

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА В ТОНКОМ ТРЕХМЕРНОМ УДАРНОМ СЛОЕ

А. А. МАРКОВ

(Москва)

Теория высших приближений по параметру $\varepsilon (\varepsilon = 1/\sqrt{\text{Re}})$ в пограничном слое, не предполагающая предельного перехода $\gamma \rightarrow 1$, развивалась в работах Ван-Дайка и других авторов, см. обзор [1], где отмечены также ограничения этой теории в задачах с сильным взаимодействием на удлиненных телах и в ряде случаев, когда внешнее невязкое течение имеет нерегулярности на поверхности тела. Для анализа поправок к теории Прандтля был применен метод сращиваемых асимптотических разложений. Ряд результатов по теории высших приближений в ударном слое и обоснование асимптотических разложений были получены методом погранслоевых поправок в работах [2-5].

Эффекты сильного взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком уже в первом приближении требуют изменить классическую концепцию Прандтля. Асимптотическая теория учета таких эффектов в приближении тонкого слоя основана на предельном переходе $\gamma \rightarrow 1$.

Для стационарных двумерных течений теории тонкого слоя в сравнении с радиусом кривизны тела посвящены работы [6-9].

В ряде работ изучалось сильное взаимодействие на тонких телах и влияние вдува на ударный слой (см., например, [10, 11]). Там же есть ссылки на другие работы по этим вопросам). Расчет вязкого ударного слоя в лобовой части и на боковой поверхности затупленного конуса проводился в [12].

В работе [13] численными расчетами проанализирована точность различных упрощенных уравнений двумерного стационарного ударного слоя, которые получаются сохранением во всей области течения величин порядка $O(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, γ — фиксировано, а также уточненных уравнений, включающих члены порядка $O(\varepsilon)$, где $\varepsilon = \text{Re}^{-1/2}$. Численные результаты сопоставлены с расчетом полных уравнений Навье — Стокса [14]. Асимптотическое обоснование уравнений с погрешностью $O(\varepsilon)$ и $O(\varepsilon^2)$ проводилось в [3, 4]. Точность уравнений тонкого ударного слоя на основе численного расчета параметров в окрестности критической точки сферы оценивалась в [15, 16].

В настоящей работе проводится асимптотический анализ трехмерного ударного слоя около затупленной поверхности достаточно гладкого тела. Получены и обоснованы уравнения первого приближения в различных случаях предельного перехода $\gamma \rightarrow 1$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $(\gamma - 1)^{-1} M_\infty^{-2} \rightarrow 0$. Произведены упрощения этих уравнений для течения около критической точки тела двойкой кривизны и около затупленной передней кромки стреловидного крыла, представлены некоторые результаты расчетов, сопоставленные с результатами работ [17, 18] в случае осесимметричного течения.

1. Приведем известные оценки толщин ударного слоя Δ и ударной волны Δ_s , следующие из результатов работ [8, 19] в случае малости параметров α , δ , ε . Обозначим

$$\text{Re}_0 = V_\infty' r_0' \rho_\infty' / \mu'(T_0'), \quad \text{Re}_\infty = V_\infty' r_0' \rho_\infty' / \mu'(T_\infty')$$

$$\text{Re}_s = V_\infty' r_0' \rho_s' / \mu'(T_s')$$

$$\alpha^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad \delta = \frac{1}{(\gamma - 1) M_\infty^2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_0}}$$

(штрихом отмечены размерные величины). Индексы 0, ∞ , s относятся к величинам в точке торможения, в набегающем потоке и за прямым скачком. Пусть $\mu' = \mu(T')$. Из следующих соотношений находим (см., на-

пример, [19]):

$$(1.1) \quad k = \frac{\rho_{\infty}'}{\rho_s'} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_{\infty}^2} = \alpha^2(1+\delta)$$

$$\frac{T_s'}{T_0'} = \frac{(\gamma-1)M_{\infty}^2}{2}(1-k^2+\delta) = \frac{(1+\delta-k^2)}{\delta}$$

$$(1.2) \quad \frac{T_0'}{T_s'} = \frac{1+\delta}{\delta}, \quad Re_{\infty} \sim Re_{\infty} \delta^* k^{-1}, \quad Re_0 \sim k Re_s$$

Зона ударной волны (см. [8]) имеет трехслойную структуру $\Delta_s = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$ с толщинами слоев, считая от набегающего потока, $\Delta_1 = O(Re_{\infty}^{-1})$, $\Delta_2 = O(Re_0^{-1})$, $\Delta_3 = O(Re_s^{-1})$. Учитывая (1.2), получаем

$$\Delta_s = O(Re_{\infty}^{-1} + Re_0^{-1} + Re_s^{-1}) = O(Re_0^{-1}) = O(\varepsilon^2)$$

Толщина Δ тонкого невязкого ударного слоя около затупленной обтекаемой поверхности оценивалась в [9, 19]: $O(k) \leq \Delta \leq O(\sqrt{k})$.

Для анализа течения в тонком вязком ударном слое воспользуемся уравнениями Навье — Стокса в системе (q^1, q^2, q^3) криволинейных координат, связанной с поверхностью тела, предполагая, что координатные линии q^3 ортогональны поверхности (см., например, [20]):

$$(1.3) \quad \frac{\partial \rho u^j \sqrt{g}}{\partial q^j} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial q^j} [(\rho u^i u^j + p g^{ij}) \sqrt{g}] - \varepsilon^2 \frac{\partial \sqrt{g} \tau^{ij}}{\partial q^j} = \Phi^i$$

$$\frac{\partial}{\partial q^j} [\sqrt{g} (\rho E u^j + p u^j - \varepsilon^2 (R^j + Q^j))] = 0$$

$$p = \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho h, \quad \mu = h^{\omega}, \quad T = \frac{h(V_{\infty}')^2}{h_0'} = h \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma-1)M_{\infty}^2} \right)$$

$$(1.4) \quad \tau^{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sigma - \frac{2}{3} \mu \right) g^{ij} \frac{\partial u^s \sqrt{g}}{\partial q^s} + \mu \left\{ g^{is} \frac{\partial u^j}{\partial q^s} + g^{sj} \frac{\partial u^i}{\partial q^s} + u^s (g^{ij} \Gamma_{sl}^i + g^{li} \Gamma_{sl}^j) \right\}$$

$$(1.5) \quad \Phi^i = \sqrt{g} \Gamma_{mj}^i (\rho u^m u^j + p g^{mj} - \varepsilon^2 \tau^{mj}), \quad Q^j = \mu g^{ij} \frac{\partial h}{\partial q^i}$$

$$(1.6) \quad R^j = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sigma - \frac{2}{3} \mu \right) u^j \frac{\partial u^s \sqrt{g}}{\partial q^s} + \mu \left\{ g_{im} g^{js} u^i \frac{\partial u^m}{\partial q^s} + u^s \frac{\partial u^j}{\partial q^s} + (g^{js} g_{im} \Gamma_{sk}^m + \Gamma_{lk}^j) u^l u^k \right\}$$

$$(1.7) \quad \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^m} \right)$$

$$(1.8) \quad g_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial q^i} \frac{\partial x^m}{\partial q^j}; \quad g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i, \quad g = \det \|g_{ij}\|$$

В формулах (1.3) — (1.6) u^i — контравариантные компоненты скорости в криволинейной системе координат q^1, q^2, q^3 ; $x^i(q^1, q^2, q^3)$ — формулы связи криволинейных координат с декартовыми координатами (x^1, x^2, x^3) .

По повторяющимся индексам суммирование от 1 до 3. Переменные в (1.3)–(1.6) обезразмерены по формулам

$$x' = r_0' x^i, \quad \rho' = \rho_\infty' \rho, \quad \mu' = \mu_0' \mu, \quad \sigma' = \mu_0' \sigma \\ p = \rho_\infty' V_\infty'^2 p, \quad h' = V_\infty'^2 h, \quad T' = T_0' T$$

Здесь штрих относится к размерным величинам.

Компоненты метрических тензоров g^{ij} , g_{ij} и символов Кристоффеля Γ_{jk}^i в рассматриваемой системе координат удовлетворяют соотношениям

$$(1.9) \quad g_{3k} = g^{3k} = 0, \quad \Gamma_{33}^k = 0, \quad \Gamma_{3l}^k = -\frac{1}{2} g^{km} \partial g_{ml} / \partial q^3$$

$$\Gamma_{kl}^3 = -\frac{1}{2} \partial g_{kl} / \partial q^3, \quad g_{33} = g^{33} = 1, \quad m, k, l = 1, 2$$

На поверхности тела ($q^3 = 0$) и в набегающем потоке ($q^3 = +\infty$) ставятся условия (ср. [15])

$$(1.10) \quad q^3 = 0, \quad u^i = \varepsilon_0 \frac{\mu}{\rho \sqrt{T}} \frac{\partial u^i}{\partial q^3}, \quad i = 1, 2, \quad u^3 = 0, \quad h = h_\infty + \varepsilon_1 \frac{\mu}{\rho \sqrt{T}} \frac{\partial h}{\partial q^3}$$

$$(1.11) \quad \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{\pi \gamma}{2} \frac{(2 - \theta_0)}{\theta_0} \frac{M_\infty}{\text{Re}_0}} \sqrt{\frac{T_\infty}{T_0}} = O\left(\frac{\varepsilon^2}{\alpha}\right)$$

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{\pi \gamma}{2} \frac{(2 - \theta_1)}{\theta_1} \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)} \frac{M_\infty}{\text{Pr Re}_0}} \sqrt{\frac{T_\infty}{T_0}} = O\left(\frac{\varepsilon^2}{\alpha}\right)$$

$$(1.12) \quad q^3 = +\infty, \quad i = 1, 2, 3, \quad u^i = u_\infty^i, \quad \rho = 1, \quad h = \frac{1}{(\gamma - 1) M_\infty^2} = \frac{\delta}{2}$$

Здесь θ_0 — коэффициент тепловой аккомодации; θ_1 — коэффициент отражения.

2. В зависимости от соотношения между малыми параметрами α , ε , δ , которые входят в стационарную задачу (1.3)–(1.6), (1.10), (1.12) ударный слой является либо полностью вязким, либо содержит невязкую часть и вязкий подслой.

Рассмотрим представляющие физический интерес режимы течения в трехмерном ударном слое при $\alpha \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$. Отдельные случаи для двухмерного ударного слоя рассматривались в [8, 9]. Ограничимся случаем $\Delta = O(\alpha^2)$.

1. Режим $\varepsilon^2/\alpha^2 = M = O(1)$. Деформируем координату q^3 , $q^3 = \xi \alpha^2$. Величины в ударном слое ищем в виде следующих разложений по параметру α :

$$(2.1) \quad u^3 = \alpha^2 (v_0(q^1, q^2, \xi) + o(1)), \quad u^i = u_0^i + o(1), \quad i = 1, 2$$

$$\rho = \alpha^{-2} (\rho_0(q^1, q^2, \xi) + o(1)), \quad h = h_0 + o(1), \quad p = p_0 + o(1)$$

Уравнения для главных членов в разложениях (2.1) имеют следующий вид (индекс ноль опускаем): по k, l, m суммирование от 1 до 2; $i = 1, 2$:

$$\frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\partial \rho u^i \sqrt{g}}{\partial q^i} + \frac{\partial \rho v \sqrt{g}}{\partial \xi} \right) = 0$$

(2.2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \rho u^k u^m \frac{\partial g_{km}}{\partial q^3} \right) &= 0 \\ \frac{1}{\alpha^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial q^i} (\rho u^i u^j \bar{v} g) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\left(\rho u^j v - M \mu \frac{\partial u^i}{\partial \xi} \right) \bar{v} g \right) + \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_{km}^i \rho u^k u^m \bar{v} g \right\} = 0 \\ \frac{1}{\alpha^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial q^i} (\rho E u^i \bar{v} g) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\left(\rho v E - M P_2^{-1} \mu \frac{\partial h}{\partial \tau} - M \mu g_{km} u^k \frac{\partial u^m}{\partial \tau} \right) \bar{v} g \right) \right\} &= 0 \end{aligned}$$

Для этого режима весь ударный слой описывается вязкими уравнениями (ср. [8, 9, 11]). На теле при этом в первом приближении ставятся условия:

$$(2.3) \quad \xi = 0, \quad u^1 = u^2 = v = 0, \quad h = h_w$$

Эффекты скольжения проявляются в следующем приближении, так как

$$(2.4) \quad \varepsilon_0 \frac{\mu}{\rho \bar{v} T} \frac{\partial u^i}{\partial q^3} = O(\varepsilon_0) = O(M\alpha), \quad \varepsilon_1 \frac{\mu}{\rho \bar{v} T} \frac{\partial h}{\partial q^3} = O(\varepsilon_1) = O(M\alpha)$$

Соотношения на ударной волне см. ниже (2.16).

2. Промежуточные режимы $M=O(\alpha^s)$, $0 < s \leq 3$. Для семейства режимов $\varepsilon^2/\alpha^2 = N\alpha^s$, s — заданный параметр, ударный слой толщины $O(\alpha^2)$ подразделяется на невязкую часть и вязкий подслой около тела толщины $O(\alpha^{2+0.5(s-k)})$, где $0 \leq k \leq 1$ — параметр, определяемый в результате срачивания внешнего (невязкого) и внутреннего решений. На внешней границе ударного слоя в первом приближении ставятся соотношения Ренкина — Гюгонно, на теле — соотношения (2.3). Невязкая часть ударного слоя описывается уравнениями (2.2), если в них положить $M=0$.

Покажем, что вблизи стенки, т. е. при $\xi \rightarrow 0$, решение невязких уравнений тонкого ударного слоя имеет асимптотику вида

$$(2.5) \quad \begin{aligned} u^i &= \xi (u_*^i(q^1, q^2) + o(1)), \quad i=1, 2, \quad u^3 = \xi^2 (v_* + o(1)) \\ \rho &= \rho_*(q^1, q^2) + o(1), \quad h = h_* + o(1), \quad p = p_* + o(1) \end{aligned}$$

Заметим, что в невязких уравнениях тонкого ударного слоя в первом приближении отсутствуют градиенты давления в уравнениях для u^i , u^2 , что приводит к асимптотике (2.5) для касательных компонент скорости.

Рассмотрим сначала решение уравнений невязкого тонкого ударного слоя около критической точки тела с двумя плоскостями симметрии. Обозначим через K отношение главных кривизн тела в точке торможения, u , w , v — составляющие скорости вдоль линий кривизны и по нормали к телу. Решение можно получить в замкнутой форме (ср. [19]) для $0 < K < \infty$:

$$\begin{aligned} p &= p_s, \quad \rho = \rho_s, \quad h = h_s, \quad v = \frac{K v_s}{(1-K)^2} e^{-\xi(1-K)/v_s} \left[e^{\frac{\xi(1-K)}{v_s}} - 1 \right]^2 \\ u &= \frac{1}{2} (\varphi(\xi) + f(\xi)), \quad w = \frac{1}{2} (\varphi(\xi) - f(\xi)), \quad \Delta = \frac{v_s \ln K}{1-K} \\ f(\xi) &= \left[\frac{(1-K)^2}{v_s^2} v^2 + \frac{4K}{v_s} v \right]^{1/2}, \quad \varphi(\xi) = \frac{1-K}{v_s} v(\xi) \end{aligned}$$

(здесь ξ — расстояние по нормали к телу, индекс s соответствует значениям на ударной волне).

Если $K=1$, то $v=-\xi^2/v_*$, $u=w=\xi/v_*$, $\Delta=|v_*|$.

Однако если $K \rightarrow 0$, то $\Delta \rightarrow \infty$ и нарушается основное предположение, что ударный слой тонкий. (Это обстоятельство отмечено также в [19].) Будем предполагать, что отношение главных кривизн тела строго положительно.

Запишем уравнения для u^i , $i=1, 2$, в виде

$$(2.6) \quad u^j \frac{\partial u^i}{\partial q^j} + u^3 \frac{\partial u^i}{\partial \xi} + \Gamma_{jk}^i u^j u^k = 0, \quad j, k=1, 2$$

так как $u^3 \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow 0$, то

$$u^j \frac{\partial u^i}{\partial q^j} + \Gamma_{jk}^i u^j u^k = 0$$

Введем систему координат q^1, q^2 так, что линия q^1 является линией тока на поверхности тела, поэтому $u^2=0$ при $\xi=0$, но тогда, согласно (2.6)

$$u^1 \partial u^1 / \partial q^1 + \Gamma_{11}^1 (u^1)^2 = 0 \quad (\xi=0)$$

и так как $u^1=0$ в точке торможения, то $u^1=0$ на любой линии тока на теле, проходящей через точку торможения. Таким образом, справедливость (2.5) установлена во всех точках тела в тонком ударном слое, в которые приходят линии тока из точки торможения.

В вязком подслое для искоемых функций строим следующие асимптотические разложения:

$$(2.7) \quad u^i = \alpha^k (u_0^i(q^1, q^2, \xi_2) + o(1)), \quad i=1, 2, \quad u^3 = \alpha^{0.5(s+k)+2} (v_0 + o(1))$$

$$\rho = \alpha^{-2} (\rho_0(q^1, q^2, \xi_2) + o(1)), \quad h = h_0 + o(1), \quad p = p_0 + o(1)$$

$$(2.8) \quad \xi_2 = q^3 / \alpha^{0.5(s-k)+2}$$

Уравнения для главных членов в разложениях (2.7) имеют следующий вид (по l, m, n суммирование от 1 до 2):

$$(2.9) \quad \alpha^{k-2} \left(\frac{\partial \rho u^1 \sqrt{g}}{\partial q^1} + \frac{\partial \rho v \sqrt{g}}{\partial \xi_2} \right) = 0, \quad \alpha^{-2-0.5(s-k)} \frac{\partial p}{\partial \xi_2} = 0$$

$$\alpha^{2k-2} \left\{ \frac{\partial}{\partial q^1} (\rho u^i u^l + g^{il} p \alpha^{2-2k}) \sqrt{g} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\left(\rho u^i v - N \mu \frac{\partial u^i}{\partial \xi_2} \right) \sqrt{g} \right) + \Gamma_{mn}^i (\rho u^m u^n + g^{mn} p) \sqrt{g} \right\} = 0$$

$$\alpha^{k-2} \left\{ \frac{\partial}{\partial q^1} (\rho u^l E \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\left(\rho v E - \frac{N \mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial \xi_2} - N \mu u^m g_{mn} \frac{\partial u^n}{\partial \xi_2} \right) \sqrt{g} \right) \right\} = 0$$

Здесь $N = \varepsilon^2 / \alpha^{2+s}$. В уравнениях (2.9) предполагаются ограничения

$$(2.10) \quad s-k \geq 0, \quad 0 \leq k \leq 1$$

справедливость которых устанавливается при сращивании. Для сращивания внутреннего и внешнего решений введем промежуточную переменную $\xi = \xi / \alpha^{k_1}$, тогда $\xi_2 = \xi \alpha^{k_1-0.5(s-k)}$, потребуем $0 < k_1 < 0.5(s-k)$. Пусть $G(q^1, q^2, \xi)$, $F(q^1, q^2, \xi_2)$ — любая из функций внешнего и внутреннего решений соответственно. Согласно принципу сопряжения (см. [21]), потребуем

$$c_1 G(q^1, q^2, \alpha^{k_1} \xi) \leq F(q^1, q^2, \alpha^{k_1-0.5(s-k)} \xi) \leq c_2 G(q^1, q^2, \alpha^{k_1} \xi),$$

$$\alpha \rightarrow 0, \quad c_1, c_2 - \text{const}$$

Согласно асимптотике (2.5) внешнего решения, имеем

$$(2.11) \quad \begin{aligned} u^i &= O(\xi) = O(\xi \alpha^{k_i}) = O(\alpha^{k_i}), \quad i=1, 2 \\ v &= O(\xi^2) = O(\alpha^{2k_1}), \quad \rho = O(\alpha^{-2}), \quad h = O(1), \quad p = O(1) \end{aligned}$$

Из формул (2.7), (2.8) следует асимптотика внутреннего решения при $\alpha \rightarrow 0$, ξ — фиксировано:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} u^i &= O(\alpha^k), \quad i=1, 2, \quad v = \alpha^{-2} u^3 = O(\alpha^{0.5(s+k)}) \\ \rho &= O(\alpha^{-2}), \quad h = O(1), \quad p = O(1) \end{aligned}$$

Из формул (2.11), (2.12), согласно принципу сопряжения, заключаем, что $k_1 = k$, $0.5(s+k) = 2k_1$, т. е. $k = s/3$, что согласуется с (2.10), так как для рассматриваемого семейства режимов $s \leq 3$.

Таким образом, для семейства режимов $\varepsilon^2 = O(\alpha^{2+s})$ вязкий подслой имеет толщину $O(\alpha^{2+s/3})$, переменные в этом подслое имеют асимптотику (2.7), причем $k = s/3$ и внутреннее решение сопрягается с невязким внешним решением.

3. Режим $D \rightarrow 0$; $D = \varepsilon^2/\alpha^5$. Для данного предельного перехода толщина вязкого подслоя имеет порядок $\varepsilon \sqrt{\alpha}$ (ср. [8]) и является малой величиной по сравнению с толщиной вязкого подслоя для режимов, рассмотренных выше. Искомые величины строим в виде следующих разложений:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} u^i &= \alpha(u_0^i(q^1, q^2, \xi_3) + o(1)), \quad i=1, 2, \quad u^3 = \varepsilon \alpha \bar{v} \alpha(v_0 + o(1)) \\ \rho &= \alpha^{-2}(\rho_0(q^1, q^2, \xi_3) + o(1)), \quad p = p_0 + o(1), \quad h = h_0 + o(1) \\ \xi_3 &= q^3 \alpha^{-1/2} \varepsilon^{-1} \end{aligned}$$

Для главных членов разложений (2.13) получается следующая система уравнений (по повторяющимся индексам l, m, n суммирование от 1 до 2, индекс ноль опускаем):

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial q^i} (\rho u^i \bar{v} g) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (\rho v \bar{v} g) \right) &= 0, \quad \frac{1}{\alpha \sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial p}{\partial \xi_3} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial q^i} ((\rho u^i u^i + p g^{ii}) \bar{v} g) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\left(\rho u^i v - \mu \frac{\partial u^i}{\partial \xi_3} \right) \bar{v} g \right) &+ \\ + \Gamma_{mn}^i (\rho u^m u^n + p g^{mn}) \bar{v} g &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial q^i} (\rho u^i E \bar{v} g) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left\{ \left(\rho v E - \mu N \text{Pr}^{-1} \frac{\partial h}{\partial \xi_3} - \mu N u^m g_{mn} \frac{\partial u^n}{\partial \xi_3} \right) \bar{v} g \right\} &= 0 \end{aligned}$$

Сопряжение внутреннего (2.13) с внешним невязким решением, в случае $\varepsilon^2/\alpha^5 \sim \alpha^r$, $r > 0$ проводится посредством введения переходной области с локальной координатой $\xi_0 = \xi/\alpha$, нормальная и касательная компоненты скорости в которой порядка α^4 и α — соответственно, а ρ , p , h такого же порядка, как в (2.13). Это переходное решение удовлетворяет в первом приближении уравнениям невязкого пограничного слоя, т. е. уравнениям (2.14) при $\mu = 0$. Для сопряжения переходного и внутреннего решения вводится промежуточная переменная $\xi = \xi_0/\alpha^r$.

Приведем, наконец, универсальные уравнения, которые в первом приближении содержат все члены, существенные во всей области ударного слоя для рассмотренных выше режимов, уравнения запишем в исходных

безразмерных переменных

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho u^j \sqrt{g}}{\partial q^j} &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial q^3} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{mn}}{\partial q^3} \rho u^m u^n = 0 \\
 \frac{\partial}{\partial q^i} ((\rho u^i u^i + g^{ii} p) \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial q^3} \left(\left(\rho u^i u^3 - \mu \operatorname{Re}_0^{-1} \frac{\partial u^i}{\partial q^3} \right) \sqrt{g} \right) + \\
 + \sqrt{g} \Gamma_{mn}^i (\rho u^m u^n + g^{mn} p) &= 0, \quad i=1, 2 \\
 (2.15) \quad \frac{\partial}{\partial q^j} (\rho E u^j \sqrt{g}) - \frac{\partial}{\partial q^3} \left\{ \operatorname{Re}_0^{-1} \sqrt{g} \left(\operatorname{Pr}^{-1} \frac{\partial h}{\partial q^3} + g_{mn} u^m \frac{\partial u^n}{\partial q^3} \right) \right\} &= 0 \\
 E = h + g_{mn} \frac{u^m u^n}{2}, \quad \frac{p}{\rho} = (\gamma - 1) \frac{h}{\gamma}, \quad \mu = h^\omega
 \end{aligned}$$

(по j суммирование от 1 до 3, по l, m, n — от 1 до 2).

Из приведенного выше асимптотического анализа следует, что для режима 1 в уравнениях движения в первом приближении можно пренебречь градиентами давления $\partial p / \partial q^i$, $i=1, 2$, которые также относительно малы в невязкой части тонкого ударного слоя, но существенны в вязком подслое. Давление слабо (см. (2.9), (2.14)) меняется поперек ударного слоя в вязком подслое и существенно меняется в невязкой части ударного слоя.

На внешней границе тонкого ударного слоя уравнения (2.15) замыкаются соотношениями на ударной волне (ср. [11, 22, 23])

$$\begin{aligned}
 [\rho u^3] &= 0, \quad \left[\rho u^i u^3 - \frac{1}{\operatorname{Re}_0} \mu \frac{\partial u^i}{\partial \xi} \right] = 0, \quad i=1, 2 \\
 \left[\rho (u^3)^2 + p - \frac{1}{\operatorname{Re}_0} \left(\sigma - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} (\sqrt{g} u^3) - \frac{2\mu}{\operatorname{Re}_0} \frac{\partial u^3}{\partial \xi} \right] &= 0 \\
 (2.16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\rho E u^3 + p u^3 - \frac{\mu}{\operatorname{Re}_0 \operatorname{Pr}} \frac{\partial h}{\partial \xi} - \frac{1}{\operatorname{Re}_0} \left(\sigma - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial u^3 \sqrt{g}}{\partial \xi} - \right. \\
 \left. - 2\mu u^3 \frac{\partial u^3}{\partial \xi} - \mu g_{mn} u^m \frac{\partial u^n}{\partial \xi} \right] &= 0 \\
 E = \frac{h}{\gamma} + \frac{1}{2} g_{ij} u^i u^j, \quad i, j=1, 2, 3
 \end{aligned}$$

По m, n — суммирование от 1 до 2. Символ $[F]$ означает скачок величины F , u^i — контравариантные компоненты скорости в системе координат, связанной с поверхностью S ударной волны.

3. Рассмотрим уравнения тонкого ударного слоя около критической точки тела двоякой кривизны и около затупленной кромки треугольного крыла бесконечного размаха.

Введем в окрестности точки торможения систему координат, связанную с линиями кривизны тела. Пусть q^1, q^2 — координаты вдоль линий кривизны; $u = u^1 \sqrt{g_{11}}$, $w = u^2 \sqrt{g_{22}}$, $v = u^3$ — физические составляющие скорости частиц газа $d\xi = \sqrt{g_{11}} dq^1$, $d\zeta = dq^3$, $d\eta = \sqrt{g_{22}} dq^2$. В окрестности точки торможения используем следующие разложения по ξ, η :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{g_{11}} &= 1 + K_1 \xi + \dots, \quad \sqrt{g_{22}} = 1 + K_2 \zeta + \dots \\
 \rho &= \rho_0(\zeta) + \dots, \quad u = \xi(u_0(\zeta) + \dots), \quad w = \eta(w_0(\zeta) + \dots)
 \end{aligned}$$

(3.1)

$$v=v_0(\xi)+\dots, \quad h=h_0(\xi)+\dots$$

$$p=p_0(\xi)+\frac{1}{2}\xi^2(p_1(\xi)+\dots)+\frac{1}{2}\eta^2(p_2(\xi)+\dots)$$

Многоточием в (3.1) обозначены величины, стремящиеся к нулю при $\xi \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$, K_1 , K_2 — главные кривизны тела в критической точке. Без ограничения общности считаем, что $K_1=1$, $K_2=K$.

Используя разложения (3.1), уравнения тонкого ударного слоя (2.15) сводим к следующей системе уравнений (индекс ноль опускаем, штрих обозначает дифференцирование по ξ):

$$(3.2) \quad \begin{aligned} (\rho v)' + \rho(u+w) &= 0, \quad p' = 0, \quad p_1' = 2\rho u^2, \quad p_2' = 2K\rho w^2 \\ \rho(u^2 + vu') + p_1 &= \text{Re}_0^{-1}(\mu u'), \quad \rho(w^2 + vw') + p_2 = \text{Re}_0^{-1}(\mu w')' \\ \rho v \left(h + \frac{v^2}{2} \right)' &= \frac{1}{\text{Re}_0} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} h' + \frac{\mu}{3} (v^2)' \right)', \quad p = \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho h, \quad \mu = h'' \end{aligned}$$

В уравнения (3.2) включен член с кинетической энергией, малый согласно асимптотическому анализу. На теле ставится в первом приближении (см. 2.4) условие $u=0$, $v=0$, $w=0$, $h=h_w$.

Условия на ударной волне $\xi=\Delta$ для стационарного течения можно записать в виде

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \rho_s v_s' &= \rho_\infty v_\infty' = m \\ \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho_s h_s + m v_s' &= p_\infty + m v_\infty' + \frac{4}{3 \text{Re}_0} \left(\mu \frac{\partial v'}{\partial \xi} \right)_s \\ \rho_s h_s + \frac{1}{2} m v_s' &= \rho_s \left\{ h_\infty + \frac{1}{2} v_\infty'^2 + \frac{1}{\text{Re} \text{Pr}} \left(\mu \frac{\partial h}{\partial \xi} \right)_s + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3} \frac{1}{\text{Re}_0} \left(\mu \frac{\partial v'}{\partial \xi} \right)_s \right\} \\ m u_s' &= m u_\infty' + \frac{1}{\text{Re}_0} \left(\mu \frac{\partial u'}{\partial \xi} \right)_s \\ m w_s' &= m w_\infty' + \frac{1}{\text{Re}_0} \left(\mu \frac{\partial w'}{\partial \xi} \right)_s \end{aligned}$$

Здесь v' , u' , w' — составляющие скорости по нормали и по касательным вдоль сечений $\xi=0$, $\eta=0$ к фронту волны.

Для используемых безразмерных переменных $\rho_\infty=1$, $p_\infty=1/\gamma M_\infty^2$, $h_\infty=1/(\gamma-1)M_\infty^2$ величины u_∞' , w_∞' зависят от геометрии фронта в окрестности точки торможения. Пусть K_{1s} , K_{2s} — кривизны сечений поверхности волны плоскостями $\xi=0$ и $\eta=0$. Обозначим $\kappa_i=K_{is}(1+K_i\Delta)$, $i=1, 2$. Сместимся от точки торможения M_0 на малое расстояние ξ вдоль линии $\eta=0$ в точку M_1 на теле. Пусть N_0 и N_1 — точки пересечения нормалей к телу в точках M_0 и M_1 с ударной волной, α и β — углы поворота нормалей к телу и ударной волне при движении из M_0 в M_1 :

$$d\xi \approx M_0 M_1, \quad d\xi_s = (1+K_1\Delta) \approx N_0 N_1, \quad \frac{d\alpha}{d\xi} = K_1, \quad \frac{d\beta}{d\xi_s} = K_{1s}$$

Используя соотношения между компонентами скорости в системе ко-

ординат, связанной с телом и ударной волной, получим

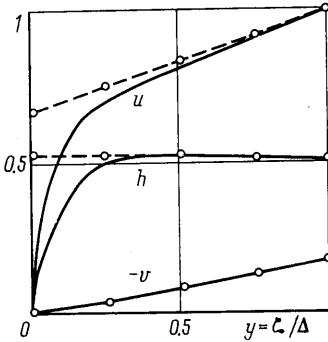
$$\xi u_s = \xi u_s' \cos(\alpha - \beta) - v_s' \sin(\alpha - \beta) = \xi u_s' - v_s'(\alpha - \beta) + O(\xi^2)$$

$$v_s = \xi u_s' \sin(\alpha - \beta) + v_s' \cos(\alpha - \beta) = v_s' + O(\xi^2)$$

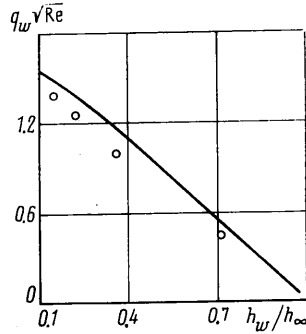
$$\xi u_\infty' = V_\infty \sin \beta = \beta + O(\xi^2)$$

отсюда находим

$$(3.4) \quad u_s' = u_s + v_s(K_1 - \kappa_1) + O(\xi), \quad u_\infty' = \kappa_1 + O(\xi)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Рассуждая аналогично, получим

$$(3.5) \quad w_s' = w_s + v_s(K_2 - \kappa_2) + O(\eta), \quad w_\infty' = \kappa_2 + O(\eta)$$

Подставляя (3.4), (3.5) в (3.3), получаем связь величин u_s , v_s , w_s , $\partial u_s / \partial \xi$, $\partial v_s / \partial \xi$, $\partial w_s / \partial \xi$ за фронтом волны. В случае соотношения Ренкина — Гюнио u_s' , w_s' — непрерывны на фронте и согласно (3.4), (3.5) получаем

$$u_s = \kappa_1 + (\kappa_1 - k_1) v_s + O(\xi), \quad w_s = \kappa_2 - (K_2 - \kappa_2) v_s + O(\eta)$$

Для p_{1s} , p_{2s} , p_{0s} можно получить следующие соотношения (подробнее см. [23]):

$$p_{0s} + \rho_s v_s^2 = 1 + \gamma^{-1} M_\infty^{-2 + 4/3} \text{Re}_0^{-1} (\mu v')_s$$

$$p_{is} = -2\kappa_i^2 \{-\rho_s v_s^2 + 1 + 2/3 \text{Re}_0^{-1} (\mu v')_s\}, \quad i=1, 2$$

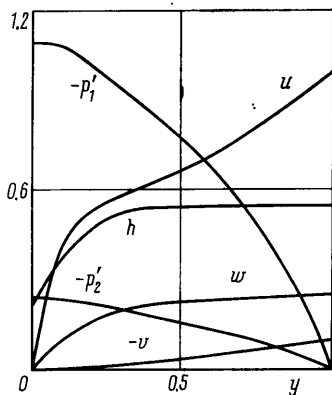
Если предположить, что поверхность волны и тела эквидистантны в окрестности точки торможения, то $K_{is}^{-1} = K_i^{-1} + \Delta$, $K_i = \kappa_i$.

Преобразуем теперь уравнения тонкого ударного слоя (2.15) для окрестности симметричной затупленной передней кромки стреловидного крыла, обтекаемого с заданным углом скольжения без угла атаки. Пусть главные кривизны на кромке в точке торможения равны: $K_1 = 1$, $K_2 = 0$, координаты ξ , η меняются поперек и вдоль поверхности крыла, начало отсчета в точке торможения в плоскости $\eta = \text{const}$, ξ — координата по нормали к поверхности. Величины в ударном слое ищем в виде разложений

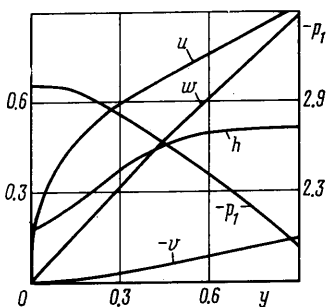
$$(3.6) \quad u^1 \sqrt{g_{11}} = \xi(u_0(\xi) + \dots), \quad u^2 \sqrt{g_{22}} = w_0(\xi) + \dots, \quad v = v_0(\xi) + \dots$$

$$h = h_0(\xi) + \dots, \quad p = p_0(\xi) + \frac{1}{\gamma} \xi^2 (p_1(\xi) + \dots)$$

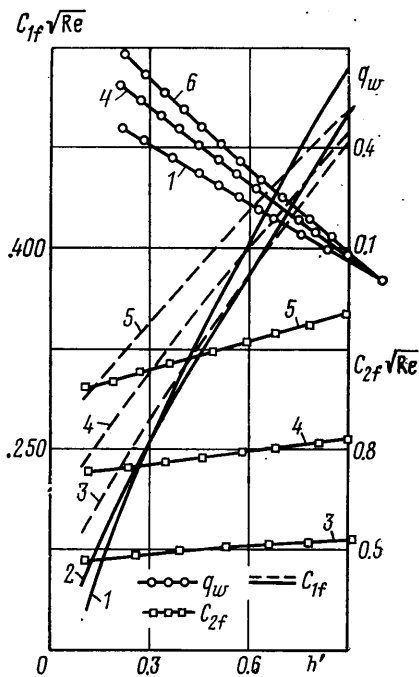
Многоточием в (3.6) отмечены величины, стремящиеся к нулю при $\xi \rightarrow 0$. Для главных членов в (3.6) получим следующие уравнения (индекс



Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4

ноль опускаем, штрих — дифференцирование по ζ):

$$(3.7) \quad \begin{aligned} (\rho v)' + \rho u &= 0, \quad p' = 0, \quad p_1' = 2\rho u^2, \quad \rho v w' = \text{Re}_0^{-1} (\mu w')' \\ \rho v u' + p_1 + \rho u^2 &= \text{Re}_0^{-1} (\mu u')', \quad \mu = h^*, \quad p = (\gamma - 1) \rho h / \gamma \\ \rho v (h + v^2/2)' &= \text{Re}_0^{-1} (\mu \text{Fr}^{-1} h') + \text{Re}_0^{-1} \mu (w')^2 \end{aligned}$$

Упрощение соотношений (2.16) на ударной волне проводится аналогично рассмотренному выше. Пусть φ_1 — угол между вектором скорости и образующей кромки, приведем соотношения Ренкина — Гюгоньо для главных членов в разложениях (3.6)

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \rho_s v_s &= -\sin \varphi_1 = m, \quad p_{1s} = 2(\rho_s v_s^2 - \sin^2 \varphi_1) \\ w_s &= \cos \varphi_1, \quad u_s = \kappa_1 + (\kappa_1 - K_1) v_s, \quad K_1 = 1, \quad \kappa_1 = K_{1s}(1 + \Delta) \\ p_s + m v_s &= \gamma^{-1} M_\infty^{-1} \sin^{-2} \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1 \\ \rho_s h_s + \frac{1}{2} m v_s^2 &= \rho_s \{ (\gamma - 1)^{-1} M_\infty^{-2} \sin^{-2} \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1 / 2 \} \end{aligned}$$

В формулах (3.8) K_{1s} — кривизна сечения ударной волны плоскостью $\eta = \text{const}$, Δ — отход волны.

4. Уравнения стационарного ударного слоя (3.2) около критической точки и уравнения (3.7) около кромки с условиями на теле и соотношениями на ударной волне решались численно с использованием итераций (см. [23]). Расчетная область $0 \leq \zeta \leq \Delta$ с неизвестной границей Δ растягивалась в полосу $0 \leq y \leq 1$, $y = \zeta / \Delta$. Задавалось начальное приближение искомых величин ρ , u , v , w , h , p_1 , p_2 , p в виде многочленов

по u , удовлетворяющих граничным условиям и уравнению состояния. Начальное значение Δ° определялось на основе начальных распределений $\rho^\circ(y)$, $v^\circ(y)$, $u^\circ(y)$, $w^\circ(y)$ и уравнения неразрывности, функции $p_1^\circ(y)$, $p_2^\circ(y)$ находились интегрированием уравнений $p_1' = 2\rho u^2$, $p_2' = 2K\rho w^2$. На итерации $(n+1)$, $n \geq 0$, сначала определялись функции u^{n+1} , w^{n+1} , h^{n+1} на основе разностных аппроксимаций второго порядка с применением скалярных прогонок, затем находились ρ^{n+1} из уравнения $p' = 0$, Δ^{n+1} — из уравнения неразрывности и величины p_i^{n+1} , $i = 1, 2$, итерационный процесс продолжался до тех пор, пока наибольшее относительное изменение каждой величины не превышало 0.5%.

Расчеты проведены для совершенного газа с отношением удельных теплоемкостей $\gamma = 1.4$; 1.33; 1.2 при числах $M_\infty = 10.6$; $Pr = 0.71$, $Re_0 = 100, 500$. Значение безразмерной температуры стенки h_w варьировалось от $h_w = h_\infty = (\gamma - 1)^{-1} M_\infty^{-2}$ до $h_w = h_s$ (при $\gamma = 1.4$, $h_\infty = 0.025$, $h_s = 0.519$). Безразмерный тепловой поток q_w и коэффициенты трения c_{1f} и c_{2f} определялись по формулам:

$$q_w = \frac{1}{\rho_\infty' V_\infty'^3} \left(\lambda' \frac{\partial T'}{\partial \xi'} \right)_w, \quad c_{1f} = \frac{1}{\rho_\infty' V_\infty'^2} \left(\mu' \frac{\partial u'}{\partial \xi'} \right)_w, \\ c_{2f} = \frac{1}{\rho_\infty' V_\infty'^2} \left(\mu' \frac{\partial w'}{\partial \xi'} \right)_w$$

Параметр k , равный отношению главных кривизн в критической точке, варьировался в пределах $0 \leq K \leq 1$, на волне задавались соотношения Ренкина — Гюгонио в приближении экидистантности ($K_i = \kappa_i$).

На фиг. 1 распределения величин u , h , v поперек ударного слоя (сплошные линии) для случая $Re_0 = 500$, $\gamma = 1.4$, $h_w = h_\infty$, $K = 1$ сравниваются с результатами [17] расчета соответствующего невязкого обтекания. Видна близость распределений в невязкой части ударного слоя.

На фиг. 2 результаты расчета величины теплового потока $q_w \sqrt{Re_\infty}$ (сплошная линия) сопоставляются с данными работы [18] при различных значениях температурного фактора h_w/h_0 . Расчеты приведены для $M_\infty = 6$, $Pr = 0.71$, $\gamma = 1.4$, $\mu = \sqrt{h}$, $Re_\infty = 7200$. Видно, что при $\gamma = 1.4$ и умеренных числах M_∞ результаты настоящего расчета в приближении тонкого слоя незначительно отличаются от данных [18], не использовавших малость ρ_∞/ρ_s .

На фиг. 3 показаны распределения u , v , w , h , $p_1' = p_1 - p_{1s}$, $p_2' = 10(p_2 - p_{2s})$ для случая $Re_0 = 500$, $\gamma = 1.2$, $M_\infty = 10$, $K = 0.25$, $h_w = 0.2$. Распределения компонент скорости и энтальпии указывают на области невязкого и вязкого течений в ударном слое.

Наблюдается область постоянства p_1 , p_2 в вязком подслое и существенное изменение в невязкой части, что согласуется с результатами асимптотического анализа.

На фиг. 4, представлена зависимость величин $\sqrt{Re_0} q_w / h_\infty$, $c_{1f} \sqrt{Re_0}$, $c_{2f} \sqrt{Re_0}$ от $h' = h_w/h_s$ в случае $\gamma = 1.4$, $Re_0 = 100$, для значений K , равных 0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 (кривые 1–6 соответственно). Зависимости коэффициентов трения и теплового потока от h_w близки к линейным. Величины c_{2f} и q_w монотонно растут с увеличением K при фиксированном h_w/h_s . Интересно отметить немонотонную зависимость c_{1f} от K .

Вязкий ударный слой около крыла изучался в [24] методом последовательных приближений. Некоторые результаты расчета обтекания затупленной кромки крыла представлены на фиг. 5. Рассматривался поток с параметрами $M_\infty = 10$, $Re_0 = 500$, $Pr = 0.71$, $\gamma = 1.4$, $\phi_1 = 45^\circ$ (см. (3.7)). $h_w = 0.15$, показаны распределения u/u_s , w/w_s , h , v , p_1 , ρ поперек ударного слоя. Видна область постоянного значения p_1 в вязком подслое. Изменение w близко к линейному.

Поступила 24 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Van Dyke M. Higher-order boundary layer theory. In: Annual Rev. Fluid Mech., vol. 1. Palo Alto, Calif., Annual Revs, 1969.
2. Чудов Л. А. Высшие приближения в пограничном слое (Метод погранслойных поправок и метод сращиваемых разложений). В сб.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике, вып. 2. М., Изд. Моск. ун-та, 1971.
3. Марков А. А. Асимптотическое исследование течения вязкого газа с зоной ударного сжатия. В сб.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике, вып. 2. М., Изд. Моск. ун-та, 1971.
4. Марков А. А. Об исследовании сверхзвукового потока около затупленного тела при вдуве для больших чисел Рейнольдса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 1.
5. Стулов В. П. Пограничные слои в диссипативных средах. Науч. тр. Ин-та мех. МГУ, 1977, № 48.
6. Сычев В. В. О гиперзвуковых течениях вязкого теплопроводного газа. ПММ, 1961, т. 25, № 4.

7. Cheng H. K. The blunt-body problem in hypersonic flow at low Reynolds number. Inst. Aerospace Sci. Paper, 63-92, 1963, N. Y.
 8. Bush W. B. On the viscous hypersonic blunt body problem. pt 3, J. Fluid Mech., 1964, vol. 20.
 9. Магомедов К. М. Гиперзвуковое обтекание тупых тел вязким газом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
 10. Дудин Г. Н., Нейланд В. Я. Закон поперечных сечений для трехмерного пограничного слоя на тонком крыле в гиперзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 2.
 11. Гершбейн Э. А., Юницкий С. А. Гиперзвуковой пространственный вязкий ударный слой в однородном газе при наличии вдува. В сб.: Аэродинамика гиперзвуковых течений при наличии вдува. М., Изд. Моск. ун-та, 1979.
 12. Воронкин В. Г. Расчет вязкого ударного слоя на притупленных конусах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.
 13. Головачев Ю. П., Кузьмин А. М., Попов Ф. Д. О расчете сверхзвукового обтекания затупленных тел с использованием полных и упрощенных уравнений Навье — Стокса. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1973, т. 13, № 4.
 14. Павлов Б. М. Расчет сверхзвукового обтекания охлаждаемой сферы на основе полных уравнений Навье — Стокса. В сб.: Вычислительные методы и программирование, вып. 15. М., Изд. Моск. ун-та, 1970.
 15. Джейн, Эйдимоги. Гиперзвуковой слившийся сжатый слой в окрестности критической точки. Ракетная техника и космонавтика, 1974, т. 12, № 3.
 16. Анкудинов А. Л. Вязкий ударный слой в окрестности затупления. Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 3.
 17. Белоцерковский О. М. Расчеты обтекания осесимметричных тел с отошедшей ударной волной (Расчетные формулы и таблицы полей течений). М., 1961 (АН СССР, Вычисл. центр).
 18. Головачев Ю. П., Попов Ф. Д. Обтекание охлаждаемого сферического затупления сверхзвуковым потоком вязкого газа. ПМТФ, 1972, № 5.
 19. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика. М., «Машиностроение», 1975.
 20. Шевелев Ю. Д. Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М., «Наука», 1977.
 21. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
 22. Толстых А. И. О структуре криволинейной ударной волны. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
 23. Марков А. А. Асимптотический анализ уравнений Навье — Стокса для трехмерных течений в тонком ударном слое. М., 1979 (Препринт Ин-та пробл. мех. АН СССР, № 124).
 24. Брыкина И. Г., Гершбейн Э. А. Гиперзвуковой вязкий ударный слой на стреловидных крыльях бесконечного размаха, обтекаемых под углом атаки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, № 2.
-