

**СТАЦИОНАРНЫЕ ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ
НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ**

Н. Ф. ПАЦЕГОН

(Харьков)

Рассмотрен аналог течения Прандтля – Майера в несжимаемой электропроводной идеальной жидкости, намагничивающейся по произвольному изотропному закону. Показано, что за счет неоднородности намагничивания в проводящей жидкости существуют стационарные простые волны с изменяющейся магнитной проницаемостью. Для парамагнитной жидкости, намагниченной до насыщения, уравнения этих волн проинтегрированы в конечном виде в случае магнитного поля, параллельного скорости.

Некоторые области таких течений намагничивающихся жидкостей в настоящей работе обсуждаются на примере задачи обтекания идеально проводящего профиля.

1. Стационарные движения электропроводной, идеальной, изотропно и неоднородно намагничивающейся жидкости в магнитогидродинамическом приближении описываются системой уравнений [1]

$$(1.1) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (\mathbf{v} \nabla)(s + s^e) = 0$$

$$\rho(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla(p + \psi^p) + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{B} + M \nabla H$$

$$(\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} = 0$$

$$s^e = \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^H \mu_T H dH, \quad \psi^p = \frac{1}{4\pi} \int_0^H (\mu - 1 - \rho\mu_p) H dH,$$

$$\psi^T = \frac{1}{4\pi} \int_0^H (\mu - 1 - T\mu_T) H dH$$

Магнитная проницаемость μ предполагается произвольной функцией плотности ρ , температуры T и напряженности магнитного поля H .

Вместо третьего уравнения системы (1.1), определяющего изменение полной энтропии жидкости в стационарном потоке, можно воспользоваться уравнением энергии в виде

$$(1.2) \quad \operatorname{div} \left\{ \mathbf{v} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho U + p + \psi^p - \psi^T \right) + \frac{1}{4\pi} [\nu \mu H^2 - \mathbf{B}(\mathbf{H} \nu)] \right\} = 0$$

В уравнениях (1.1), (1.2) энтропия s и температура T жидкости связаны уравнением состояния [2] $T_H = T(s)$, U — внутренняя энергия жидкости в отсутствие электромагнитного поля, $M = (\mu - 1)H/4\pi$ — намагниченность.

Везде в дальнейшем u_η ($\eta = \rho, T, H, s$) означает частную производную величины u по переменной η в позиции индекса.

Аналогично [3] можно показать, что возможные скорости жидкости относительно поверхности $\Phi(x, y, z) = 0$ разрыва первых производных параметров потока, описываемого системой (1.1), (1.2), определяются из

уравнения

$$(1.3) \quad v_n \left(v_n^2 - \frac{B_n^2}{4\pi\rho\mu} \right) \left\{ v_n^2 - mB_n^2 \left[\mu^2 + \mu_H \frac{B_n^2}{B} + \right. \right. \\ \left. \left. + N\mu^2\mu_T^2 T_s m (B^2 - B_n^2) \right] \right\} = 0$$

$$m = [4\pi\rho(\mu^2 + \mu_H B)]^{-1}, \quad N = [1 + s_T e^e T_s - \mu_T^2 T_s m B^2]^{-1}$$

Здесь v_n и B_n — нормальные составляющие скорости жидкости и индукции магнитного поля относительно элемента поверхности слабого разрыва с нормалью n .

Уравнение (1.3) кроме энтропийной и альвеновских скоростей определяет магнитозвуковые скорости, существование которых в электропроводной несжимаемой жидкости обусловлено неоднородностью закона намагничивания.

Отметим, что для течений парамагнитной жидкости в магнитном поле, параллельном скорости, условие существования магнитозвуковых слабых разрывов состоит в выполнении неравенства

$$(1.4) \quad \mu^2 + \mu_H B \leq v^2 / m B^2 \leq \mu^2 + N \mu^2 \mu_T^2 T_s m B^2$$

Наличие действительных магнитозвуковых характеристик для системы (1.1) позволяет применить метод характеристик при исследовании движений намагничивающейся жидкости в областях гиперболичности течения. Простейшими такими течениями являются одномерные течения, рассмотренные в [4, 5]. Ниже изучаются стационарные простые волны.

2. Рассмотрим течения намагничивающейся жидкости, в которых все переменные зависят только от угла φ , отсчитываемого в плоскости (x, y) , и не зависят от координаты z .

Из (1.1) получим, что в цилиндрической системе координат (r, φ, z) такие течения определяются решениями следующей системы уравнений:

$$(2.1) \quad v_\varphi' + v_r = 0, \quad B_\varphi' + B_r = 0, \quad v_\varphi(s + s^e)' = 0$$

$$v_\varphi(v_r' - v_\varphi) = B_\varphi \frac{B_r' - B_\varphi}{4\pi\rho\mu} - \mu' \frac{B_\varphi B_r}{4\pi\rho\mu^2}$$

$$v_\varphi(B_r' - B_\varphi) = B_\varphi(v_r' - v_\varphi), \quad v_\varphi B_z' - B_\varphi v_z' = 0$$

$$v_\varphi v_z' = \frac{B_\varphi B_z'}{4\pi\rho\mu} - \mu' \frac{B_\varphi B_z}{4\pi\rho\mu^2}, \quad \left(p + \psi^p + \frac{B^2}{4\pi\mu^2} \right)' = - \frac{B_\varphi^2 \mu'}{4\pi\mu^2}$$

Штрихом обозначено дифференцирование по φ .

Будем считать, что $v_\varphi \neq 0$. В противном случае система (2.1) описывает поступательный поток жидкости вдоль оси z . Тогда из третьего уравнения (2.1) получаем

$$(2.2) \quad s + s^e = \text{const}$$

так что полная энтропия жидкости сохраняется вдоль линии тока.

Изучим сначала решения системы (2.1), в которых не изменяется магнитная проницаемость. Тогда из уравнения (2.2) и условия $\mu' = 0$ следует: $T = \text{const}$, $H = \text{const}$, $B = \text{const}$. Из последнего уравнения (2.1) получим, что давление в жидкости постоянно.

Остальные уравнения приводятся к виду

$$L B_z' = 0, \quad L v_z' = 0, \quad L(B_r' - B_\varphi) = 0, \quad L(v_r' - v_\varphi) = 0, \quad L = v_\varphi^2 - \frac{B_\varphi^2}{4\pi\mu}$$

Отсюда получаем, что для течений с постоянной магнитной проницаемостью имеет место одно из условий (2.3) или (2.4):

$$(2.3) \quad v_z' = 0, \quad B_z' = 0, \quad v_r' - v_\varphi = B_r' - B_\varphi = 0$$

$$(2.4) \quad v_\varphi^2 = B_\varphi^2 / 4\pi\mu$$

Уравнения (2.3) определяют стационарный поступательный поток, параллельный плоскости $\varphi = \varphi_0$:

$$v_z = \text{const}, \quad B_z = \text{const}, \quad v_r = A \cos(\varphi - \varphi_0).$$

$$v_\varphi = -A \sin(\varphi - \varphi_0), \quad B_r = D \cos(\varphi - \varphi_1), \quad B_\varphi = -D \sin(\varphi - \varphi_1)$$

Здесь $A, D, \varphi_0, \varphi_1$ — некоторые постоянные.

При выполнении (2.4) из (2.1) получим

$$(2.5) \quad \mathbf{V} = K\mathbf{v} + K_2\mathbf{e}_z, \quad B = \text{const}$$

$$(B_\varphi')^2 = B^2 - B_\varphi^2 - B_z^2, \quad B_r^2 = B^2 - B_\varphi^2 - B_z^2$$

где $K = \text{const}, K_2 = \text{const}, \mathbf{e}_z$ — единичный орт оси z .

Решение (2.5), зависящее от одной произвольной функции B_z , соответствует стационарной вращательной простой волне [6].

Таким образом, стационарные простые волны, в которых магнитная проницаемость не изменяется, аналогичны волнам в немагнитизирующей электропроводной несжимаемой жидкости.

Для течений жидкости с переменной магнитной проницаемостью ($\mu' \neq 0$) (1.2) найдем

$$(2.6) \quad \frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} + \frac{\psi^0 - \psi^T}{\rho} + \frac{\mu H^2}{4\pi\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} \int \frac{B_\varphi(\mathbf{Hv})'}{v_\varphi} d\varphi = \text{const}$$

Уравнение (2.6) служит для определения давления в жидкости после того, как из системы (2.1) будут найдены температура, скорость и магнитная индукция.

Из равенства $\mu' = (\mu^2 \mu_T T' + \mu \mu_H B') / (\mu^2 + \mu_H B)$, имеющего место для произвольного закона намагничивания $\mu = \mu(\rho, T, H)$, и уравнения (2.2), можно получить

$$\mu' = 4\pi\mu^2 m [\mu_H - N\mu^2 \mu_T^2 T, mB] B'$$

Преобразуя здесь B' с использованием остальных уравнений (2.1), приходим к следующему алгебраическому интегралу:

$$(2.7) \quad v_\varphi^2 - mB_\varphi^2 [\mu^2 + \mu_H B_\varphi^2 / B + N\mu^2 \mu_T^2 T, m(B_r^2 + B_z^2)] = 0$$

Из уравнений (1.3) и (2.7) следует, что v_φ является характеристической скоростью для системы (2.1) и лучи $\varphi = \text{const}$ — характеристики в искомом решении. Вдоль характеристики $\varphi = \text{const}$ все магнитогидродинамические переменные постоянны.

Рассмотрим в последующем движения жидкости вдоль силовых линий магнитного поля: $\mathbf{V} = C\mathbf{v}$. При этом из первых двух уравнений (2.1) следует, что $C = \text{const}$. Уравнение индукции в этом случае удовлетворяется тождественно, так что для определения скорости потока имеем систему уравнений

$$(2.8) \quad v_\varphi' + v_r = 0, \quad (c_1 - \mu)(v_r' - v_\varphi) = c_1 v_r \frac{\mu'}{\mu},$$

$$(c_1 - \mu)v_z' = c_1 v_z \frac{\mu'}{\mu}, \quad c_1 = \frac{c^2}{4\pi\rho}$$

Последнее уравнение (2.8) интегрируется

$$(2.9) \quad v_z = c_2 \mu / (\mu - c_1)$$

где c_2 — постоянная интегрирования.

Из (2.9) следует, что если на некотором характеристическом луче составляющая скорости по оси z равна нулю, то и во всем потоке $v_z = 0$, так что движение жидкости плоское.

Для дальнейшего интегрирования системы (2.8) необходимо задать закон намагничивания в явном виде. Ниже рассмотрим случай электропроводной жидкости, намагниченной до насыщения. В этом случае можно считать, что намагниченность M жидкости постоянна

$$(2.10) \quad M = (\mu - 1)H/4\pi = \text{const}, \quad M > 0$$

Уравнение (2.10) описывает, в частности, намагничивание парамагнитных жидкостей в сильном магнитном поле [7].

Из (2.10), (2.9) и первых двух уравнений (2.8) имеем

$$v_\varphi^2 + v_r^2 = \frac{K_1 \mu^2}{c_1^2 (\mu - 1)^2} - \frac{c_2^2 \mu^2}{(\mu - c_1)^2}, \quad K_1 = \frac{MC}{\rho}$$

$$(v_\varphi^2 + v_r^2)' = -\frac{2c_1 \mu' v_r^2}{\mu (\mu - c_1)}$$

Отсюда находим

$$(2.11) \quad v_r^2 = \frac{K_1^2}{c_1^3} \frac{\mu^2}{(\mu - 1)^3 (c_1 - 1)} - \frac{c_2^2 \mu^2}{(\mu - c_1)^2}, \quad v_\varphi^2 = \frac{K_1^2 (c_1 - 1)}{c_1^3} \frac{\mu^3}{(\mu - 1)^3}$$

Используя второе уравнение (2.8) и равенства (2.11), получим следующее уравнение, определяющее зависимость магнитной проницаемости от угла φ в стационарной простой волне:

$$(2.12) \quad (\mu')^2 = \frac{4c_1^3 (c_1 - 1)}{9K_1^2} \mu (\mu - 1)^5 \left[\frac{K_1^2}{c_1^3} \frac{\mu - c_1}{(\mu - 1)^3} - \frac{c_2^2}{(\mu - c_1)^2} \right]$$

Условие существования действительных магнитозвуковых характеристик для движений жидкости в магнитном поле, параллельном скорости, получаемое из (1.4), в случае закона намагничивания (2.10) имеет вид $1 < c_1 < \mu$. С учетом этого из (2.11) получаем следующие возможные значения постоянных c_1 и c_2 в решении, определяемом равенствами (2.9), (2.11), (2.12):

$$1 < c_1 < \mu_-, \quad |c_2| \leq \frac{K_1}{c_1^{3/2}} \left(\frac{\mu_- - c_1}{\mu_- - 1} \right)^{3/2}$$

Здесь μ_- — значение магнитной проницаемости на начальной характеристике, ограничивающей стационарную волну.

Будем считать, что направление отсчета угла φ совпадает с направлением v_φ , так что $v_\varphi > 0$. Кроме того, $v_r > 0$, что соответствует возмущениям, исходящим от особой линии (оси z). Тогда из (2.11)–(2.12) получаем решение системы уравнений (2.1) в следующем виде (2.13):

$$v_r = \frac{K_1}{c_1^{3/2}} \mu \left[\frac{\mu - c_1}{(\mu - 1)^3} - \frac{\beta^3}{(\mu - c_1)^2} \right]^{1/2}$$

$$v_\varphi = \frac{K_1}{c_1^{3/2}} \sqrt{c_1 - 1} \left(\frac{\mu}{\mu - 1} \right)^{3/2}$$

$$(2.14) \quad v_z = \frac{c_2 \mu}{\mu - c_1}, \quad \frac{p}{\rho} + \frac{K_1^2}{2c_1^2} \left(\frac{\mu}{\mu - 1} \right)^2 = \text{const}, \quad \beta^3 = \frac{c_1^3 c_2^2}{K_1^2}$$

$$\frac{2}{3} (\sqrt{c_1 - 1})^{-1} \varphi + \text{const} = \int \frac{(\mu - c_1) d\mu}{(\mu - 1) \sqrt{\mu(\mu - c_1)^3 - \beta^3 \mu(\mu - 1)}}$$

Из (2.14) зависимость $\varphi = \varphi(\mu)$ для общей двумерной задачи выражается через элементарные функции и эллиптические интервалы.

Остановимся подробнее на ограниченной двумерной задаче ($v_z = 0$, $\beta = 0$).

Полагая постоянную интегрирования в (2.14) равной нулю, получим

$$(2.15) \quad \mu = \frac{c_1(1 - \sin \alpha)}{2 - c_1(1 + \sin \alpha)}, \quad \alpha = \frac{2}{3} \varphi$$

Поскольку из (2.14) следует, что магнитная проницаемость является монотонно возрастающей функцией угла φ , то из (2.15) получаем возможные значения углов φ в стационарной простой волне

$$-\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3}{2} \arcsin \frac{(2 - c_1)\mu_+ - c_1}{c_1(\mu_+ - 1)} < \frac{3}{2} \arcsin \frac{2 - c_1}{c_1}$$

где μ_+ — максимальное значение магнитной проницаемости, определяемое физическими свойствами жидкости.

Для остальных переменных в простой волне имеем

$$\frac{dp}{d\varphi} > 0, \quad \frac{dv}{d\varphi} < 0, \quad \frac{dB}{d\varphi} < 0, \quad \frac{dH}{d\varphi} < 0$$

Следовательно, в простой волне возрастают только давление и магнитная проницаемость; скорость, магнитная индукция и напряженность магнитного поля убывают с ростом угла φ . Таким образом, решение (2.13), (2.15) описывает волну размагничивания.

Для угла χ , образованного вектором скорости с некоторым фиксированным направлением в плоскости (x, y) , имеем $\chi = \varphi + \arctg(v_\varphi/v_r)$.

С использованием (2.13) отсюда получаем

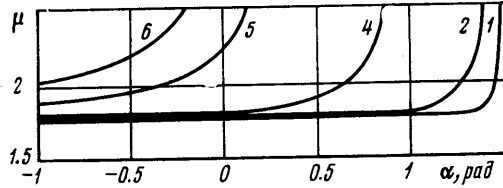
$$(2.16) \quad \frac{d\chi}{d\varphi} = \frac{2}{3}$$

Таким образом, в случае магнитного насыщения связь между углом поворота потока и углом φ не зависит от свойств проводящих намагничивающихся жидкостей [8, 9]. При этом намагничивающаяся жидкость в простой волне поворачивается в направлении обхода вокруг особой линии и угол поворота течения пропорционален углу φ .

В решение ограниченной двумерной задачи входит единственный параметр c_1 , характеризующий отношение скорости жидкости на бесконечности к альвеновской скорости.

На фиг. 1, 2 приведены графики магнитной проницаемости и безразмерной скорости $v^* = c_1 v/K_1$ в зависимости от угла α (кривые 1–6 соответствуют значениям c_1 , равным 1.001, 1.01, 1.1, 1.5, 1.9).

Из фиг. 1 видно, что для каждого значения c_1 существует область углов φ , при которых происходит быстрое изменение магнитной проницаемости в потоке. Это в свою очередь приводит к значительному понижению напряженности магнитного поля, что обуславливает непримени-



Фиг. 1

мость закона намагничивания (2.10), справедливо для парамагнитной жидкости при больших значениях H .

3. Рассмотрим задачу обтекания бесконечно проводящего угла стационарным потоком идеальной электропроводной намагничивающейся жидкости.

Введем декартову систему координат x, y, z с вершиной в угловой точке, направив ось z по ребру угла (фиг. 3) ($\angle AOB = \beta_1$). Магнитное поле в потоке должно быть параллельным скорости, поскольку в противном случае решение задачи, зависящее только от угла φ , не существует [8, 10].

Изучим ограниченную двумерную задачу обтекания ($v_z = 0, \beta = 0$). В набегающем потоке (область I) значение магнитной проницаемости равно μ_1 . Из (1.3) можно получить, что характеристика Oa , разделяющая области поступательного потока и волну размагничивания, в плоскости x, y задается уравнением

$$y/x = \sqrt{\mu_1(c_1 - 1)/(\mu_1 - c_1)} \quad (1 < c_1 < \mu_1) .$$

Из (2.15) следует, что этой характеристике соответствует значение угла φ , равное φ_1

$$\varphi_1 = \varphi(\mu_1), \quad \varphi(\mu) = \frac{3}{2} \arcsin \frac{2\mu - c_1(\mu + 1)}{(\mu - 1)c_1}$$

Уравнение (2.16) определяет угол χ в виде

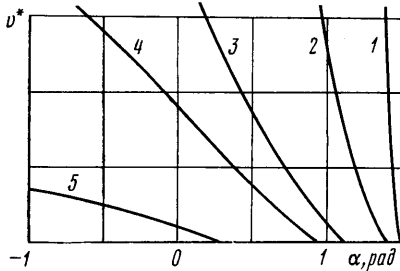
$$\chi = \frac{2}{3} \varphi$$

(отсчет угла χ ведется от того же напряжения, от которого отсчитывается угол φ).

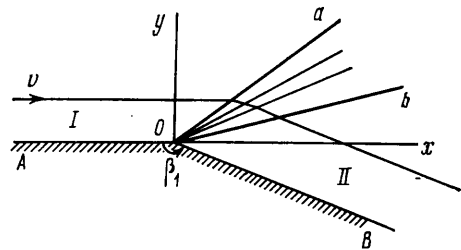
Отсюда следует, что поток поворачивается в угле aOb , равном $3(\pi - \beta_1)/2$ и после разрыва Ob становится параллельным стороне угла OB .

Отметим, что принципиально возможны и другие режимы обтекания. Если в области II значение магнитной проницаемости, определяемое по (2.15), превосходит максимальное $\mu_2 = \mu(\varphi_1 + 3(\pi - \beta_1)/2) > \mu_+$, то волна размагничивания поворачивает поток только на угол $\omega = \chi(\varphi_2) - \chi(\varphi_1)$, $\varphi_2 = \varphi(\mu_+)$. При этом жидкость, занимающая угол $\pi - \beta_1 - \omega$, прилегающий к стороне OB , отделена от поступательного потока тангенциальным разрывом.

В качестве примера рассмотрим обтекание угла $\beta_1=150^\circ$ при $c_1=1.004$, $\mu_1=1.005$. Тогда угол наклона характеристики Oa к оси x равен $63,5^\circ$. После поворота на 45° поток становится поступательным со значением магнитной проницаемости в нем, равным $\mu_2=1.005006$. Если $\mu_+ = 1.005003$, то жидкость поворачивается в волне размагничивания на угол $\omega=40.7^\circ$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Решение задачи об обтекании идеально проводящей стенки строится аналогично известному в газовой динамике [11]. Приведем формулы, определяющие изменение величин в волне размагничивания

$$v_x = v \cos \theta, \quad v_y = v \sin \theta, \quad \operatorname{tg} \theta = dY/dX$$

$$v^2 = \frac{K_1^2}{c_1^2} \frac{\mu^2}{(\mu-1)^2}, \quad \mu = \frac{c_1(1-\sin \alpha)}{2-c_1(1+\sin \alpha)}$$

$$\theta = \varphi_* - \frac{2}{3} \varphi$$

Здесь φ_* — угол, образованный с осью x направлением, от которого ведется отсчет углов φ и χ в решении (2.16), (2.17); v_x и v_y — составляющие скорости по осям системы координат x, y ; $x=X(\theta)$, $y=Y(\theta)$ — параметрические уравнения профиля.

Прямолинейные характеристики, исходящие из поверхности профиля, задаются уравнением

$$y - Y(\theta) = (x - X(\theta)) \operatorname{tg}(\varphi_* - \varphi)$$

Отсюда, в частности, получаем, что при обтекании вогнутого профиля ($dY/dX > 0$) возникает ударная волна.

При обтекании вогнутого угла ($\beta_1 > \pi$) поворот потока осуществляется в ударной волне, отходящей от края угла.

Из (2.7) следует, что указанные качественные особенности имеют место и при обтекании непроводящего профиля потоком электропроводной намагничивающейся жидкости в произвольно ориентированном магнитном поле.

В заключение отметим, что возникающие таким образом ударные волны намагничивания (слабой интенсивности) удовлетворяют необходимым условиям термодинамической устойчивости, эволюционности и имеют стационарную структуру [12].

Автор благодарит И. Е. Тарапова за внимание к работе и ценные замечания, сделанные при ее обсуждении.

Поступила 15 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарапов И. Е. К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред. Магнитная гидродинамика, 1972, № 1.
 2. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1973.
 3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 1. М., Физматгиз, 1963.
 4. Тарапов И. Е. Поперечные волны и разрывы в идеальной намагничивающейся жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 6.
 5. Пацегон Н. Ф., Половин Р. В., Тарапов И. Е. Простые волны и сильные разрывы в намагничивающейся среде. ПММ, 1979, т. 43, вып. 1.
 6. Любимов Г. А. Стационарное обтекание угла потоком бесконечно проводящего газа. Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 4.
 7. Вонсовский С. В. Магнетизм. М., «Наука», 1971.
 8. Каган И. Я., Рыков В. Г., Янговский Е. И. Ферромагнитные электропроводные жидкости. Магнитная гидродинамика, 1970, № 3.
 9. Charles S. W., Popplewell J. The magnetic properties of ferromagnetic liquids containing iron particles in mercury. IEEE Trans. Magnetics, 1976, vol. Mag-12, No. 6.
 10. Grad H. Reducible problems in magneto-fluid dynamic steady flows. Reviews Modern Phys., 1960, vol. 32, No. 4.
 11. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
 12. Пацегон Н. Ф. Структура скачка слабой интенсивности в проводящей намагничивающейся жидкости. Магнитная гидродинамика, 1978, № 2.
-