способом получен в [5].

Рассмотрим уравнение фильтрации вида [6]

$$p_i=c_{ij}(q_\alpha)q_j,\qquad \Phi=c_{ij}q_iq_j \tag{1.5}$$

В силу (1.2)

$$p_i=\lambda_{ij}q_j,\qquad \lambda_{ij}=\frac{\Phi(q_\alpha\partial c_{\alpha j}/\partial q_i+2c_{ij})}{2\Phi+(q_i\partial c_{\alpha\beta}/\partial q_i)q_\alpha q_\beta}$$

Естественно потребовать, чтобы $c_{ij}=\lambda_{ij}$. В общем случае это накладывает ограничения на вид функций $c_{ij}(q_\alpha)$. Рассмотрим два примера таких ограничений.

Частным случаем уравнений (1.5) является [6]

$$p_1=\frac{\lambda(v/u)q+\mu(q)}{q^2}u,\qquad p_2=\frac{\lambda(v/u)q+\mu(q)}{q^2}v \tag{1.6}$$

При этом соответствующая диссипативная функция равна $\Phi=\lambda q+\mu$ и уравнения (1.2) сводятся к следующим:

$$p_1=\frac{\mu+\lambda q}{q^2}u-\frac{q\lambda'}{u^2}\frac{\mu+\lambda q}{(\mu'+\lambda)q}v \tag{1.7}$$

$$p_2=\frac{\mu+\lambda q}{q^2}v+\frac{q\lambda'}{u^2}\frac{\mu+\lambda q}{(\mu'+\lambda)q}u$$

Равенства (1.6) и (1.7) совпадают лишь при $\lambda=\mathrm{const}$, т. е. в изотропном случае.

Рассмотрим закон фильтрации вида

$$p_1=c_{11}\left(\frac{v}{u}\right)u+c_{12}\left(\frac{v}{u}\right)v,\qquad p_2=c_{12}\left(\frac{v}{u}\right)u+c_{22}\left(\frac{v}{u}\right)v$$

Равенство $c_{ij}=\lambda_{ij}$ приводит к следующему дифференциальному соотношению:

$$c_{11}'+2\frac{v}{u}c_{12}'+\left(\frac{v}{u}\right)^2c_{22}'=0.$$

2. В двумерном случае аналогично [3] можно получить соответствующее (1.2) линейное уравнение для давления в переменных годографа скорости. Для этого достаточно выразить dx_i через dp и $d\psi$ (ψ – функция тока). Тогда условия полного дифференциала форм dx_i имеют вид

$$-\frac{\partial\beta}{\partial q_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}+\frac{\partial\beta}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}=-\frac{\partial a}{\partial q_1}\frac{\partial p}{\partial q_2}+\frac{\partial a}{\partial q_2}\frac{\partial p}{\partial q_1} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial q_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}-\frac{\partial\alpha}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}=-\frac{\partial b}{\partial q_1}\frac{\partial p}{\partial q_2}+\frac{\partial b}{\partial q_2}\frac{\partial p}{\partial q_1}$$

$$\alpha=f\frac{\partial\ln\Phi}{\partial q_1},\qquad \beta=f\frac{\partial\ln\Phi}{\partial q_2},\qquad a=\frac{q_1}{\Phi},\qquad b=\frac{q_2}{\Phi}$$

Исключая из (2.1) функцию тока ψ, получим линейное уравнение для давления

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(s_{ij}\frac{\partial p}{\partial q_j}\right)=0 \tag{2.2}$$

$$s_{ij}=(-1)^{i+j}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial q_l}\frac{\partial a}{\partial q_m}+\frac{\partial\beta}{\partial q_l}\frac{\partial b}{\partial q_m}\right)\left(-\frac{\partial\alpha}{\partial q_1}\frac{\partial\beta}{\partial q_2}+\frac{\partial\alpha}{\partial q_2}\frac{\partial\beta}{\partial q_1}\right)^{-1}$$

Здесь $l(1)=m(1)=2$, $l(2)=m(2)=1$.

Непосредственные вычисления показывают, что условие симметрии матрицы $\|s_{ij}\|$ эквивалентно равенству

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_2}=\frac{\partial p_2}{\partial q_1} \tag{2.3}$$

которое является естественным обобщением на нелинейный случай соответствующего условия Онсагера [7]. Если диссипативная функция Φ квазиоднородна по Циглеру [1], то равенство (2.3) выполняется тождественно.

Далее, согласно критерию Сильвестра, уравнение (2.2) будет эллиптическим, если при $q\neq0$ одновременно выполняются неравенства $s_{11}>0$, $s_{11}s_{22}-s_{12}^2>0$. Они равносильны следующим:

$$(-1)^{i+j}\frac{\partial p_2}{\partial q_2}\left(q_i\frac{\partial\Phi}{\partial q_i}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_i\partial q_j}\frac{\partial\Phi}{\partial q_i}\frac{\partial\Phi}{\partial q_j}\right)^{-1}>0$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_1}\frac{\partial p_2}{\partial q_2}-\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_1}\right)^2>0$$

Последнее неравенство является одним из условий положительной определенности квадратичной формы

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_j}dq_i\,dq_j=dp_i\,dq_i$$

В силу (1.2)

$$dp_i\,dq_i=df\,d\Phi+f\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_i\partial q_j}dq_i\,dq_j$$

поэтому достаточными условиями эллиптичности уравнения (2.2) будут следующие:

поверхность $\Phi(q_i)$ выпукла (матрица $\|\partial^2\Phi/\partial q_i dq_j\|$ порождает положительно определенную квадратичную форму);

$$q_i\partial\Phi/\partial q_i>0,\qquad df\,d\Phi\geqslant0$$

Последнее условие выполняется, например, при $df=0$. Тогда $\Phi=c\xi^\varkappa$, причем $\varkappa>1$, поскольку должно еще выполняться условие устойчивости Циглера [1] $f<1$.

Автор благодарит В. М. Ентова за обсуждение работы.

Поступила 5 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Циглер Г.* Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. М., «Мир», 1966.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М., «Наука», 1973.
3. *Христианович С. А.* Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси. ПММ, 1940, т. 4, вып. 1.
4. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1959.
5. *Молокович Ю. М.* К вопросу нелинейной фильтрации в анизотропных (ортотропных) по проницаемости средах. В сб.: Гидродинамика и разработка нефтяных месторождений. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1977, 124—128.
6. *Шешуков Е. Г.* О нелинейной фильтрации в анизотропной среде. В сб.: Гидродинамика и разработка нефтяных месторождений. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1977, 183—194.
7. *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1974.