

СРАВНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА
И КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

А. А. МАХМУДОВ, С. П. ПОПОВ

(Москва)

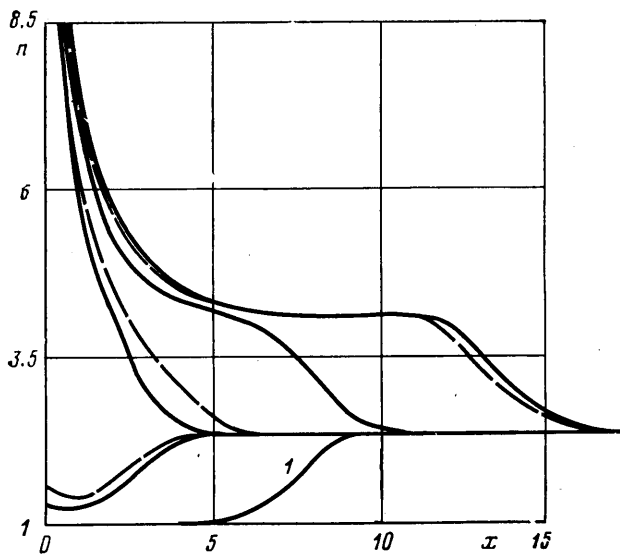
На основе уравнений Навье — Стокса получено численное решение задач об отражении плоской ударной волны от твердой стенки и о схождении к центру симметрии сферической волны. Сравнение с известными решениями этих же задач в рамках кинетической S -модели показывает хорошее согласие в плоском случае и на расхождении в сферически-симметричном, особенно сильно проявляющиеся в температурных профилях.

При решении ряда задач характерные размеры течения могут меняться от сравнимых с длиной пробега атомов l_0 до $10^2 l_0 - 10^3 l_0$ и более. Таким примером служит задача о схождении возмущения в газе к центру или оси симметрии. Наиболее точное описание движения среды возможно в рамках кинетического уравнения Больцмана. Однако практическое решение его сильно ограничивается огромным числом требуемых вычислительных операций. Поэтому решение уравнения Больцмана получено только в ряде простейших случаев. Несколько шире диапазон применения модельных кинетических уравнений, численное решение которых проще. Это, например, модель Крука и S -модель [1]. В областях, где состояние газа близко к равновесному, т. е. характерные размеры и времена значительно больше кинетических, описание течений вполне удовлетворительно может быть проведено в рамках уравнений Навье — Стокса, учитывающих помимо движения процессы теплопроводности и вязкости. Решение их значительно проще кинетических и поэтому более предпочтительно даже в тех случаях, когда не соблюдаются условия их справедливости, так как обычно это узкие области, примыкающие к границам с твердыми телами либо области с большими градиентами газодинамических параметров внутри течения. В связи с этим возникает задача об определении условий применимости уравнений Навье — Стокса и установлении круга явлений, которые в целом могут быть хорошо описаны этой более простой моделью. Некоторые из результатов расчетов и сравнений описанных выше подходов приводятся ниже.

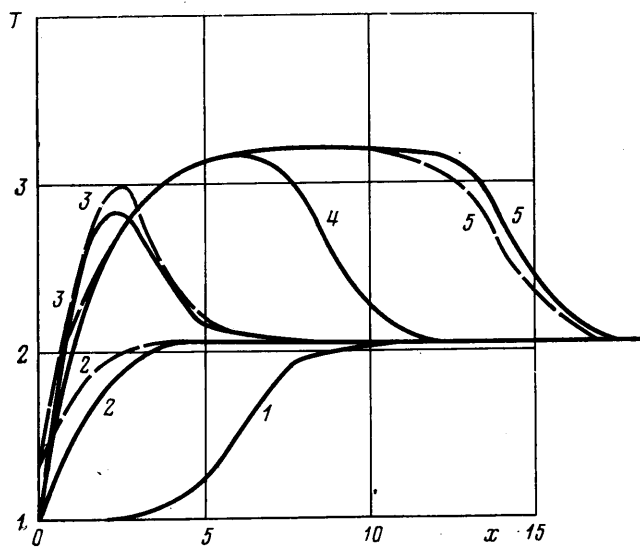
1. **Постановка задачи.** Решалась следующая система нестационарных одномерных уравнений Навье — Стокса для одноатомного газа (в безразмерном виде):

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial nu}{\partial r} = - \frac{vnu}{r} \\
 & \frac{\partial nu}{\partial t} + \frac{\partial nu^2}{\partial r} = - \frac{vnu^2}{r} - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} r^\nu \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial r} - \\
 & - v \left(\frac{4}{3} \frac{\mu u}{r^2} + \frac{2}{3} \frac{u}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} \right) \\
 & \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (E+p)u}{\partial r} = - \frac{v(E+p)u}{r} + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} r^\nu \kappa \frac{\partial T}{\partial r} - \\
 & - v \left(\frac{2}{3} \frac{u^2}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{2}{3} (v-1) \frac{\mu u^2}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} u \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial r}
 \end{aligned}$$

Здесь $\nu=0, 2$ для плоской и сферической геометрии соответственно; n — плотность числа частиц; u — скорость; $E=nu^2/2+p/(\gamma-1)$ — полная энергия; p — давление; $T=p/n$ — температура; $\gamma=5/3$ — показатель адиабаты Пуассона; μ, κ — коэффициенты вязкости и теплопроводности. В соответствии с моделью жестких сфер μ полагалось равным $5/16 \cdot (2\pi T)^{1/2}$, а число Прандтля — $2/3$, при этом $\kappa=75/64 \cdot (2\pi T)^{1/2}$.



Фиг. 1



Фиг. 2

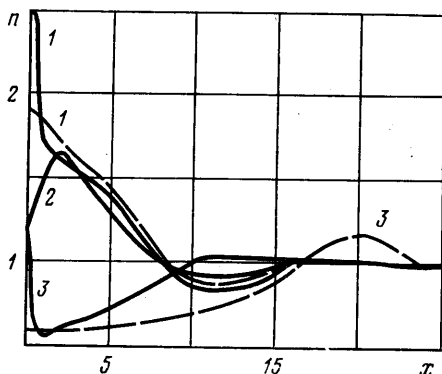
В качестве характерных величин брались n_0 , T_0 , l_0 — соответственно плотность числа частиц, температура и длина свободного пробега в невозмущенном потоке; по ним определялись безразмерные параметры газа. При этом $u_0 = (k \cdot T_0 / M)^{1/2}$, $t_0 = l_0 / u_0$, $\rho_0 = n_0 k T_0$. В отличие от принятой в S -модели нормировка скорости и времени получилась больше или меньше в $\sqrt{2}$ раз, т. е.: $x_H = x_s$, $T_H = T_s$, $u_H = u_s \sqrt{2}$, $t_H = t_s / \sqrt{2}$, $n_H = n_s$. Значком H помечены величины, получающиеся в результате счета системы (1), а значком s — по кинетической модели.

Начальные и граничные условия для (1) будут приведены ниже.

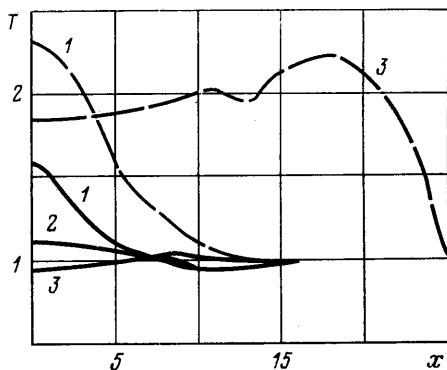
Построение численной схемы, аппроксимирующей систему (1), было основано на применении метода расщепления [2-4]. Отщепленные уравнения Эйлера решались методом первого порядка точности на равномерной сетке [5]. Уравнения для изменения температуры и скорости за счет эффектов теплопроводности и вязкости, имеющие вид уравнений теплопроводности с правыми частями, считались по неявной схеме второго порядка точности. Для ее решения использовался метод обычной прогонки [3]. Схема в плоском случае удовлетворяет

законам сохранения, проверка ее работы проводилась на решении задачи о поршне,двигающемся с постоянной скоростью в покоящийся вязкий теплопроводный газ. Решение выходило на известные квазистационарные режимы с точностью нескольких процентов для чисел Маха $3 \leq M \leq 80$ при количестве счетных точек в основной части релаксационной зоны около 20. Положение точек перегиба профилей температуры и плотности, а также максимума энтропии отклонялись от теоретических значений на 1–2 счетные точки.

2. Задача об отражении плоской ударной волны от твердой стенки. Постановка задачи, метод счета и результаты для кинетической S -модели опубликованы в работе [8]. Считалось, что в области $r > 0$ находится одноатомный покоящийся газ. Температура стенки $r=0$ и невозмущенного газа одинаковы и равны T_0 . Плотность газа равна n_0 . Из бесконечности на стенку набегают ударная волна, характеризующаяся числом Маха $M=2$ в системе координат, связанной с ударной волной. При достиже-



Фиг. 3



Фиг. 4

нии ударной волной стенки начинается сложное взаимодействие, во время которого температура стенки поддерживается равной T_0 . Задача состоит в определении температуры и плотности в момент отражения, а также в установлении параметров отраженной волны. При решении системы (1) эти условия моделировались следующим образом в области $t > 0$ и $0 \leq r \leq 20$. В начальный момент $t=0$ в точках с координатой $12 \leq r \leq 20$ задавались T_+ , n_+ , u_+ , связанные с T_0 , n_0 , u_0 в области $0 \leq r \leq 12$ условиями Рэнкина – Гюнио. При $r=0$ задавались условия непротекания и $T=T_0$, в точке $r=20$ ставились условия $u=u_+$, $n=n_+$, $T=T_+$. Счетный интервал по r выбирался равным 0.1, интервал по времени Δt определялся условиями схемы [5] с запасом устойчивости 2.5. С течением времени первоначальный разрыв трансформировался в размытую вязкую и теплопроводную ударную волну, набегающую на стенку. К моменту $t=2.48$ она вышла на стационарный режим с плотностью за волной 4.1, температурой 3.22 и скоростью $-0.1 - -0.2$. Для адиабатической стенки соответствующие значения параметров принимали значения 4.15, 3.25 и 0. Газ у стенки нагревался ударной волной, а стенка, температура которой оставалась постоянной, охлаждала его. Это приводило к потоку массы на стенку и к соответствующему уменьшению скорости отхода отраженной ударной волны по сравнению со случаем адиабатической стенки.

Кинетическая модель дает распределения, отмеченные на фиг. 1, 2 штриховыми кривыми: 2 – 3.90, 3 – 7.68, 5 – 14.5. За отраженной ударной волной $n=4.34$, $T=3.44$, $u=-0.1$. Значение плотности у стенки при $t_5 - 11.3$, по настоящим расчетам – 12.7.

Согласие двух моделей можно считать удовлетворительным и некоторое несоответствие может быть объяснено неправильной постановкой граничного условия на стенке для газа в рамках теории Навье – Стокса, когда температура газа приравнивается температуре стенки. На самом деле эти условия более корректно получаются на основании кинетической модели и температуры оказываются различными (см. фиг. 2, область $0 \leq r < 0.5$). Исходя из полученных результатов, можно ожидать, что расчет плоских задач по предлагаемой схеме, аппроксимирующей уравнения Навье – Стокса, дадут результаты, близкие к полученным по S -модели, даже в случае очень грубой

аппроксимации граничных условий в целом ряде задач, близких к рассмотренной. В расчетах [6] к t_5 было сделано 1200 временных шагов, в настоящих расчетах — 2250. Однако благодаря более простой реализации счета системы (1) для получения результатов требуется времени в 50–100 раз меньше. Это является значительным преимуществом, особенно в случаях, когда необходимо получить оценочные значения параметров течений при изменении числа Маха ударной волны в сторону больших значений или при других граничных условиях, например при учете испарения стенки или прилипания к ней.

3. Задача о схождении к центру и отражении сферической волны в газе. Постановка задачи, схема счета и результаты в рамках S -модели даны в работе [7]. Для (1) в начальный момент $t=0$ задавалось следующее сферически-симметричное возмущение, сосредоточенное внутри шарового слоя $0 \leq r \leq 26$: для $4 \leq r \leq 16$, $n(r) = 1 + 3/5 p_0(r)$, $u(r) = -(0.6)^{1/2} p_0(r)$, $p(r) = 1 + p_0(r)$, $p_0(r) = 3.3 \sin(\pi/6(r-4))/r$, для других r $n(r) = p(r) = 1$, $u(r) = 0$. В центре выполнялись условия непротекания и зеркального отражения, при $r=26$ поддерживались начальные значения n , p , u . Величины μ , κ , γ , Δr , Δt были такими же, как и в первой задаче.

На фиг. 3 приведены распределения плотности в моменты времени 2.27, 4.27, 10.35 (сплошные линии 1–3). Штриховой линией указаны результаты S -модели для времен 1–2.13, 3–10. Расхождения профилей для t_1 наиболее существенны в области $r < 1$, в остальных областях отклонения незначительны. После отражения возмущения от центра к моменту t_3 по численному решению системы Навье — Стокса максимальное значение плотности 1.07 находится в $r=12.5$. Кинетическая модель дает более интенсивную амплитуду $n=1.2$ и волна проходит большее расстояние ($r \sim 20$).

Наиболее значительно отличие результатов, которые даются обеими моделями, в температурных распределениях, изображенных на фиг. 4. Так, к t_3 по модели сплошной среды температура в среднем по всей области, охваченной движением, порядка 1, по S -модели она около 2. Отметим, что аналогичные результаты получаются при подобных сравнениях задачи об обтекании затупленного тела потоком разреженного газа.

Итак, можно сделать вывод о том, что уравнения Навье — Стокса дают близкие к кинетической модели результаты для значений плотностей и давлений при схождении возмущения к центру и временах, близких к схлопыванию. Для более далеких времен расхождения достигают значений, сравнимых с самим решением. Несмотря на это, ввиду существенной простоты и скорости расчета (1) приближение сплошной среды, как показывают проведенные расчеты, может оказаться предпочтительным в случаях, когда точность в несколько десятков процентов оказывается достаточной.

В заключение авторы выражают благодарность О. С. Рыжову за внимание к данной работе.

Поступила 21 XI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Шахов Е. М. Метод исследования движений разреженного газа. М., «Наука», 1977.
2. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М., «Наука», 1977.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., «Наука», 1977.
4. Белоцерковский О. М., Головачев Ю. П., Грудницкий В. Г. и др. Численное исследование современных задач газовой динамики. М., «Наука», 1974.
5. Boris J. P., Book D. L. Flux-corrected transport. 1. Shasta, a fluid transport algorithm that works. J. Comput. Phys., 1973, vol. 11, No. 1.
6. Кудиш И. И., Рыков В. А. Отражение ударной волны от твердой стенки. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1973, т. 13, № 5.
7. Кудиш И. И., Рыков В. А. О схождении к центру и отражении сферической волны в газе. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 5.