

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ОСЦИЛЛИРУЮЩЕМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В. Я. ЛЕВЧЕНКО, А. С. СОЛОВЬЕВ

(Новосибирск)

Теоретически исследуется взаимодействие волновых возмущений малой конечной амплитуды в пограничном слое в случае, когда распределение скорости содержит периодическую составляющую, осциллирующую во времени по гармоническому закону. Обнаружена принципиальная возможность четырехволнового синхронного (резонансного) взаимодействия на кубической нелинейности, получены уравнения для амплитуд. Конкретные расчеты, проведенные с целью проверки эффективности резонансных явлений, показали, что коэффициенты связи не настолько велики, чтобы наложенные осцилляции могли заметно изменить характер взаимодействия волн.

В [1] в приближении линейной теории исследовалась устойчивость осциллирующего во времени течения несжимаемой жидкости в пограничном слое на плоской пластине. Расчеты показали, что наложение осцилляций малых амплитуд (менее 5%) практически не оказывает влияния на устойчивость. Выводы [1] были подтверждены измерениями [2].

В то же время эксперименты по переходу к турбулентности в осциллирующих пограничных слоях [3-7] указывают на то, что в некотором диапазоне амплитуд и частот осцилляций происходит более ранний переход к турбулентности и, следовательно, пограничный слой менее устойчив. Авторы [2] объясняют явление дестабилизации наличием дополнительных возмущений, генерируемых сильной пространственной неоднородностью (острая передняя кромка пластины). В некоторых экспериментах [5-7] указываются другие возможные причины дестабилизации, в частности, высказываются гипотезы о наличии нелинейных резонансных механизмов взаимодействия между волновыми возмущениями. Учитывая неоднозначность толкования экспериментальных фактов и отсутствие основополагающих теоретических разработок, в данной работе проведен анализ проблемы с общей точки зрения нелинейной теории волн. Полученные результаты свидетельствуют в пользу выводов [2] о том, что осцилляции лишь увеличивают начальную амплитуду волн, вызывающих соответственно более ранний переход к турбулентности.

1. Поведение малых двумерных возмущений в плоском потоке вязкой несжимаемой жидкости описывается вихревым уравнением с граничными условиями для

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \psi') + \frac{\partial (\Delta \psi_0, \psi')}{\partial (x, y)} + \frac{\partial (\Delta \psi', \psi_0)}{\partial (x, y)} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta \psi' = -\varepsilon \frac{\partial (\Delta \psi', \psi')}{\partial (x, y)}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$(1.2) \quad \psi' = \partial \psi' / \partial y = 0, \quad y = 0; \quad \psi', \partial \psi' / \partial y < \infty, \quad y \rightarrow \infty$$

Здесь $\psi_0(y)$ — среднее течение, $\psi'(x, y, t)$ — возмущение, Re — число Рейнольдса.

Рассмотрим слабо нелинейное ($\varepsilon \ll 1$) взаимодействие квазигармонических волн, имеющих спектральную ширину $\Delta \omega / \omega \sim \Delta \alpha / \alpha \sim \varepsilon^2$, в продольном поле волны, осциллирующей по гармоническому закону $B_0 \psi_0(y) e^{i(\alpha x - \omega_0 t)}$. Поле будем считать заданным, т. е. рассматривать его как возмущение с частотой ω_0 , волновым вектором $\alpha_0 = 0$ и амплитудой $B_0 \sim \varepsilon$, не меняющимися в процессе взаимодействия. Явный вид $\psi_0(y)$, как и в [1], выберем в соответствии с результатами работы [8].

Следует ожидать, что взаимодействие будет наиболее сильным, если собственные частоты ω_j и волновые векторы $\alpha_j(\omega_j)$ волн связаны резонансными соотношениями, обычно называемыми условиями фазового синхронизма. Закон дисперсии $\alpha_j(\omega) + i\gamma_j(\omega)$ (γ_j — коэффициент пространственного нарастания линейной (1.1), (1.2) для волн Толлмина — Шлихтинга в пограничном слое таков, что условия синхронизма могут быть выполнены для четырех волн (в этом, а также в невозможности, скажем, трехволнового синхронного взаимодействия можно убедиться, рассматривая результаты расчета спектра линейной задачи):

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 + \omega_0, \quad \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + 0 + \Delta^{(0)}$$

Здесь $\Delta^{(0)}$ — линейная расстройка.

Ниже исследуется для простоты случай вырожденного взаимодействия, когда $\omega_3 = \omega_2$, $\alpha_3 = \alpha_2$, т. е.

$$(1.3) \quad \omega_1 = 2\omega_2 + \omega_0, \quad \alpha_1 = 2\alpha_2 + \Delta^{(0)}$$

На основе указанных выше допущений решение задачи (1.1)–(1.2) может быть получено методом усреднения [9–11]. С точностью до членов ε^3 оно имеет вид

$$(1.4) \quad \psi'(x, y, t) = B_0 \varphi_0(y) e^{-i\omega_0 t} + \sum_{j=1}^2 B_j(\chi, \tau) \varphi_j(y) e^{i[\alpha_j(\omega_j)x - \omega_j t]} + \\ + \psi^* + \varepsilon w^{(1)}(x, y, t, \chi, \tau) + \varepsilon^2 w^{(2)}(x, y, t, \chi, \tau) + \dots$$

$$(1.5) \quad \frac{\partial B_j}{\partial t} = -\gamma_j B_j + \sum_{h=1}^2 \varepsilon^h \hat{F}_{nj}, \quad \chi = \varepsilon x, \quad \tau = \varepsilon t \quad (j=1, 2)$$

где ψ^* – комплексно-сопряженное выражение, $\varphi_j(y)$ – собственные функции уравнения Орра – Зоммерфельда, B_j – комплексные амплитуды, а функции $w^{(j)}$, операторы \hat{F}_{nj} определяются в процессе решения задачи.

Подставляя (1.4), (1.5) в (1.1), (1.2) с учетом (1.3), проводя усреднение и приравнивая члены при равных степенях ε , получаем уравнения для B_j (подробное изложение этой процедуры приведено, например, в [11]):

$$(1.6) \quad \frac{\partial B_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial B_1}{\partial x} = -\gamma_1 B_1 + \sum_{l=0}^2 s_{l1} |B_l|^2 B_1 + s_{20} B_2^2 B_0 \exp(-i\Delta^{(0)}x) \\ \frac{\partial B_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial B_2}{\partial x} = -\gamma_2 B_2 + \sum_{l=0}^2 s_{l2} |B_l|^2 B_2 + s_{10} B_1 B_2^* B_0^* \exp(i\Delta^{(0)}x) \\ v_j = \frac{d\omega_j}{d\alpha}; \quad s_{ln} = \frac{\langle \varphi_j^+, f(w_{ln}, \varphi_l) \rangle}{\langle \varphi_j^+, \Delta_j(\varphi_j) \rangle}, \quad \Delta_j = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha_j^2 \quad (j=1, 2; n=0, j)$$

$$\langle g \rangle = \int_0^\infty g dy$$

Здесь звездочка обозначает комплексно-сопряженную величину, v_j – групповые скорости квазигармонических волновых пакетов, s_{ln} – коэффициенты связи, φ_j^+ – решение сопряженного уравнения Орра – Зоммерфельда, функции w_{ln} удовлетворяют уравнению и граничным условиям

$$\hat{L} w_{ln} = f(\varphi_l, \varphi_n), \quad w_{ln} = w_{ln}' = 0, \quad y=0; \quad w_{ln}, w_{ln}' \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty \\ \hat{L} \equiv (-i\omega + i\alpha\psi_0') \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 \right) - i\alpha\psi_0''' - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 \right)^2, \quad \alpha = \alpha_1 \pm \alpha_n$$

$$f(g_l, g_n) \equiv i\{\alpha_l g_l \Delta_n g_n' - g_l' \alpha_n \Delta_n g_n + \alpha_n g_n \Delta_l g_l' - g_n' \alpha_l \Delta_l g_l\}$$

где \hat{L} – оператор Орра – Зоммерфельда, штрихом обозначена производная по y .

Из (1.6) видно, что синхронные взаимодействия, как и должно быть при четырехволновом взаимодействии, имеют порядок B^3 (кубическая нелинейность). Для анализа (1.6) удобно перейти к действительным амплитудам и фазам. Кроме того, поскольку во всех модельных экспериментах с искусственным возбуждением колебаний в пограничном слое (см., например, [2]) наблюдаемые волны не растут во времени в фиксированной точке пространства $x=x_0$, можно ограничиться рассмотрением случая лишь пространственной модуляции волн. Таким образом, полагая в (1.6) $B_l = A_l \exp i\delta_l$ ($l=0, 1, 2$) и $\partial/\partial t=0$, получим

$$(1.7) \quad v_1 \frac{dA_1}{dx} = -\gamma_1 A_1 + \sum_{l=0}^2 m_{l1} A_l^2 A_1 + m_{20} A_0 A_2^2 \sin \Phi \\ v_2 \frac{dA_2}{dx} = -\gamma_2 A_2 + \sum_{l=0}^2 m_{l2} A_l^2 A_2 + m_{10} A_0 A_1 A_2 \sin(\Phi + \bar{\gamma})$$

$$\frac{d\Phi}{dx} + \Delta_H^{(1)} - m_{20} A_0 \frac{A_2^2}{A_1} \cos \Phi - 2m_{10} A_0 A_1 \cos(\Phi + \bar{\gamma}) = 0$$

$$(1.8) \quad \begin{aligned} A_j(0) &= A_{j0}, & \Phi(0) &= \Phi_0 \\ m_{ln} &= \operatorname{Re} s_{ln}, & m_{j0} &= |s_{j0}|, & \bar{\gamma} &= \arg s_{10} + \arg s_{20} \end{aligned}$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2} - \arg s_{20} - \delta_0 + \delta_1 - 2\delta_2 + \Delta^{(0)} x, \quad \Delta^{(1)} = \sum_{l=0}^2 \operatorname{Im}(2s_{l2} - s_{l1}) A_l^2 - \Delta^{(0)}$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения (1.7) с граничными условиями (1.8) являются исходными уравнениями для анализа задачи. Последние члены в каждом из амплитудных уравнений показывают влияние осцилляций на поведение амплитуд, обусловленное синхронными взаимодействиями. Ясно, что вклад этих членов в общем случае зависит от величины коэффициентов связи m_{ln} , амплитуд волн A_j и нелинейной фазовой расстройки $\Delta^{(1)}$. Кроме того, результат зависит от относительной роли членов, описывающих линейное нарастание.

2. Прежде чем перейти к изложению результатов расчетов, отметим, что во всей работе в качестве характерной толщины пограничного слоя, используемой для приведения уравнений к безразмерному виду, выбрана величина $\delta = \sqrt{2\nu L/U_\infty}$; звездочкой помечены параметры, построенные по толщине вытеснения $\delta^* = 1.217\delta$, ν — кинематическая вязкость, L и U_∞ — соответственно характерные продольный размер и скорость вне пограничного слоя. В процессе расчета коэффициентов γ_j , ν_j , m_{ln} уравнений (1.7) для численного интегрирования уравнений типа Орра — Зоммерфельда (с малым параметром $(\alpha \operatorname{Re})^{-1}$ при старшей производной) применялся метод ортогонализации [12]. Собственные функции $\varphi_j(y)$ нормировались так, чтобы $\max(\operatorname{Re} \varphi_j) = 1$.

С целью выяснения сравнительного влияния в (1.7) различных параметров и оценки характерных порядков их величин были проведены предварительные расчеты амплитуд для фиксированного значения числа Рейнольдса $\operatorname{Re}^* = 10^3$. Рассматривали три случая различного задания собственных частот и соответствующих им волновых чисел, удовлетворяющих условиям синхронизма (1.3); численные значения приведены в таблице. Во всех трех случаях, как показали расчеты, $m_{01} \sim m_{02} \sim m_{20} \sim (10^{-1} - 10^{-2})$, а остальные коэффициенты связи имеют порядок единица. Условие

	γ_2	α_2	ω_2	γ_1	α_1	ω_1	ω_0
1	0	0.1403	0.0452	-0.0016	0.2816	0.1038	0.0134
2	-0.0021	0.1556	0.0514	0.0047	0.3112	0.1174	0.0146
3	0.0026	0.1233	0.0384	-0.0054	0.2466	0.0890	0.0122

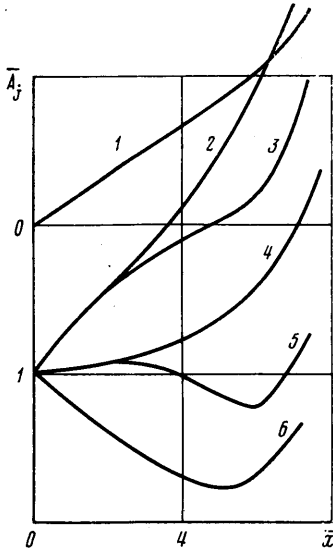
$|m_{20}| \ll |m_{10}|$ указывает на преобладание перекачки энергии в осциллирующем пограничном слое «вниз» по спектру, в связи с чем представляет интерес выбор граничных условий (1.8) для начальных амплитуд в виде $A_{20} \ll A_{10}$ (A_{10} — волна «накачки»).

Ниже в качестве примера более подробно рассмотрен случай 1 из таблицы. На фиг. 1 (здесь $\bar{x} = 10^{-2} x$) показано влияние параметров γ_2 и $\Delta^{(0)}$ на развитие волн $A_1 = \lg(A_1/A_{10})$ — кривая 1 и $A_2 = \lg(A_2/A_{10})$ — кривые 2–6. Численные значения параметров выбраны следующим образом: $A_{10} = 10^{-3}$, $A_{20} = 10^{-4}$, $A_0 = 0.1$, $\Phi_0 = 0$; на кривых 2–6 соответственно: $\gamma_2 = -0.002$, $\Delta^{(0)} = 0.001$; $\gamma_2 = -0.002$, $\Delta^{(0)} = 0.01$; $\gamma_2 = 0$, $\Delta^{(0)} = 0.001$; $\gamma_2 = 0$, $\Delta^{(0)} = 0.01$; $\gamma_2 = 0.002$, $\Delta^{(0)} = 0.001$. Необходимо отметить, что γ_2 и $\Delta^{(0)}$, вообще говоря, не должны варьироваться независимо, так как их величина однозначно определяется дисперсионным уравнением Орра — Зоммерфельда. Тем не менее в данном случае γ_2 и $\Delta^{(0)}$ заданы произвольно (исключение составляют только кривые 1 и 4, соответствующие табличным значениям) для того, чтобы оценить характер и степень их влияния непосредственно в уравнениях (1.7). Расчеты показали, что с увеличением $\Delta^{(0)}$ от 0 до 10^{-3} поведение амплитуд меняется незначительно, но с увеличением $\Delta^{(0)}$ от 10^{-3} до 10^{-2} , как можно видеть на фиг. 1, сравнивая кривые 2 и 3, 4 и 5, рост волны A_2 сильно замедляется. С другой стороны, увеличение коэффициентов линейного нарастания (кривые 6, 4, 2), имеющих порядок 10^{-3} , ускоряет рост A_2 .

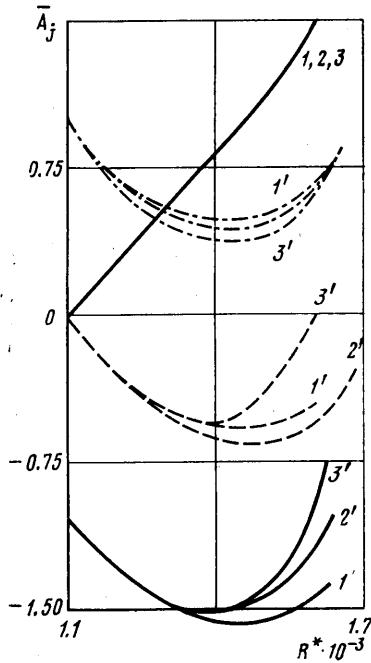
Учитывая, что в пограничном слое при распространении волн число Рейнольдса меняется и, следовательно, меняются все коэффициенты уравнений (1.7) (в том числе γ_j и $\Delta^{(0)}$), расчеты были проведены в рамках известного «локально-параллельного» приближения в широкой области изменения Re^* (900–2000).

Суммарное влияние всех параметров с учетом зависимости их от числа Рейнольдса Re^* приведено на фиг. 2 (сплошные кривые). Здесь кривым 1-3 соответствуют значения $A_0=0, 0.05, 0.1$ для волны A_1 , штрихами около цифр обозначены кривые для второй волны A_2 . Для указанных кривых $A_{10}=10^{-3}$, $A_{20}=10^{-4}$, $\Phi_0=\pi/2$, а безразмерные частотные параметры $F_1=\omega_1/R=69.4 \cdot 10^{-6}$, $F_2=\omega_2/R=30 \cdot 10^{-6}$, $F_0=\omega_0/R=9.4 \cdot 10^{-6}$.

В отличие от результатов фиг. 1 хорошо видно, что при различных значениях A_0 (с возрастанием A_0 вплоть до $A_0=0.1$) осцилляции в пограничном слое не оказы-



Фиг. 1



Фиг. 2

вают существенного влияния на развитие волн. В частности, амплитуда первой волны растет экспоненциально и достигает величины нескольких процентов, т. е. вырастает на 1-2 порядка, в то время как вторая волна практически не меняет свою амплитуду. Это связано, конечно, с тем, что для рассматриваемых значений амплитуды наложенного поля A_0 линейные члены в (1.7) доминируют над нелинейными почти во всем интервале изменения Re^* . А именно, несмотря на сильный нелинейный рост волны A_2 , обусловленный нелинейным коэффициентом нарастания $m_{10}A_0A_1$ (см. второе уравнение (1.7)), за исключением малой окрестности vicinity нейтральной кривой $|\gamma_2| \gg |m_{10}|A_0A_1$.

При дальнейшем увеличении A_0 начинает быстро меняться фаза Φ (в силу того, что A_0 входит в последнее уравнение (1.7)), резонансные эффекты сглаживаются из-за быстрого колебания синусоидальных членов, и поэтому картина развития возмущений остается качественно неизменной. Аналогичные результаты имеют место, как показали расчеты, и для других значений параметров начальной фазы Φ_0 из интервала $(0, 2\pi)$ и начальных амплитуд A_{10}, A_{20} , меняющихся в интервале $(10^{-4}-10^{-3})$ (см. фиг. 2). На фиг. 2 пунктирные и штрихпунктирные кривые 1'-3' показывают поведение амплитуды второй волны (при этом закон изменения амплитуды первой волны остается прежним - сплошные кривые 1-3) соответственно для граничных условий вида $A_{10}=A_{20}=10^{-3}$ и $A_{10} \ll A_{20}$; $A_{10}=10^{-4}$, $A_{20}=10^{-3}$.

На основании уравнений (1.7) легко рассмотреть также важный частный случай, а именно задачу о несинхронном воздействии осцилляций на поведение одной волны, при этом в (1.7) необходимо оставить только первое уравнение и положить в нем $m_{20}=m_{21}=0$. Расчеты, проведенные для ряда частот $\omega_0=\omega_1/2$, $\omega_1, 2\omega_1$, где $\omega_1/R=60 \cdot 10^{-6}$, показали, что $|m_{01}| \ll |m_{11}|$, т. е. осцилляции не оказывают прямого влияния на процесс самовоздействия волны Толмина - Шлихтинга.

Проведенные расчеты показывают, что эффективное воздействие осцилляций на процесс взаимодействия волн Толмина - Шлихтинга отсутствует. Полученные ре-

зультаты, таким образом, в значительной мере подтверждают выводы [2] о том, что гармонические колебания потока увеличивают начальную амплитуду волн вблизи передней кромки пластины, а затем волны развиваются независимо от наложенных осцилляций.

Авторы благодарят А. Г. Володина за помощь в расчетах.

Поступила 16 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Левченко В. Я., Соловьев А. С. Устойчивость осциллирующего пограничного слоя. Изв. СО АН СССР, Сер. техн. н., 1975, вып. 3, № 13.
2. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Генерация и развитие возмущений малой амплитуды в ламинарном пограничном слое при наличии акустического поля. Изв. СО АН СССР, Сер. техн. н., 1975, вып. 3, № 13.
3. Bacon J., Pfenninger W., Moore C. Investigations of a 30° swept and a 17-foot chord straight suction wing in the presence of internal sound external sound and mechanical vibrations. Summary of Laminar Boundary Layer control Research (ASD TDR-63-554), 1964, vol. 1.
4. Knapp C. F., Roache P. J. A combined visual and hot-wire anemometer investigation of Boundary layer transition. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 1.
5. Власов Е. В., Гиневский А. С. Влияние акустических возмущений на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный. Уч. зап. ЦАГИ, 1971, т. 2, № 2.
6. Власов Е. В., Гиневский А. С., Каравосов Р. К. Реакция неустойчивого ламинарного пограничного слоя на акустические возмущения. В сб. Турбулентные течения. М., «Наука», 1977.
7. Поляков Н. Ф. Индуцирование гидродинамических волн в ламинарном пограничном слое продольным звуковым полем. Симпоз. по физике акустико-гидродинамических явлений. Сухуми, 1975, М., «Наука», 1975.
8. Ackerberg R. C., Phillips J. H. The unsteady laminar boundary layer on a semi-infinite flat plate due to small Fluctuations in the magnitude of the free-stream velocity. J. Fluid Mech., 1972, vol. 51, pt. 1.
9. Stewartson K., Stuart J. T. A non-linear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow. J. Fluid Mech., 1971, vol. 48, pt 3.
10. Рабинович М. И. О методе усреднения в нелинейной оптике. В сб. Нелинейные процессы в оптике. Новосибирск, «Наука», 1970.
11. Зельман М. Б. О нелинейном развитии возмущений в плоскопараллельных потоках. Изв. СО АН СССР, Сер. техн. н., 1974, вып. 3, № 13.
12. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Усп. матем. н., 1961, т. 16, вып. 3.

УДК 532.546

ОБ УРАВНЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

А. В. КОСТЕРИН

(Казань)

Предложен общий закон нелинейной анизотропной фильтрации. В переменных годографа скорости получено соответствующее уравнение для давления жидкости. Условия эллиптичности этого уравнения выражены через диссипативную функцию.

1. Рассмотрим изотермическую установившуюся фильтрацию вязкой несжимаемой жидкости через недеформируемый пористый скелет. Энергию Φ , рассеиваемую за единицу времени в единице объема пористой среды в целом, можно записать в виде

$$(1.1) \quad \Phi = p_i q_i, \quad p_i = -\partial p / \partial x_i$$

где p — давление в жидкости, x_i — декартовы координаты, q_i — компоненты скорости фильтрации. По повторяющемуся индексу проводится суммирование.

Билинейная форма (1.1) с точностью до постоянного множителя, равного абсолютной температуре, совпадает с производством энтропии. При этом q_i , p_i являются термодинамическими силами и потоками соответственно. Из теории Циглера [1, 2]