МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1980

УДК 533.6.011.5

ВДУВ ЖИДКОСТИ В СВЕРХЗВУКОВОЙ ПОТОК ЧЕРЕЗ ПРОНИЦАЕМУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

И. И. ВИГДОРОВИЧ

(Москва)

Распределенный вдув газа в сверхзвуковой поток с плоских поверхностей с использованием модели невязкого течения изучался в ряде работ [1–9]. Характерной особенностью течений этого типа является влияние условий, задаваемых на задней кромке тела, на все поле течения вверх по потоку [3–5]. Это происходит в силу того, что градиент давления, возникающий на плоской поверхности, индуцируется слоем вдува, толщина которого в свою очередь зависит от распределения давления на поверхности.

Предположение о малости толщины слоя вдува позволяет пренебречь поперечным градиентом давления в нем и описывать течение вдуваемого газа приближенными уравнениями «тонкого слоя» [1–5]. Кроме того, при умеренных числах Маха набегающего потока течение в слое вдува можно считать несжимаемым [3].

В [7, 8] решена задача о сильном вдуве жидкости в сверхзвуковой поток с поверхности плоской пластины, когда скорость вдува постоянна по ее длине. В данной работе рассмотрен иной закон вдува, при котором расход вдуваемой жидкости зависит от разности давлений на обтекаемой поверхности и в резервуаре, из которого поступает газ. Как и в работах [8, 9], решение получено аналитически в виде универсальных формул, пригодных для любого давления, заданного на задней кромке пластины.

1. Постановка задачи. Рассмотрим вдув жидкости из резервуара с постоянным давлением P_0 через плоскую проницаемую пластину в набегающий сверхзвуковой поток газа. При этом на пластине образуется тонкий слой вдуваемой жидкости, обтекаемый сверхзвуковым потоком и отделенный от него контактной поверхностью. Жидкость вдувается по всей длине пластины от передней до задней кромки. Будем рассматривать такую организацию вдува, при которой скорость вдува направлена по нормали к поверхности, а расход жидкости q пропорционален разности давлений на обтекаемой поверхности и в резервуаре

$$q=k(P_0-p) \tag{1.1}$$

где коэффициент пропорциональности k является характеристикой пористой или перфорированной пластины. Соотношение (1.1) выражает закон Дарси при одномерном течении в пористой среде. Оно также будет выполняться при небольших скоростях вдува через перфорированную пластину [10].

Течение в слое вдуваемой жидкости будем считать невязким и несжимаемым, а относительную толщину этого слоя — малой величиной порядка δ. Выберем декартову систему координат с осью абсцисс, направленной по пластине, и началом на ее передней кромке.

Будем считать угол атаки пластины произвольным. Однако при малой толщине слоя вдува можно ограничиться рассмотрением лишь нулевого угла атаки, беря при этом в качестве параметров набегающего потока ρ_∞, U_∞, P_∞, M_∞ — параметры за присоединенным скачком уплотнения или простой волной разрежения на пластине без вдува.

В слое вдува перейдем к безразмерным переменным, имеющим порядок единицы, по формулам

$$x = lX, \quad y = \delta l Y, \quad u = \frac{V_w}{\delta} u' \tag{1.2}$$

$$v = V_w v', \quad p = P_\infty + \rho_0 \left(\frac{V_w}{\delta}\right)^2 p'$$

Здесь l — длина пластины, ρ_0, V_w — плотность и характерная нормальная скорость вдуваемой жидкости, равная $(k/\rho_0)(P_0 - P_\infty)$.

При умеренных сверхзвуковых скоростях набегающего потока давление на контактной поверхности, используя теорию малых возмущений, определим по формуле Аккерета

$$p - P_\infty = \rho_\infty U_\infty^2 \frac{\delta}{\sqrt{\beta}} \frac{dY_s}{dX}, \qquad \beta = M_\infty^2 - 1 \tag{1.3}$$

где Y_s — безразмерная ордината контактной поверхности. Из (1.3) следует, что безразмерное давление, имеющее порядок единицы, можно ввести также по формуле

$$p = P_\infty + p_\infty U_\infty^2 \delta p' \tag{1.4}$$

Сравнение формул (1.2), (1.4) для безразмерного давления дает для порядка относительной толщины слоя вдува выражение

$$\delta = \left(\frac{\rho_0 V_w^2}{\rho_\infty U_\infty^2}\right)^{1/3} = \left[\frac{k^2 (P_0 - P_\infty)^2}{\rho_0 \rho_\infty U_\infty^2}\right]^{1/3}$$

Формула (1.1) в безразмерных переменных принимает вид

$$v_w' = 1 - k_1 p', \quad k_1 = \frac{\gamma M_\infty^2 \delta}{\Delta} = (\gamma M_\infty^2)^{2/3} \left(\frac{k^2 P_\infty}{\rho_0 \Delta}\right)^{1/3}, \quad \Delta = \frac{P_0}{P_\infty} - 1 \tag{1.5}$$

Отсюда видно, что характер вдува определяется величиной относительной разности давлений в резервуаре и набегающем потоке. Безразмерный коэффициент k_1 имеет порядок единицы, когда $\Delta \sim \delta$ или $\Delta \sim k^2 P_\infty / \rho_0$. Случаю равномерного вдува при $k_1 = 0$ соответствует $\Delta \gg \delta$ или $\Delta \gg k^2 P_\infty / \rho_0$.

Рассмотрим теперь произвольную зависимость расхода вдуваемой жидкости от перепада давлений $q = f(P_0 - p)$ или

$$q = f[P_\infty (\Delta - \delta \gamma M_\infty^2 p')] \tag{1.6}$$

При малых δ формула (1.6) будет давать либо равномерный вдув $q = f(P_0 - P_\infty)$ при $\Delta \gg \delta$, либо соотношение (1.5), когда $\Delta \sim \delta$, а производная $f'(0)$ существует и отлична от нуля.

В [5] для безразмерных переменных из уравнений Эйлера в нулевом приближении относительно δ^2 получена следующая система уравнений тонкого слоя в переменных Мизеса:

$$u' \frac{\partial u'}{\partial X} + \frac{\partial p'}{\partial X} = 0, \qquad \frac{\partial p'}{\partial \psi} = 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial \psi} = \frac{1}{u'}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = -v', \qquad \frac{\partial \psi}{\partial Y} = u'$$

Интегрирование этой системы уравнений дает следующее выражение для ординаты контактной поверхности [5]:

$$Y_s(X)=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^X\frac{(1-k_1p'(\xi))\,d\xi}{\sqrt{p'(\xi)-p'(X)}}$$

которое вместе с (1.3) приводит к интегральному уравнению для давления на пластине

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^X\frac{(1-k_1p'(\xi))\,d\xi}{\sqrt{p'(\xi)-p'(X)}}=\sqrt{\beta}\int\limits_0^X p'(\xi)\,d\xi,\qquad 0\leqslant X\leqslant 1 \tag{1.7}$$

Задание давления на задней кромке пластины обеспечит единственность решения задачи. Таким образом, уравнение (1.7) необходимо решать при граничном условии $p'(1)=p_1'$, где p_1' – обезразмеренное по формуле (1.4) давление на задней кромке пластины.

На передней кромке пластины установится давление $p'=k_1^{-1}$. Ему соответствует наклон контактной поверхности в начале координат $\delta k_1^{-1}\sqrt{\beta}=$ $=\Delta\sqrt{\beta}/\gamma M_\infty^2$.

Введем параметры подобия: $t=-\beta^{1/3}p'$, $t_1=-\beta^{1/3}p_1'$, $\alpha=k_1^{-1}\beta^{1/3}$.

Из (1.7) получим следующее уравнение для функции $X(t)$:

$$\int\limits_{-\alpha}^{t}\frac{(1+\tau/\alpha)X'(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}=-\sqrt{2}\int\limits_{-\alpha}^{t}\tau X'(\tau)\,d\tau \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) линейно. Решение этого уравнения $X_0(t)$ в промежутке $-\alpha\leqslant t<+\infty$, удовлетворяющее граничному условию $X_0(+\infty)=1$, имеет универсальный характер. Любое решение уравнения (1.8), соответствующее некоторому давлению на задней кромке t_1, выражается через него по формуле $X(t)=X_0(t)/X_0(t_1)$, $-\alpha\leqslant t\leqslant t_1$.

Введем вторую универсальную функцию $Y_0(t)$, через которую безразмерная ордината контактной поверхности выражается по формуле

$$Y_s(t)=\beta^{1/6}Y_0(t)/X_0(t_1),\qquad -\alpha\leqslant t\leqslant t_1$$

$$Y_0(t)=-\int\limits_{-\alpha}^{t}\tau X_0'(\tau)\,d\tau$$

Для суммарной силы F, действующей на пластину, и суммарного расхода вдуваемой жидкости Q (поскольку рассматриваемая задача является плоской, эти величины берутся в расчете на полосу пластины единичной ширины) как функций давления на задней кромке получим

$$f(t_1)\equiv\frac{(F-P_\infty l)\beta^{1/3}}{\delta\rho_\infty U_\infty^2 l}=\frac{Y_0(t_1)}{X_0(t_1)}$$

$$\varkappa(t_1)\equiv\frac{Q}{k(P_0-P_\infty)l}=1-\frac{Y_0(t_1)}{\alpha X_0(t_1)}$$

2. Решение интегрального уравнения. Для решения интегрального уравнения (1.8) применим двустороннее преобразование Лапласа [11]. Обозначим через $h(z)$ изображение по Лапласу функции $X_0'(t)$. Тогда из (1.8) по теореме о свертке [11] получим дифференциальное уравнение для функции $h(z)$:

$$\left(h(z)-\frac{1}{\alpha}h'(z)\right)\sqrt{\frac{\pi}{2z}}=\frac{1}{z}h'(z)$$

Решение этого уравнения есть

$$h(z)=\exp\left[-2\alpha^2\sqrt{\frac{2z}{\pi}}+\alpha z+\frac{4}{\pi}\alpha^3\ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\pi z}{2}}\right)\right] \tag{2.1}$$

Постоянная интегрирования в (2.1) положена равной единице, что, как будет показано ниже, обеспечит выполнение условия $X_0(+\infty)=1$.

Предельный переход в (2.1) при $\alpha\to+\infty$ дает выражение $h(z)=\exp\left({}^1/_3\sqrt{2\pi z^3}\right)$, соответствующее равномерному вдуву [8].

По формуле обращения Меллина [11] получим представление универсальных функций в виде контурных интегралов

$$X_0(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}(1+\sqrt{z})^\nu\exp\left(-\nu\sqrt{z}+\frac{2}{\pi}\alpha^2(\alpha+t)z\right)\frac{dz}{z}$$

$$Y_0(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\alpha(1+\sqrt{z})^{\nu-1}\exp\left(-\nu\sqrt{z}+\frac{2}{\pi}\alpha^2(\alpha+t)z\right)\frac{dz}{\sqrt{z}} \tag{2.2}$$

$$-\alpha\leqslant t<+\infty,\qquad a>0,\qquad \nu=4\pi^{-1}\alpha^3$$

Введем новую переменную $s=2\pi^{-1}\alpha^2(\alpha+t)$, $s\geqslant0$.

Разложим степенную функцию, стоящую под интегралом в первом выражении (2.2), в ряд по убывающим степеням z:

$$X_0(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-n)\,n!}z^{(\nu-n)/2-1}\exp(-\nu\sqrt{z}+sz)\,dz,\qquad a>1$$

Выполним почленное интегрирование этого ряда по бесконечному промежутку, которое законно на основании теоремы, данной в [12]. Используя при этом операционное соответствие [13]

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}z^{\beta/2-1}\exp(-\nu\sqrt{z}+sz)\,dz=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(2s)^{-\beta/2}\exp\left(-\frac{\nu^2}{8s}\right)D_{\beta-1}\left(\frac{\nu}{\sqrt{2s}}\right),\qquad a>0,\qquad s\geqslant0$$

в котором $D_\beta(x)$ — функция параболического цилиндра [14], будем иметь

$$\begin{gathered}X_0(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(-\frac{\nu^2}{8s}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-n)\,n!}(2s)^{(n-\nu)/2}D_{\nu-n-1}\left(\frac{\nu}{\sqrt{2s}}\right)\\ Y_0(s)=\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(-\frac{\nu^2}{8s}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-n)\,n!}(2s)^{(n-\nu)/2}D_{\nu-n-1}\left(\frac{\nu}{\sqrt{2s}}\right)\end{gathered} \tag{2.3}$$

Выражение для второй универсальной функции здесь получено аналогично.

По теореме сложения для функций параболического цилиндра [14] второй ряд (2.3) равен

$$Y_0(s)=\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left[{}^1/_4\left(\sqrt{2s}+\frac{\nu}{\sqrt{2s}}\right)^2-\frac{\nu^2}{4s}\right](2s)^{-\nu/2}D_{\nu-1}\left(\sqrt{2s}+\frac{\nu}{\sqrt{2s}}\right)$$

К этому же результату можно прийти, изменяя путь интегрирования в интеграле (2.2).

При натуральных значениях ν функции параболического цилиндра выражаются через многочлены Эрмита $H_n(x)$ [14], а ряды (2.3) есть конечные суммы. Таким образом, для натуральных ν будем иметь

$$X_0(s) = 1 - \Phi\left(\frac{\nu}{2\sqrt{s}}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\nu^2}{4s}\right)\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\nu}\frac{\nu!}{(\nu-n)!n!}(4s)^{-n/2}H_{n-1}\left(\frac{\nu}{2\sqrt{s}}\right)$$

$$Y_0(s) = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\nu^2}{4s}\right)(4s)^{-\nu/2}H_{\nu-1}\left(\sqrt{s}+\frac{\nu}{2\sqrt{s}}\right)$$

Здесь $\Phi(x)$ — функция вероятности ошибок [15].

Асимптотика функций параболического цилиндра при больших значениях аргумента имеет вид [14]

$$D_\beta(x) \sim x^\beta\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2m-\beta)}{\Gamma(-\beta)m!}(-2x^2)^{-m}$$

$$x\to+\infty$$

Подставляя это выражение в ряды (2.3) и производя перегруппировку членов, получим асимптотические разложения

$$X_0(s) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\nu^{\nu-1}(2s)^{1/2-\nu}\exp\left(-\frac{\nu^2}{4s}\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_ns^n$$

$$Y_0(s) \sim \alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}\nu^{\nu-1}(2s)^{1/2-\nu}\exp\left(-\frac{\nu^2}{4s}\right)\sum_{n=0}^{\infty}b_ns^n$$

$$s\to0,\quad a_0=b_0=1$$

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{\nu(1-\nu)\ldots(n-\nu)}{\nu^{2n}}\sum_{m=0}^{n}\frac{\Gamma(1-\nu+n+m)(2\nu)^{n-m}}{\Gamma(1-\nu+n)(n-m)!m!(n-m-\nu)}$$

$$b_n = (-1)^n\frac{(1-\nu)\ldots(n-\nu)}{\nu^{2n}}\sum_{m=0}^{n}\frac{\Gamma(1-\nu+n+m)(2\nu)^{n-m}}{\Gamma(1-\nu+n)(n-m)!m!} =$$

$$= \frac{(1-\nu)\ldots(n-\nu)}{\nu^{2n}}L_n^{\nu-2n-1}(2\nu),\qquad n=1,2,\ldots$$

Здесь $L_n^\beta(x)$ — обобщенные многочлены Лаггера [14].

Получим теперь асимптотические разложения универсальных функций при $s\to+\infty$.

Для этого, используя производящую функцию для многочленов Лаггера [14], разложим подынтегральные функции (2.2) в ряд Маклорена по полуцелым степеням z. Для первой универсальной функции, например, будем иметь

$$X_0(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{\nu-n}(\nu)z^{n/2-1}e^{sz}\,dz$$

Изменяя в этом выражении порядок интегрирования и суммирования, получим асимптотическое разложение функции $X_0(s)$ при $s\to+\infty$ [16].

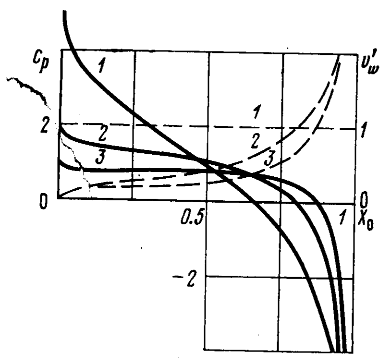
Окончательно будем иметь

$$X_0(s) \sim 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n-1)!!L_{2n+1}^{\nu-2n-1}(\nu)(2s)^{-n-1/2}$$

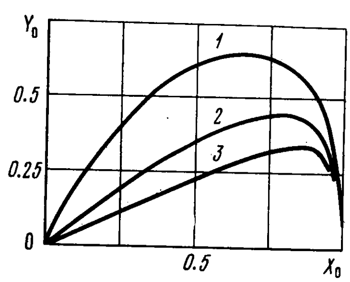
$$Y_0(s) \sim \alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n-1)!! L_{2n}^{\nu-2n-1}(\nu) (2s)^{-n-1/2}$$

$$s \to +\infty$$

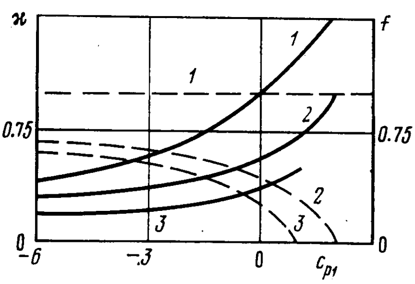
Полученные представления универсальных функций позволяют вычислить распределение давления на пластине и форму контактной поверхности. На фиг. 1 в переменных подобия изображены универсальные кривые, дающие распределение коэффициента давления $c_p = -2t$ (сплошные линии) и расхода вдуваемой жидкости (штриховые линии) по длине пластины. На фиг. 2 изображена форма контактной поверхности $Y_0(X_0)$. Для получения распределения давления и расхода на пластине, а также формы контактной поверхности, соответствующих некоторому давлению на задней кромке t_1, следует растянуть кривые, данные на фиг. 1, по оси абсцисс, а кривые, данные на фиг. 2, также и по оси ординат в $1/X_0(t_1)$ раз и взять их части, соответствующие промежутку $0 \leqslant X \leqslant 1$. На фиг. 3 даны зависимости силы, действующей на пластину (сплошные линии), и суммарного расхода вдуваемой жидкости (штриховые линии) от величины коэффициента давления на задней кромке c_{p1}.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 1—3 кривые *1* соответствуют равномерному вдуву [8], а кривые *2*, *3* — значениям параметра $\alpha = 1.0$, 0.5 соответственно.

Автор благодарит В. А. Левина за постановку задачи и помощь в работе.

Поступила 24 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thomas P. D., Conti R. J., Kruger C. H.* Flow over finite bodies with massive injection. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 11.
2. *Thomas P. D.* Flow over a finite plate with massive injection. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 4.
3. *Матвеева Н. С., Нейланд В. Я.* Сильный вдув на теле конечной длины в сверхзвуковом потоке. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 5.
4. *Нейланд В. Я.* Вдувание газа в гиперзвуковой поток. Уч. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 6.
5. *Левин В. А.* Сильный вдув на поверхности тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 5.

6. *Зак Л. И.* Сверхзвуковое обтекание тела конечных размеров при наличии интенсивного вдува горючей смеси газов на его боковой поверхности. Научн. тр. НИИ мех. МГУ, 1974, № 32.
7. *Липатов И. И.* Сверхзвуковое обтекание клина конечных размеров при сильном вдуве газа через его поверхность. Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 5.
8. *Вигдорович И. И., Левин В. А.* Сильный вдув жидкости в сверхвуковой поток с поверхности пластины конечной длины. В сб. Неравновесные течения газа и оптимальные формы тел в сверхзвуковом потоке. М., Изд-во МГУ, 1978.
9. *Вигдорович И. И.* Сильный вдув жидкости в гиперзвуковой поток с поверхности пластины конечной длины. ПММ, 1979, т. 43, вып. 5.
10. *Идельчик И. Е.* Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.— Л., Госэнергоиздат, 1960.
11. *Поль Б. ван дер., Бреммер Х.* Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
12. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. М., «Наука», 1978.
13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований, т. 1. М., «Наука», 1969.
14. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 2. М., «Наука», 1974.
15. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции (Формулы, графики, таблицы). М., «Наука», 1977.
16. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. М., «Высшая школа», 1966.