

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В КАНАЛАХ ПРИ НАЛИЧИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Г. Б. ЖЕСТКОВ, В. А. МАРЕЕВ

(Москва)

Изучено распространение в каналах вынужденных колебаний, генерируемых изменением по гармоническому закону граничных условий в сечениях входа и выхода. С помощью линейной теории найдены классы граничных условий и частоты вынужденных колебаний, соответствующие наибольшему усилению или ослаблению высокочастотных колебаний в канале переменного сечения и колебаний произвольной частоты в канале постоянного сечения. Изучено явление резонанса в каналах, возникающее при совпадении частот вынужденных и собственных колебаний.

Выполнено численное исследование волнового процесса в канале переменного сечения, найдены его характеристики и проведено сравнение с линейной теорией. Показано, что результаты расчетов и данные линейного анализа хорошо согласуются.

1. Система безразмерных уравнений, описывающая нестационарные одномерные течения совершенного газа с постоянными теплоемкостями в канале, площадь поперечного сечения которого  $H=H(x)$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho H + \frac{\partial}{\partial x} \rho u H &= 0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \quad p = \rho T \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\gamma p}{H} \frac{\partial}{\partial x} u H &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь все обозначения общепринятые, обезразмеривание в (1.1) произведено с помощью характерных значений скорости  $u^*$ , плотности  $\rho^*$  и длины канала  $h$ , направление оси  $x$  совпадает с направлением скорости.

Ограничимся рассмотрением дозвуковых течений, в которых возмущения могут распространяться как вверх, так и вниз по потоку и отражаться от границ канала. Поэтому граничные условия

$$(1.2) \quad \Phi(u, p, \rho) = F(t)$$

необходимо задавать как во входном сечении канала ( $x=0$ ) (два первых соотношения в векторном равенстве (1.2)), так и на выходе из него при  $x=1$  (последнее соотношение в (1.2)) [1].

Начальные распределения газодинамических параметров также зададим в виде трех соотношений:

$$(1.3) \quad t=0, \quad \Psi(u, p, \rho) = G(x)$$

Предположим, что система уравнений (1.1) имеет стационарные (при  $\partial/\partial t=0$ ) дозвуковые решения  $u_0(x)$ ,  $p_0(x)$ ,  $\rho_0(x)$ , соответствующие сле-

дующим граничным условиям:

$$(1.4) \quad \Phi_0(u_0, p_0, \rho_0) = F_0 \quad (F_0 = \text{const})$$

задаваемым аналогично (1.2).

2. Рассмотрим распространение малых возмущений в канале, наложенных на стационарное решение (1.4), в том случае, когда

$$(2.1) \quad F(t) = F_0 + f(t) \\ t < 0: f(t) = 0; \quad t > 0: f(t) = f_0 e^{i\omega_0 t} \quad (f_0 \ll F_0)$$

( $\omega_0$  — частота вынужденных колебаний)

$$(2.2) \quad G(x) = \Psi_0(u_0, p_0, \rho_0) + g(x) \quad (g \ll \Psi_0, g \sim f_0)$$

Решение системы уравнений (1.1)–(1.3), (2.1), (2.2) будем искать в виде рядов

$$(2.3) \quad \xi = \xi_0(x) + \sum_n \xi_{1n}^*(x) e^{i\omega_n t} + \xi_1^0(x) e^{i\omega_0 t}$$

Здесь  $\xi$  — вектор столбец с компонентами  $u, p, \rho$ ,  $\omega_n^*$  — собственные частоты, а  $\xi_{1n}^*$  — соответствующие им собственные функции, сумма в (2.3) берется по всем собственным частотам задачи.

Подстановка (2.3) в (1.1), (1.2) с учетом (2.1), (2.2) дает систему линейных уравнений следующего вида:

$$(2.4) \quad C \xi_1' + (D + i\omega E) \xi_1 = 0$$

$$(2.5) \quad A_1 \xi_1(0) + A_2 \xi_1(1) = f_0$$

решениями которой при  $\omega = \omega_n^*$  и  $f_0 = 0$  служат собственные функции  $\xi_1 = \xi_{1n}^*(x)$ , а при  $\omega = \omega_0$  и  $f_0 \neq 0$  — функция  $\xi_1 = \xi_1^0(x)$ .

В (2.4), (2.5)  $A_1, A_2, C, D, E$  — квадратные матрицы третьего порядка

$$(2.6) \quad A_1 = \{a_{ij}\} \quad (a_{3j} = 0); \quad A_2 = \{a_{ij}\} \quad (a_{1j} = a_{2j} = 0) \quad a_{ij} = \partial \Phi_{0j} / \partial \xi_i$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 & u_0 \\ u_0 & 1/\rho_0 & 0 \\ \gamma p_0 & u_0 & 0 \end{pmatrix}, \\ D = \begin{pmatrix} (\rho_0 H)' / H & 0 & (u_0 H)' / H \\ u_0 & 0 & u_0 u_0' / \rho_0 \\ (\rho_0' + \gamma p_0 H)' / H & \gamma (u_0 H)' / H & 0 \end{pmatrix}$$

Решение системы (2.4) не удается получить в общем виде при произвольных значениях  $\omega$ . Однако для некоторых частных случаев известны ее аналитические решения, описывающие распространение малых возмущений в канале постоянного сечения, а также в канале переменного сечения при  $\omega \gg 1$  и  $\omega \ll 1$ . В последних случаях решения получены в [2] в виде рядов по степеням малых величин  $1/\omega$  и  $\omega$  соответственно.

При этом функции  $\xi_1(x)$  для канала постоянного сечения и ее нулевое приближение по степеням  $1/\omega$  при  $\omega \gg 1$  для канала переменного сечения представляются в виде

$$(2.7) \quad \xi_1(x) = Q \exp[i\omega \lambda(x)], \quad \lambda(x) = \int_0^L \frac{L}{u} dx$$

$$L_1 = -\frac{M_0}{M_0+1}, L_2 = -\frac{M_0}{M_0-1}, L_3 = -1 \quad \left( M_0 = \frac{u_0}{a_0}, a_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right)$$

Здесь  $Q$  — квадратная матрица третьего порядка, компоненты которой зависят от параметров стационарного течения и от трех произвольных постоянных, образующих вектор  $\alpha$ , который определяется из граничных условий (2.5), переходящих в следующее соотношение:

$$(2.8) \quad N\alpha = f_0$$

Здесь  $N$  — матрица третьего порядка.

Таким образом, нетривиальное решение  $\xi_{1n}^*(x)$ , соответствующее  $f_0=0$ , может быть найдено с точностью до произвольной постоянной  $c_n$ , если выполнено условие

$$(2.9) \quad \det N(\omega_n^*) = 0$$

из которого находится спектр собственных частот  $\omega_n^*$ .

Величины  $c_n$  определяются из линеаризованных начальных условий (1.3):

$$(2.10) \quad B\xi_{1n}^* = g, \quad B = \{b_{ij}\}, \quad b_{ij} = \partial \Psi_{0j} / \partial \xi_i$$

Решение неоднородной задачи ( $f_0 \neq 0$ )  $\xi_{1n}^0(x)$  однозначно определяется в том случае, когда  $\det N(\omega_0) \neq 0$ . Можно показать, что

$$(2.11) \quad \det N(\omega) = k \exp [i\omega\lambda(1)]$$

где вектор  $k$  зависит от вида граничных условий и от параметров стационарного течения.

В дальнейшем будем рассматривать устойчивые течения в каналах, для которых выполнено условие  $\text{Im } \omega_n^* \geq 0$ . При этом в первой сумме (2.3) при  $t \rightarrow \infty$  остаются лишь члены, соответствующие  $\text{Im } \omega_n^* = 0$ , так как все остальные гармоники со временем затухают. При решении задач о распространении вынужденных колебаний ( $f_0 \neq 0$ )  $\omega_0$  является заданным действительным числом. Поэтому если уравнение (2.9) имеет действительные корни, совпадающие с  $\omega_0$ , то при этом в рассматриваемом канале может возникать явление резонанса, при котором происходит безграничный рост амплитуд возмущений газодинамических параметров. Наличие действительных решений (2.9) определяется величинами векторов  $k$  и  $\lambda$ . Таким образом, нахождение действительных решений (2.9) позволяет выделить классы граничных условий, для которых возможно наличие резонанса в канале, если  $\omega_0 = \omega_n^*$ .

Рассмотрим теперь класс граничных условий, характеризующихся либо отсутствием собственных частот задачи (2.4), либо условием  $\text{Im } \omega_n^* > 0$ . В этом случае также можно выделить класс граничных условий, для которых возможно существенное усиление или ослабление колебаний в канале. Речь идет о граничных условиях, для которых выполняется соотношение

$$(2.12) \quad [|\det N(\omega)|]_{\omega_0}' = 0$$

Если уравнение (2.12) имеет действительные корни  $\omega_n^{**}$  и они при наличии вынужденных колебаний совпадают с  $\omega_0$ , то в данном случае будет наблюдаться наибольшее ослабление ( $|\det N|$  имеет максимум) или наибольшее усиление ( $|\det N|$  имеет минимум) вынужденных колебаний в канале.

3. Для нахождения действительных решений уравнения (2.9) выпи-

шем его действительную и мнимую части:

$$(3.1) \quad k \cos [\omega \lambda(1)] = 0, \quad k \sin [\omega \lambda(1)] = 0$$

Отметим, что в общем случае система (3.1) действительных решений не имеет, так как содержит всего одно неизвестное  $\omega$ . Найдем условия, которые необходимо наложить на  $k$  и  $\lambda$ , чтобы система (3.1) имела действительные решения. Запишем (3.1) в виде

$$(3.2) \quad \begin{aligned} k_i \sin [(\lambda_j - \lambda_i) \omega] &= k_l \sin [(\lambda_l - \lambda_j) \omega] \\ k_j \sin [(\lambda_j - \lambda_i) \omega] &= k_l \sin [(\lambda_l - \lambda_i) \omega] \\ i \neq j \neq l, \quad i, j, l &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Разрешим (3.2) относительно  $k_i$  и  $k_j$ , считая  $k_l$  заданным. При этом могут представиться следующие случаи:

$$(3.3) \quad \sin [(\lambda_j - \lambda_i) \omega] = 0, \quad \sin [(\lambda_l - \lambda_j) \omega] = 0$$

$$(3.4) \quad \sin [(\lambda_j - \lambda_i) \omega] = 0, \quad k_l = 0$$

$$(3.5) \quad \sin [(\lambda_j - \lambda_i) \omega] \neq 0, \quad k_r \neq 0 \quad (r=1, 2, 3)$$

Решение (3.2) при условии (3.3) имеет вид

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \omega_n^* &= \pi q n \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \\ k_i + (-1)^{k \cdot n} k_i + (-1)^{m \cdot n} k_j &= 0 \end{aligned}$$

Здесь  $q$  — наименьшее общее кратное чисел  $\kappa_i = |\lambda_j - \lambda_i|^{-1}$  и  $\kappa_i = |\lambda_l - \lambda_j|^{-1}$ , т. е.  $q = k^* \kappa_i = m^* \kappa_j$ .

Условие (3.4) совместно с (3.2) дает

$$(3.7) \quad k_l = 0, \quad k_i = (-1)^{n+1} k_j, \quad \omega_n^* = \pi \kappa_i n$$

Можно показать, что условие (3.7) является необходимым и достаточным для того, чтобы  $\text{Im } \omega_n^* = 0$ , т. е. при этом течения газа устойчивы.

Если выполняется условие (3.5), то в общем виде не удастся найти решение системы (3.1). Однако если существует такое  $\omega^*$ , что соотношения (3.2) выполняются, то можно найти спектр собственных частот  $\omega_n^*$ . Эта задача эквивалентна задаче о нахождении наименьшего периода  $T$  функций  $\sin [(\lambda_l - \lambda_i) \omega]$ . Нетрудно показать, что при этом

$$(3.8) \quad T = 2\pi q$$

и спектр собственных частот можно записать в виде

$$(3.9) \quad \omega_n^* = \omega^* + 2\pi q n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Полученные соотношения (3.6), (3.7) и (3.9) совместно с (3.2) при известном  $\omega^*$  определяют классы граничных условий, при которых возможно существование собственных колебаний в канале для случаев (2.7), (2.11).

В качестве примера рассмотрим распространение малых возмущений в плоском канале ( $u^* = u_0 = \text{const}$ ) и укажем конкретные граничные условия, удовлетворяющие (3.6), (3.7).

Нетрудно показать, что если при  $x=0$  задана энтропия газа  $S$  и произвольная функция  $f(u, p, \rho)$ , а при  $x=1$  эта же функция:

$$x=0: f(u, p, \rho) = F_1(t), \quad S = F_2(t)$$

(3.10)

$$x=1: f(u, p, \rho) = F_3(t)$$

то спектр собственных частот определяется формулами (3.7), где  $n$  — четное.

Этому же спектру собственных частот соответствуют граничные условия:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} x=0: f(u, p) &= F_1(t), & \varphi(u, p, \rho) &= F_2(t) \\ x=1: f(u, p) &= F_3(t) \end{aligned}$$

( $f$  и  $\varphi$  — произвольные функции своих переменных).

Если при  $x=0$  заданы давление торможения  $p^*$  и температура торможения  $T^*$  газа или энтропия, а в сечении  $x=1$  — расход  $G$ :

$$(3.12) \quad \begin{aligned} x=0: p^* &= F_1(t), & T^* &= F_2(t) & (S &= F_2(t)) \\ x=1: G &= F_3(t) \end{aligned}$$

то собственные частоты определяются соотношением (3.7) ( $n$  — нечетное).

Укажем теперь класс граничных условий, характеризующийся наличием собственных частот, мнимая часть которых больше нуля, и удовлетворяющий условию (2.12):

$$(3.13) \quad \begin{aligned} x=0, & & p^* &= F_1(t), & T^* &= F_2(t) \\ x=1, & & p &= F_3(t) \end{aligned}$$

При этом

$$(3.14) \quad \det N = (1 + M_0) \exp i\omega\lambda_2 - (1 - M_0) \exp i\omega\lambda_1$$

и решением уравнения (2.12) служат числа

$$(3.15) \quad \omega_{n1}^{**} = nR, \quad \omega_{n2}^{**} = (n + 1/2)R, \quad R = \pi(1 - M_0^2)/M_0$$

при которых  $|\det N|$  принимает соответственно свое минимальное или максимальное значение.

Укажем также еще один часто используемый в работах (см., например, [3]) вид граничных условий, для которых уравнения (2.9), (2.12) вообще не имеют корней. На входе в канал задается энтропия и правый инвариант Римана  $I^+$ , а на выходе — левый инвариант Римана  $I^-$ :

$$(3.16) \quad \begin{aligned} x=0: I^+ &= u + 2a/(\gamma - 1) = F_1(t), & S &= F_2(t) \\ x=1: I^- &= u - 2a/(\gamma - 1) = F_3(t) & (a^2 &= \gamma p/\rho) \end{aligned}$$

При этом  $\det N = 4\gamma \exp(i\omega\lambda_1)$ .

4. Рассмотрим вынужденные колебания в канале постоянного сечения с заданной частотой  $\omega_0$ , когда возмущающие факторы (вектор  $f_0$ ) имеют вид

$$(4.1) \quad f_0 = (f_1^\circ \exp i\varphi_1, f_2^\circ \exp i\varphi_2, f_3^\circ \exp i\varphi_3)$$

где  $\varphi$  — произвольный вектор, определяющий сдвиг по фазе в колебаниях граничных условий.

В дальнейшем будем предполагать, что начальные распределения газодинамических параметров таковы, что  $g(x) = 0$  и вследствие этого произвольные постоянные  $c_n$  также обращаются в нуль.

В качестве примера изучим течение газа с граничными условиями сле-

дующего вида:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} x=0, & \quad p_1=A \exp i\omega_0 t, \quad T_1^*=0 \\ x=1, & \quad p_1=B \exp i(\omega_0 t + \varphi_3) \end{aligned}$$

которые принадлежат классу (3.11), т. е. имеются собственные частоты

$$(4.3) \quad \omega_n^* = 2\pi n(1-M_0)/M_0$$

При этом амплитуда пульсаций давления в канале выражается формулой

$$(4.4) \quad \begin{aligned} A_p^2 &= \\ &= \frac{A^2 \sin^2 a\pi(1-x) + B^2 \sin^2 a\pi x + 2AB \sin a\pi x \sin a\pi(1-x)r}{\sin^2 a\pi} \\ a &= \omega_0/\omega_1^*, \quad r = \cos(\varphi_3 + \pi a M_0) \end{aligned}$$

Исследуем распределение по координате  $x$  амплитуды давления (4.4) вблизи собственных частот (т. е. при  $\omega_0 \rightarrow n\omega_1^*$ ). Можно показать, что с точностью до величин более высокого порядка малости по малому параметру  $\alpha = a - n$

$$(4.5) \quad \begin{aligned} A_p^2 &= \frac{\sin^2 \pi n x}{(\pi \alpha)^2} z_1 + \frac{\sin \pi x \cos \pi n x}{\pi \alpha} z_2(x) + z_3(x) + \dots \\ z_1 &= A^2 + B^2 + (-1)^{n+1} 2ABr, \quad z_2 = A^2(1-x)^2 + B^2 x^2 + \\ &+ (-1)^{n+i+1} 2ABr x(1-x) \end{aligned}$$

Как следует из (4.5), при  $\alpha \rightarrow 0$  значение амплитуды пульсаций давления  $A_p$  в точках  $x = p/n$  ( $p=0, 1, \dots$ ) определяется величиной последнего слагаемого в (4.5), а при  $x \neq p/n$  — значением первого. Таким образом, при  $x = p/n$

$$(4.6) \quad A_p^2 = A^2(1-p/n)^2 + B^2(p/n)^2 + (-1)^n 2AB(1-p/n)p/n$$

Во всех остальных точках амплитуды возмущений давления неограниченно возрастают при  $\alpha \rightarrow 0$ . Сдвиг по фазе  $\varphi_3$  между колебаниями давления в начальном и конечном сечениях канала может существенно изменить качественную картину колебаний. Так, например, если

$$(4.7) \quad \varphi_3 = \pi(k - a/M_0), \quad A = B \quad (k=0, \pm 1, \dots)$$

то

$$(4.8) \quad A_p = A \left| \frac{\cos \pi a(x - 1/2)}{\cos(\pi a/2)} \right|, \quad k=2p$$

$$(4.9) \quad A_p = A \left| \frac{\sin \pi a(1/2 - x)}{\sin(\pi a/2)} \right|, \quad k=2p+1$$

Как следует из (4.8), (4.9), величина  $A_p$  остается конечной в случае совпадения частот собственных и вынужденных колебаний, если  $n$  и  $k$  одновременно четные или нечетные. Таким образом, при выполнении (4.7) резонанс в канале имеет место не при всех случаях совпадения частот собственных и вынужденных колебаний, а только если  $n$  и  $k$  не являются одновременно четными или нечетными.

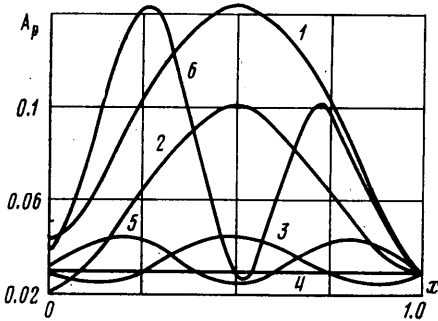
Рассмотрим колебания в канале с граничными условиями (3.13), когда

$$(4.10) \quad \mathbf{f}^0 = (A, B, C), \quad \Phi = (0, 0, 0)$$

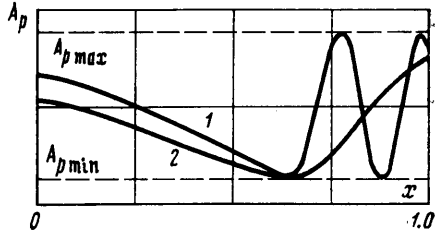
Амплитуда пульсаций давления для (4.10) представляется в виде

$$\begin{aligned}
 A_p^2 = & [2\alpha^2 \sin \pi b (1-x) + C^2(1+M_0^2) - C^2(1-M_0^2) \cos 2\pi b x + \\
 (4.11) \quad & + 4\alpha C \sin \pi b (1-x) (\sin \pi b \cos \pi b M_0 - \\
 & - M_0 \sin \pi b M_0 \cos \pi b) ] / [(1+M_0) - (1-M_0^2) \cos 2\pi b] \\
 \alpha = & \gamma M_0^2 B / 2 + A, \quad b = \omega_0 / \omega_{1}^{**}
 \end{aligned}$$

При частотах  $\omega_0 = n\omega_{1}^{**}$  знаменатель в (4.11) имеет минимум, и в этом случае должно наблюдаться наибольшее увеличение амплитуд колебаний газодинамических параметров, а для  $\omega_0 = n\omega_{n2}^{**}$  — уменьшение.



Фиг. 1



Фиг. 2

Распределения амплитуд давления (4.11) по длине канала, приведенные на фиг. 1 ( $M_0=0.33$ ;  $\gamma=1.33$ ), иллюстрируют отмеченные выше особенности колебательного процесса. Кривые 1—6 соответствуют значениям отношения  $\omega_0/\omega_{1}^{**}=1$ ; 1.1; 1.3; 1.5; 1.7; 2. При этом наибольшее увеличение амплитуды составляет  $A_p/C \sim 5$  ( $\omega_0/\omega_{1}^{**}=1$ ; 2);  $A=C=0.03$ ;  $B=0$ .

Для случая граничных условий (3.16), когда

$$(4.12) \quad f^0 = (A_+, 0, A_-), \quad \varphi = 0$$

амплитуда давления имеет вид

$$\begin{aligned}
 (4.13) \quad A_p^2 = & [\alpha_-^2 + \alpha_+^2 - 2\alpha_- \alpha_+ \cos \beta] / 2 \\
 \alpha_{\pm} = & \frac{A_{\pm}}{a_0}, \quad \beta = \omega_0 \frac{M_0}{1-M_0} \left( \frac{2x}{M_0+1} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

При этом максимальное  $A_{p \max} = |\alpha_+ + \alpha_-|/2$  и минимальное  $A_{p \min} = |\alpha_+ - \alpha_-|/2$  значения амплитуды достигаются при  $x = x^*$

$$(4.14) \quad x^* = \left( \pi n \frac{1-M_0}{2} \frac{1}{\omega_0} + 1 \right) \frac{M_0+1}{2}$$

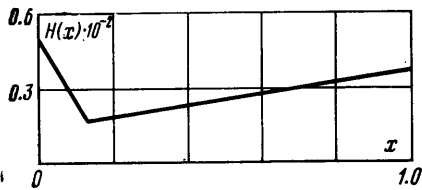
Координата  $x^*$  при  $n=2p$  определяет положения минимумов амплитуды, а при  $n=2p+1$  — максимумов. Число экстремумов функции (4.13) ограничено сверху ( $n \leq k$ ), так как  $x^* \leq 1$ . Первый экстремум (4.14) — минимум ( $n=0$ ) — всегда существует и расположен в точке  $x = (M_0+1)/2$ , а последующие чередуются с равным интервалом  $\Delta x = \pi(1-M_0)/\omega_0 M_0$ .

Качественная картина распределения амплитуды давления для различных частот  $\omega_0$  представлена на фиг. 2. Кривые 1, 2 соответствуют частотам  $\omega_{01} > \omega_{02}$ .

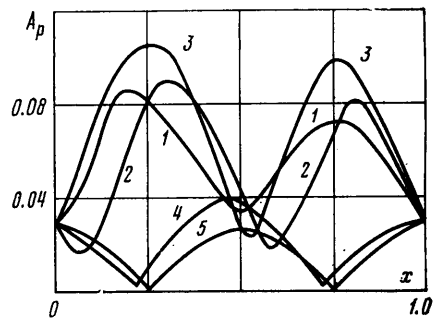
5. Рассмотрим нестационарные одномерные течения при конечных амплитудах колебаний параметров на границах канала, форма которого

представлена на фиг. 3. Учитывая не слишком существенное изменение поперечного сечения канала (фиг. 3), можно сравнить полученные численные результаты с результатами аналитического решения при тех же граничных условиях для канала постоянного сечения, в котором сохраняется тот же расход газа, энтропия и энтальпия торможения. В дальнейшем всюду  $M_0=0.33$ ;  $\gamma=1.33$ .

Численные решения системы уравнений (1.1), (1.2) проводились с помощью программы расчета, составленной на основе метода С. К. Годунова [4, 5] и предназначенной для расчета одномерных нестационарных



Фиг. 3



Фиг. 4

течений с произвольными граничными условиями. Расчеты проводились в эйлеровых координатах с неподвижной расчетной сеткой, границы которой совпадали с сечением канала  $x=1$  и  $x=0$ . Разбиение расчетной области на ячейки было таковым, чтобы на длине генерируемого возмущения укладывалось 40—50 расчетных ячеек [3].

Проведем исследование колебательного процесса в канале, на границах которого задаются следующие условия:

$$(5.1) \quad x=0, \quad p=p_0(0) [1+Ae^{i\omega_0 t}], \quad T^*=T_0^*$$

$$x=1, \quad p=p_0(1) [1+Be^{i(\omega_0 t + \varphi_3)}]$$

Здесь  $p_0(0)$  и  $p_0(1)$  — соответственно значение давления газа в стационарном течении при  $x=0$  и  $x=1$ .

Напомним, что для граничных условий (5.1) в случае канала постоянного сечения из линейного анализа (4.2), (4.3) было получено, что при  $\omega_0 = n\omega_0^*$  наблюдается резонансное увеличение амплитуд колебаний газодинамических параметров.

Результаты расчетов, выполненных при  $A=0.03$ ,  $B=0.03$  и  $\varphi_3=0$  для частот  $\omega_0 \approx \omega_2^*$ , приведены на фиг. 4, где кривым 1, 2, 3 соответствуют значения отношения  $\omega_0/\omega_1^* = 1.85, 2, 1.94$ .

Как следует из приведенных графиков распределения амплитуды возмущения давления  $A_p(x)$ , вычисленной по формуле

$$(5.2) \quad A_p(x) = \frac{[p(x, t)_{\max} - p(x, t)_{\min}]}{2p_0(x)}$$

в канале происходит усиление колебаний, характеризующееся увеличением амплитуды пульсаций давления.

На фиг. 4 представлены также зависимости амплитуды пульсаций давления, полученные с помощью расчетов (кривая 4) при  $A=0.03$ ,  $B=0.03$  и  $\varphi_3=4.15$  (данное значение  $\varphi_3$  удовлетворяет (4.7) при  $k=2$ ) и вычисленные по формуле (4.8) (кривая 5) для  $\omega_0 = \omega_2^*$ . Приведенные графики иллюстрируют хорошее качественное и количественное совпадение расчет-



ных данных с результатами аналитического исследования для канала постоянного сечения и указывают на существенную перестройку течения по сравнению со случаем  $\varphi_3=0$ .

Рассмотрим нестационарные течения в канале (фиг. 3) с граничными условиями:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} x=0, \quad p^* &= p_0^* (1 + A \exp i\omega_0 t), \quad T^* = T_0^* \\ x=1, \quad p &= p_0 (1) (1 + B \exp i\omega_0 t) \end{aligned}$$

для которых результатом линейного анализа в случае канала постоянного

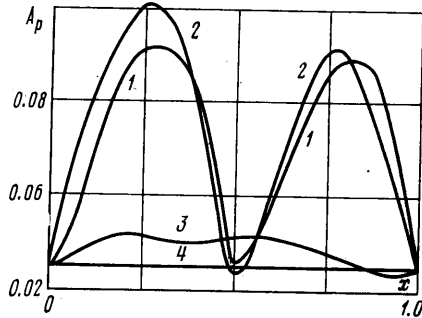


Рис. 5

сечения является наличие спектра характерных частот  $\omega_n^{**}$  (3.15), соответствующих усилению ( $\omega_0 = \omega_{n1}^{**}$ ) или ослаблению ( $\omega_0 = \omega_{n2}^{**}$ ) колебаний.

На фиг. 5 приведены результаты численных расчетов при  $A=0.03$ ,  $B=0.03$ . Зависимости амплитуды пульсаций давления  $A_p(x)$ , полученные для случая совпадения частоты вынужденных колебаний с частотой  $\omega_{21}^{**}$  с помощью численных расчетов (кривая 1) и аналитически по формуле (4.11) (кривая 2), демонстрируют усиление колебаний в канале ( $(A_p(x))_{\max} \approx 4-5$ ) и достаточно хорошо совпадают.

Распределение амплитуды возмущения давления для случая  $\omega_0 = \omega_{12}^{**}$  показывает, что при этом, как это и следует из линейного анализа, происходит изменение картины колебаний в канале, сопровождающееся значительным уменьшением амплитуды колебаний. Численные расчеты (кривая 3) соответствуют данным аналитического исследования (кривая 4).

В заключение авторы благодарят А. Б. Ватажина за полезные обсуждения.

Поступила 9 IV 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Г., Фридрих К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
2. Слободкина Ф. А. К устойчивости дозвуковых газодинамических течений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 1.
3. Крайко А. Н., Осипов А. А. Исследование отражения возмущений от дозвуковой части сопла Лавала. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 1.
4. Годунов С. К., Жуков А. П., Семедьяев К. А. Численные методы решения одномерных неустановившихся задач газовой динамики. Всес. съезд по теорет. и прикл. мех. Москва, 1960. Аннот. докл. М., 1960.
5. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М., «Наука», 1976.