МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1980

УДК 532.5

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ СТРУИ КАПЕЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В. М. ЕНТОВ, А. Л. ЯРИН

(Москва)

Выведены уравнения пространственного движения тонкой струи вязкой жидкости. Струя представляет собой жидкое тело, поперечные размеры которого малы по сравнению с прочими характерными размерами задачи. Задача настоящей работы состоит в установлении замкнутой системы асимптотических уравнений динамики струи, явно учитывающих ее «тонкость». Более подробный вывод квазиодномерных асимптотических уравнений динамики тонких струй жидкости и анализ на их основе изгибной формы распада струи на линейной и нелинейной стадиях содержится в работах [1, 2].

1. Кинематика. Рассмотрим гладкую подвижную пространственную кривую $\Gamma(t)$, заданную параметрически уравнением $\mathbf{r}=\mathbf{R}(s,t)$, $s_-\leqslant s\leqslant s_+$, где s — произвольный параметр, а t — время, и назовем ее осью струи. Рассмотрим далее на плоскости yz двупараметрическое семейство односвязных плоских областей $D(s, t)$, центры тяжести которых лежат в начале координат, и назовем $D(s, t)$ сечением струи в точке s в момент t. Это определение подразумевает, что сечение жидкого объема струи плоскостью, нормальной к оси струи, в точке s в момент t совпадает с $D(s, t)$, причем ось y направлена по нормали $\mathbf{n}$, ось z — по бинормали $\mathbf{b}$ к $\Gamma(t)$, и начало координат $y=0$, $z=0$ принадлежит $\Gamma(t)$. Если d — диаметр области D, то струя считается тонкой при условии

$$\varepsilon=\max(d/l,\ kd,\ \varkappa d)\ll 1$$

где l — характерная длина вдоль оси струи, k — кривизна и $\varkappa$ — кручение оси. Положение точки в струе в пространстве вполне определяется при указанных условиях заданием трех чисел q^i, $i=1, 2, 3$, $q^1=y$, $q^2=z$, $q^3=s$, играющих роль координат точки в подвижной криволинейной (неортогональной в случае $\varkappa\neq 0$) системе координат с ко- и контравариантными базисными векторами $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{a}^i$:

$$\mathbf{r}(y, z, s, t)=\mathbf{R}(s, t)+y\mathbf{n}(s, t)+z\mathbf{b}(s, t)\equiv\mathbf{R}(s, t)+\mathbf{x}$$

$$\mathbf{a}_1=\mathbf{n},\ \mathbf{a}_2=\mathbf{b},\ \mathbf{a}_3=\lambda[-\varkappa z\mathbf{n}+\varkappa y\mathbf{b}+(1-ky)\boldsymbol{\tau}]$$

$$\mathbf{a}^1=\mathbf{n}+\varkappa z(1-ky)^{-1}\boldsymbol{\tau},\ \mathbf{a}^2=\mathbf{b}-\varkappa y(1-ky)^{-1}\boldsymbol{\tau}$$

$$\mathbf{a}^3=\boldsymbol{\tau}\lambda^{-1}(1-ky)^{-1},\ \lambda=|\partial\mathbf{R}/\partial s|$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}$ — касательная к оси струи.

В дальнейшем понадобится выражение для оператора градиента

$$\nabla=\mathbf{a}^i\partial/\partial q^i=[\mathbf{n}+\varkappa z(1-ky)^{-1}\boldsymbol{\tau}]\partial/\partial y+ +[\mathbf{b}-\varkappa y(1-ky)^{-1}\boldsymbol{\tau}]\partial/\partial z+\lambda^{-1}(1-ky)^{-1}\boldsymbol{\tau}\partial/\partial s \tag{1.1}$$

В каждой точке струи жидкости определены две скорости: скорость $\mathbf{u}$ движения точки с фиксированными координатами y, z, s и скорость $\mathbf{v}$

движения жидкой частицы

$$\mathbf{u}=\partial\mathbf{r}(q^i,t)/\partial t;\quad \mathbf{v}=d\mathbf{r}(q^i,t)/dt$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},s,t)=\mathbf{U}(s,t)+\mathbf{G}_u{}^*\cdot\mathbf{x}=\mathbf{U}(s,t)+y\partial\mathbf{n}/\partial t+z\partial\mathbf{b}/\partial t \tag{1.2}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},s,t)=\mathbf{V}(s,t)+\mathbf{G}_v{}^*\cdot\mathbf{x}+\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{G}_u{}^*=[\nabla\mathbf{u}]^T_{y=z=0},\quad \mathbf{G}_v{}^*=[\nabla\mathbf{v}]^T_{y=z=0}$$

$$\mathbf{U}=\mathbf{u}(0,0,s,t)=\partial\mathbf{R}/\partial t,\ \mathbf{V}=\mathbf{v}(0,0,s,t)=d\mathbf{R}/dt$$

Здесь и далее звездочками отмечены тензоры (у компонент звездочки опущены). Вектор $\mathbf{v}_2$ представляет собой нелинейную часть разложения вектора скорости $\mathbf{v}$, причем $|\mathbf{v}_2|=O(\varepsilon^2|\mathbf{V}|)$.

Конкретное задание оси струи может быть выполнено различными способами. В частности, допустим, что движение струи таково, что касательная к ее оси в любой момент времени и во всех точках составляет острый угол с некоторой прямой $O_1\xi$. Тогда естественно ввести декартову систему координат $O_1\xi\eta\zeta$ с ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ и задать ось струи уравнениями

$$\xi=s,\ \eta=H(s,t),\ \zeta=Z(s,t),\ \mathbf{R}=\mathbf{i}s+\mathbf{j}H+\mathbf{k}Z \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{\tau}=\lambda^{-1}(\mathbf{i}+H_{,s}\mathbf{j}+Z_{,s}\mathbf{k}),\ \lambda=(1+H_{,s}{}^2+Z_{,s}{}^2)^{1/2}$$

где H, Z — смещения оси струи в направлениях $O_1\eta$ и $O_1\zeta$.

Имеем далее

$$\mathbf{R}_{,t}=\mathbf{U}=H_{,t}\mathbf{j}+Z_{,t}\mathbf{k},\ d\mathbf{R}/dt=\mathbf{V}=\mathbf{U}+W\boldsymbol{\tau} \tag{1.4}$$

$$W=\lambda ds/dt,\ ds/dt=\mathbf{V}\cdot\mathbf{i}$$

(можно показать, что $\lambda\mathbf{V}\cdot\mathbf{i}=V_\tau-U_\tau$).

Соотношения (1.3) и последнее равенство в (1.4) явным образом используют выбранную параметризацию оси струи.

2. Динамические уравнения. Перейдем к установлению асимптотических уравнений неразрывности, количества движения и момента количества движения жидкости в струе. Масса жидкости, заключенная между двумя сечениями s_1 и s_2, равна, очевидно,

$$M=\int\limits_{s_1}^{s_2}\left[\int\limits_D \rho g\,dS\right]ds,\quad g=\mathbf{a}_1\cdot[\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3]=\lambda(1-ky)$$

Вследствие движения сечения струи с фиксированным значением s перенос через него массы (а также количества движения и момента количества движения) происходит со скоростью $(\mathbf{v}-\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\tau}=v_\tau-u_\tau$. Поток массы через сечение струи $D(s,t)$:

$$Q=\int\limits_D \rho(v_\tau-u_\tau)\,dS$$

Изменение массы жидкости, заключенной между сечениями s_1 и s_2, равно разности потоков массы через эти сечения. Устремляя s_2 к s_1, получаем дифференциальное уравнение неразрывности для струи (жидкость далее считается несжимаемой)

$$\frac{\partial\rho\lambda f}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\left[\rho\int\limits_D (v_\tau-u_\tau)\,dS\right]=0 \tag{2.1}$$

Здесь f — площадь сечения струи.

Составим теперь уравнение баланса импульса для выделенного элемента струи. Для количества движения между сечениями s_1 и s_2 и потока количества движения через сечение струи, отвечающее фиксированному s, имеем

$$\mathbf{J}=\int\limits_{s_1}^{s_2}\left[\int\limits_D \rho\mathbf{v}g\,dS\right]ds,\quad \mathbf{L}=\int\limits_D \rho\mathbf{v}(v_\tau-u_\tau)\,dS$$

Напряжения, действующие в сечении s, обозначим через $\boldsymbol{\sigma}_\tau(\mathbf{x}, s, t)$. Будем считать также, что на жидкость действуют внешние массовые силы с объемной плотностью $\mathbf{F}$ и распределенные по боковой поверхности внешние усилия. Последние, как это принято в теории изгиба тонких стержней [3, 4], будем считать малыми в сравнении с внутренними напряжениями и характеризовать линейной плотностью сил $\mathbf{q}$, приложенных на оси струи, и моментом $\mathbf{m}$ в расчете на единицу длины оси струи. Тогда уравнение импульсов приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\int\limits_D \mathbf{v}g\,dS\right]+\frac{\partial}{\partial s}\left[\rho\int\limits_D \mathbf{v}(v_\tau-u_\tau)\,dS\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}\left[\int\limits_D \boldsymbol{\sigma}_\tau\,dS\right]+\rho f\lambda\mathbf{F}+\lambda\mathbf{q}\tag{2.2}$$

Аналогично показывается, что уравнение баланса момента количества движения имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int\limits_D (\mathbf{r}\times\rho\mathbf{v})g\,dS\right]+\frac{\partial}{\partial s}\left[\int\limits_D (\mathbf{r}\times\rho\mathbf{v}(v_\tau-u_\tau))\,dS\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}\left[\int\limits_D (\mathbf{r}\times\boldsymbol{\sigma}_\tau)\,dS\right]+\lambda\mathbf{R}\times\mathbf{q}+\rho\lambda f\mathbf{R}\times\mathbf{F}+\lambda\mathbf{m}-\left[\rho\lambda k\int\limits_D y\mathbf{x}\,dS\right]\times\mathbf{F}\tag{2.3}$$

При вычислении момента массовых сил использовано условие $\int\limits_D \mathbf{x}\,dS=0$.

Домножим уравнение (2.2) слева векторно на $\mathbf{R}(s, t)$ и вычтем из (2.3). Получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\lambda\rho\int\limits_D (\mathbf{x}\times\mathbf{v}(1-ky))\,dS\right]+\mathbf{U}\times\rho\lambda\int\limits_D \mathbf{v}(1-ky)\,dS+$$

$$+\lambda\rho\boldsymbol{\tau}\times\int\limits_D \mathbf{v}(v_\tau-u_\tau)\,dS+\rho\frac{\partial}{\partial s}\left[\int\limits_D (\mathbf{x}\times\mathbf{v}(v_\tau-u_\tau))\,dS\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}\left[\int\limits_D (\mathbf{x}\times\boldsymbol{\sigma}_\tau)\,dS\right]+\lambda\boldsymbol{\tau}\times\int\limits_D \boldsymbol{\sigma}_\tau\,dS-\rho\lambda k\left[\int\limits_D y\mathbf{x}\,dS\right]\times\mathbf{F}+\lambda\mathbf{m}\tag{2.4}$$

Последующая задача состоит в том, чтобы записать уравнения (2.1), (2.2) и (2.4) асимптотически, оставляя в них лишь главные члены.

Примем упрощенное представление распределения скоростей жидкости. А именно будем считать, что в каждый момент времени мгновенное движение жидкого сечения, совпадающего с нормальным сечением струи, сводится в основном к комбинации поступательного движения с центром тяжести, жесткого вращения вокруг него и изотропного растяжения (сжатия) в плоскости сечения. Это предположение является аналогом гипотезы плоских сечений в теории изгиба стержней; соображения в его пользу будут приведены в п. 3. С учетом сделанного предположения имеем вместо (1.2).

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{v}=\mathbf{V}+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}+\mathbf{v}_2\\
&\mathbf{v}_2=\varphi_1(y,z,s)\mathbf{n}+\varphi_2(y,z,s)\mathbf{b}+\varphi_3(y,z,s)\boldsymbol{\tau}\\
&\mathbf{u}=\mathbf{U}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Функции φ_i разлагаются в ряды по y и z, начинающиеся с членов второго порядка; последнее равенство, эквивалентное выражению для $\mathbf{u}$ в (1.2), является прямым следствием определения $\mathbf{u}$ и выбора системы координат; компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ определяются кинематическими соотношениями; Ω — угловая скорость жидкого сечения.

Разложения (2.5) позволяют вычислить интегралы, входящие в полученные уравнения динамики струи. Так, для потока массы через сечение струи имеем

$$
\int_D (v_\tau-u_\tau)\,dS=(V_\tau-U_\tau)f+\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{j}_1,\quad \mathbf{j}_1=\int_D \mathbf{v}_2\,dS,\quad |\mathbf{j}_1|=O(\varepsilon^4|\mathbf{V}|)
\tag{2.6}
$$

Уравнение неразрывности (2.1) после отбрасывания малого слагаемого $j_{1\tau,s}$ с учетом кинематического соотношения (1.4) $W=V_\tau-U_\tau$ преобразуется к виду

$$
\frac{\partial\lambda f}{\partial t}+\frac{\partial fW}{\partial s}=0
\tag{2.7}
$$

Уравнения баланса количества движения и момента количества движения преобразуются аналогично и после отбрасывания малых высших порядков имеют вид

$$
\frac{\partial\lambda f\mathbf{V}}{\partial t}+\frac{\partial f\mathbf{V}W}{\partial s}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial s}(P\boldsymbol{\tau}+\mathbf{Q})+\lambda f\mathbf{F}+\frac{1}{\rho}\lambda\mathbf{q}
\tag{2.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\lambda\mathbf{K}}{\partial t}+\lambda[\mathbf{U}\times\mathbf{j}_1+\boldsymbol{\tau}\times(\mathbf{U}j_{1\tau}+\mathbf{j}_2+W\mathbf{j}_1)-k\mathbf{U}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{j}_3+\delta\mathbf{j}_3)]+\\
&+\frac{\partial}{\partial s}(W\mathbf{K}_1+\mathbf{j}_4\times\mathbf{V})=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial s}+\frac{1}{\rho}\lambda\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{Q}-\lambda k\mathbf{j}_3\times\mathbf{F}+\frac{\lambda}{\rho}\mathbf{m}
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

$$
P=\boldsymbol{\tau}\cdot\int_D\boldsymbol{\sigma}_\tau\,dS,\quad \mathbf{Q}=\int_D\boldsymbol{\sigma}_\tau\,dS-P\boldsymbol{\tau},\quad \mathbf{M}=\int_D\mathbf{x}\times\boldsymbol{\sigma}_\tau\,dS
\tag{2.10}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{K}=\int_D(\mathbf{x}\times\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{x})\,dS-k\mathbf{j}_3\times\mathbf{V}=\mathbf{n}(\Omega_nI_n-\Omega_bI_{bn}-kV_\tau I_{bn})+\\
&+\mathbf{b}(\Omega_bI_b-\Omega_nI_{bn}+kV_\tau I_b)+\boldsymbol{\tau}[\Omega_\tau(I_n+I_b)-kV_bI_b+kV_nI_{bn}]
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{K}_1=\int_D(\mathbf{x}\times\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{x})\,dS=\mathbf{n}(\Omega_nI_n-\Omega_bI_{bn})+\\
&+\mathbf{b}(\Omega_bI_b-\Omega_nI_{bn})+\boldsymbol{\tau}\Omega_\tau(I_n+I_b)
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

$$I_n=\int\limits_D z^2\,dS,\quad I_b=\int\limits_D y^2\,dS,\quad I_{bn}=\int\limits_D zy\,dS$$

(2.13)

$$\mathbf{j}_2=\int\limits_D(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})\,[\,(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\omega})\cdot(\mathbf{x}\times\boldsymbol{\tau})\,]\,dS$$

$$\mathbf{j}_3=\int\limits_D \mathbf{x}y\,dS=\mathbf{n}I_b+\mathbf{b}I_{bn},\quad \mathbf{j}_4=\int\limits_D\mathbf{x}[\,(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\omega})\cdot(\mathbf{x}\times\boldsymbol{\tau})\,]\,dS$$

Величины $\boldsymbol{\tau}P$, $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{M}$ представляют собой соответственно продольную силу, перерезывающую силу и момент напряжений в сечении струи.

3. Дополнительные соотношения, замыкающие динамические уравнения. Замыкание полученной системы уравнений (2.7) — (2.9) требует привлечения кинематических соотношений, определяющих эволюцию формы струи по полю скоростей внутри струи (см. п. 1), а также установления связи между характеристиками полей скорости и напряжений в струе с учетом реологии жидкости. Используя выражение (2.5) для $\mathbf{v}$ и (1.1), нетрудно определить все необходимые меры деформации и скоростей деформации. Так, для струй вязкой жидкости достаточно иметь выражение для компонент тензора скоростей деформации $\mathbf{D}^*$ ($D_{ab}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{D}^*\cdot\mathbf{b}$):

$$D_{nn}=\delta+\varphi_{1,y},\quad D_{nb}=D_{bn}={}^1/_2(\varphi_{2,y}+\varphi_{1,z})$$

$$D_{n\tau}=D_{\tau n}={}^1/_2(-\Omega_b+\lambda^{-1}V_{n,s}-\varkappa V_b+kV_\tau+$$
$$+\varphi_{3,y}-z\lambda^{-1}\Omega_{\tau,s}+zk\Omega_n-yk\Omega_b+y\lambda^{-1}\delta_{,s}+$$
$$+yk\lambda^{-1}V_{n,s}-yk\varkappa V_b+yk^2V_\tau),\quad D_{bb}=\delta+\varphi_{2,z}$$

$$D_{b\tau}=D_{\tau b}={}^1/_2(\Omega_n+\lambda^{-1}V_{b,s}+\varkappa V_n+\varphi_{3,z}+$$
$$+y\lambda^{-1}\Omega_{\tau,s}+z\lambda^{-1}\delta_{,s}+yk\lambda^{-1}V_{b,s}+yk\varkappa V_n),$$

$$D_{\tau\tau}=\lambda^{-1}V_{\tau,s}-kV_n+z\lambda^{-1}\Omega_{n,s}-z\varkappa\Omega_b+zk\Omega_\tau-$$
$$-y\lambda^{-1}\Omega_{b,s}-y\varkappa\Omega_n-\delta yk+yk\lambda^{-1}V_{\tau,s}-yk^2V_n$$

Из условия несжимаемости

$$\operatorname{Sp}\mathbf{D}^*=2\delta+\varphi_{1,y}+\varphi_{2,z}+\lambda^{-1}V_{\tau,s}-kV_n+z\lambda^{-1}\Omega_{n,s}-$$
$$-z\varkappa\Omega_b+zk\Omega_\tau-y\lambda^{-1}\Omega_{b,s}-y\varkappa\Omega_n-\delta yk+$$
$$+yk\lambda^{-1}V_{\tau,s}-yk^2V_n=0$$

(3.1) $$\delta=-{}^1/_2(\lambda^{-1}V_{\tau,s}-kV_n)$$

(3.2) $$\varphi_{1,y}+\varphi_{2,z}=z(\varkappa\Omega_b-k\Omega_\tau-\lambda^{-1}\Omega_{n,s})+$$
$$+y(\lambda^{-1}\Omega_{b,s}+\varkappa\Omega_n+\delta k-k\lambda^{-1}V_{\tau,s}+k^2V_n)$$

Получим теперь выражения для напряжений в струе вязкой жидкости. Заметим предварительно, что при любой реологии жидкости для замыкания системы необходимо учесть условие малости («отсутствия») напряжений на поверхности струи. Можно показать, что это условие дает для напряжений внутри струи оценки

$$\sigma_{\tau n}=\sigma_{n\tau}=O(\varepsilon\sigma_{\tau\tau}),\quad \sigma_{\tau b}=\sigma_{b\tau}=O(\varepsilon\sigma_{\tau\tau})$$

$$\sigma_{nn}=O(\varepsilon^2\sigma_{\tau\tau}),\quad \sigma_{bb}=O(\varepsilon^2\sigma_{\tau\tau}),\quad \sigma_{bn}=\sigma_{nb}=O(\varepsilon^2\sigma_{\tau\tau}). \tag{3.3}$$

Малость напряжений $\sigma_{n\tau}$ и $\sigma_{b\tau}$ позволяет считать, что жидкое сечение остается плоским при движении, как это предполагается соотношениями (2.5). Если теперь выразить компоненты тензора напряжений через кинематические переменные, используя реологические определяющие соотношения жидкости, то оценки (3.3) будут играть роль дополнительных ограничений на кинематику движения.

В случае вязкой жидкости имеем

$$\boldsymbol{\sigma}^*=-p\mathbf{g}^*+2\mu\mathbf{D}^*$$

гре p — давление, μ — коэффициент вязкости, $\mathbf{g}^*$ — метрический тензор, $\boldsymbol{\sigma}^*$ — тензор напряжений.

Подставляя сюда приведенное выше выражение для тензора скоростей деформации, получаем

$$\begin{aligned}
&\sigma_{nn}=-p+2\mu(\delta+\varphi_{1,y}),\quad \sigma_{bb}=-p+2\mu(\delta+\varphi_{2,z})\\
&\sigma_{\tau\tau}=-p+2\mu[\lambda^{-1}V_{\tau,s}-kV_n+z(\lambda^{-1}\Omega_{n,s}-\varkappa\Omega_b+\\
&+k\Omega_\tau)+y(-\lambda^{-1}\Omega_{b,s}-\varkappa\Omega_n-\delta k+k\lambda^{-1}V_{\tau,s}-k^2V_n)]\\
&\sigma_{nb}=\sigma_{bn}={}^1/_2(\varphi_{2,y}+\varphi_{1,z})\\
&\sigma_{\tau n}=\sigma_{n\tau}=\mu[-\Omega_b+\lambda^{-1}V_{n,s}-\varkappa V_b+kV_\tau+\\
&+z(k\Omega_n-\lambda^{-1}\Omega_{\tau,s})+y(\lambda^{-1}\delta_{,s}-k\Omega_b+k\lambda^{-1}V_{n,s}-\\
&-k\varkappa V_b+k^2V_\tau)+\varphi_{3,y}]\\
&\sigma_{\tau b}=\sigma_{b\tau}=\mu[\Omega_n+\lambda^{-1}V_{b,s}+\varkappa V_n+z\lambda^{-1}\delta_{,s}+\varphi_{3,z}+\\
&+y(\lambda^{-1}\Omega_{\tau,s}+k\lambda^{-1}V_{b,s}+k\varkappa V_n)]
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Используя оценки для напряжений σ_{nn}, σ_{bb}, σ_{nb}, полученные выше, имеем, отбрасывая малые $O(\varepsilon^2\sigma_{\tau\tau})$ (ищется линейная часть напряжений):

$$\begin{aligned}
&\sigma_{nn}=\sigma_{bb}=-p+2\mu(\delta+\varphi_{1,y})=-p+2\mu(\delta+\varphi_{2,z})=0\\
&\varphi_{2,y}+\varphi_{1,z}=0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Отметим, что в силу первого равенства (3.5) ($\sigma_{nn}=\sigma_{bb}$) деформация жидкого сечения должна быть в основном изотропной, как это и предполагается соотношением (2.5).

Из формул (3.5) с учетом (3.2) имеем

$$\begin{aligned}
&\varphi_{1,y}=\varphi_{2,z}={}^1/_2[z(\varkappa\Omega_b-k\Omega_\tau-\lambda^{-1}\Omega_{n,s})+\\
&+y(\lambda^{-1}\Omega_{b,s}+\varkappa\Omega_n-{}^3/_2k\lambda^{-1}V_{\tau,s}+{}^3/_2k^2V_n)]\\
&p=2\mu\delta+\mu[z(\varkappa\Omega_b-k\Omega_\tau-\lambda^{-1}\Omega_{n,s})+\\
&+y(\lambda^{-1}\Omega_{b,s}+\varkappa\Omega_n-{}^3/_2k\lambda^{-1}V_{\tau,s}+{}^3/_2k^2V_n)]
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Соотношения (3.3) для напряжений $\sigma_{\tau n}$ и $\sigma_{\tau b}$ дают с учетом (3.4) дополнительные кинематические условия

$$\Omega_n=-\lambda^{-1}V_{b,s}-\varkappa V_n,\quad \Omega_b=\lambda^{-1}V_{n,s}-\varkappa V_b+kV_\tau \tag{3.7}$$

используемые в дальнейшем для замыкания системы уравнений задачи.

При этом выражения для осевых значений напряжений и продольной силы имеют вид

$$\Sigma_{\tau\tau}=3\mu(\lambda^{-1}V_{\tau,s}-kV_n),\quad \Sigma_{\tau n}=\Sigma_{\tau b}=0,\quad P=f\Sigma_{\tau\tau} \tag{3.8}$$

Необходимость в соотношениях (3.7) возникает из-за того, что перерезывающая сила в сечении $\mathbf{Q}$ не определяется из реологических соотношений данной точности. Действительно, в силу второго и третьего равенств (3.8) $|\mathbf{Q}|$ оказывается величиной порядка $O(\varepsilon^4\Sigma_{\tau\tau})$, так как линейные по y и z члены в выражениях (3.4) для $\sigma_{\tau n}$ и $\sigma_{\tau b}$ не дают вклада в перерезывающую силу, и она может быть определена лишь в результате решения задачи.

Таким образом, $|\mathbf{Q}|=O(\varepsilon^2P)$, что позволяет пренебрегать членом, связанным с перерезывающей силой, в проекции уравнения импульсов на касательную к оси струи. При проектировании уравнения количества движения на нормаль $\mathbf{n}$ члены, связанные с продольной и перерезывающей силами, имеют одинаковый порядок вследствие малости кривизны оси струи в рассматриваемой задаче.

Пользуясь выражениями (3.5) и (3.6), вычисляем функции φ_1 и φ_2:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1={}^1/_2(\varkappa\Omega_b-k\Omega_\tau-\lambda^{-1}\Omega_{n,s})yz+\\
&+{}^1/_4(\lambda^{-1}\Omega_{b,s}+\varkappa\Omega_n-{}^3/_2k\lambda^{-1}V_{\tau,s}+{}^3/_2k^2V_n)(y^2-z^2)+O(\varepsilon^3|\mathbf{V}|)\\
&\varphi_2={}^1/_4(\varkappa\Omega_b-k\Omega_\tau-\lambda^{-1}\Omega_{n,s})(z^2-y^2)+\\
&+{}^1/_2(\lambda^{-1}\Omega_{b,s}+\varkappa\Omega_n-{}^3/_2k\lambda^{-1}V_{\tau,s}+{}^3/_2k^2V_n)yz+O(\varepsilon^3|\mathbf{V}|)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Из (3.4) и (2.10) с учетом выражения для давления (3.6) находим проекции момента напряжений в сечении. В частности, для сечения, обладающего двойной симметрией ($I_{bn}=0,\ I_n=I_b=I$), имеем

$$\begin{aligned}
&M_n=3\mu I(\lambda^{-1}\Omega_{n,s}+k\Omega_\tau-\varkappa\Omega_b)\\
&M_b=3\mu I(\lambda^{-1}\Omega_{b,s}+\varkappa\Omega_n-{}^3/_2k\lambda^{-1}V_{\tau,s}+{}^3/_2k^2V_n)\\
&M_\tau=\mu I(2\lambda^{-1}\Omega_{\tau,s}+k\lambda^{-1}V_{b,s}+k\varkappa V_n-k\Omega_n)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Для такого сечения в силу выражений (3.9) входящие в уравнение момента количества движения члены, связанные с интегралом $\mathbf{j}_1$, равны с необходимой точностью нулю.

Нетрудно видеть, что система уравнений динамики струи (2.7)—(2.9) с учетом кинематических уравнений (см. пункт 1) и соотношений (2.11)—(2.13), (3.1), (3.7), (3.8), (3.10) оказывается при этом замкнутой. Если же сечение не обладает требуемой симметрией, то задача остается незамкнутой, коль скоро существен член $\mathbf{j}_1$, содержащий оставшуюся неопределенной функцию φ_3 (см. соотношение (2.6)).

Фактически, однако, дело обстоит еще сложнее, поскольку следовало бы, вообще говоря, следить за эволюцией сечения струи. Выше неявно предполагалось, что сечение остается подобным самому себе. Это заведомо справедливо для достаточно тонких струй, сечение которых сохраняет круглую форму благодаря действию сил поверхностного натяжения. Выведенные выше уравнения сохраняют при этом смысл; в них изменяется лишь выражение для продольной силы P, которое принимает вид

$$\begin{aligned}
&P=\Sigma_{\tau\tau}f+P_\alpha,\quad \Sigma_{\tau\tau}=3\mu(\lambda^{-1}V_{\tau,s}-kV_n)-\alpha G,\quad f=\pi a^2\\
&P_\alpha=2\pi a\alpha[1+\lambda^{-2}a_{,s}^2]^{-1/2}\\
&G=a^{-1}(1+\lambda^{-2}a_{,s}^2)^{-1/2}-(1+\lambda^{-2}a_{,s}^2)^{-3/2}\lambda^{-1}[\lambda^{-1}a_{,s}]_{,s}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Здесь $a=a(s, t)$ — радиус струи, α — коэффициент поверхностного натяжения.

Изменяется также проекция M_b момента напряжений в сечении, определяемая в данном случае выражением (3.10), в правой части которого прибавлен член

$$-\alpha k I a^{-1}(1+\lambda^{-2}a_{,s}^2)^{-1/2}$$

Для очень тонких струй влиянием момента и перерезывающей силы можно пренебречь. В результате получим замкнутую систему уравнений безмоментной теории. Например, в случае, когда ось струи — кривая, принадлежащая плоскости $\xi\eta$, уравнения безмоментной теории изгиба струй кругового сечения имеют вид

$$\frac{\partial\lambda f}{\partial t}+\frac{\partial fW}{\partial s}=0,\quad f=\pi a^2$$

$$\frac{\partial\lambda fV_\tau}{\partial t}-\frac{fV_n}{\lambda}\frac{\partial\lambda V_n}{\partial s}+\frac{\partial fV_\tau W}{\partial s}-\lambda fWkV_n=$$

$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial s}+\lambda fF_\tau+\frac{1}{\rho}\lambda q_\tau$$

$$\frac{\partial\lambda fV_n}{\partial t}+\frac{fV_\tau}{\lambda}\frac{\partial\lambda V_n}{\partial s}+\frac{\partial fV_nW}{\partial s}+\lambda kfV_\tau W=$$

$$=\frac{1}{\rho}\lambda kP+\lambda fF_n+\frac{1}{\rho}\lambda q_n;\quad k=\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}\left[1+\left(\frac{\partial H}{\partial s}\right)^2\right]^{-3/2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\lambda V_n;\quad \lambda=\left[1+\left(\frac{\partial H}{\partial s}\right)^2\right]^{1/2};\quad W=V_\tau-V_n\frac{\partial H}{\partial s}$$

Выражение для продольной силы P по-прежнему дается формулами (3.11).

В заключение отметим, что в работах [5–8] дана формальная теория струи как оснащенного континуума, однако замкнутая система соотношений получена, по-видимому, лишь для прямолинейной струи вязкой жидкости и для струй невязкой жидкости.

Поступила 23 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ентов В. М., Ярин А. Л.* Динамика струй капельной жидкости. Препринт Ин-та проблем механики АН СССР, № 127. М., 1979.
2. *Ентов В. М., Ярин А. Л.* Поперечная устойчивость струи капельной жидкости во встречном потоке воздуха. Инж.-физ. ж., 1980, т. 38, № 5.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
4. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.— Л., Гостехиздат, 1935.
5. *Green A. E., Laws N.* A general theory of rods. Proc. Roy. Soc. L., 1966, vol. A293, No. 1433.
6. *Green A. E., Laws N., Naghdi P. M.* Rods, plates and shells. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1968, vol. 64, No. 3.
7. *Green A. E., Laws N.* Ideal fluid jets. Inter. J. Engng Sci., 1968, vol. 6, No. 6.
8. *Green A. E.* On the nonlinear behavior of fluid jets. Inter. J. Engng Sci., 1976, vol. 14, No. 1.