МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1980

УДК 532.593

О РАЗВИТИИ ПЛОСКИХ ВОЛН В ПОТОКЕ НЕПРЕРЫВНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИ ДЕЙСТВУЮЩИМИ ДАВЛЕНИЯМИ

С. Ф. ДОЦЕНКО

(Севастополь)

В линейной постановке исследуется процесс развития не затухающих со временем плоских волн, вызываемых гармоническими по времени давлениями, приложенными к свободной поверхности первоначально невозмущенного потока непрерывно стратифицированной жидкости конечной глубины. Случаи однородной и двухслойной жидкостей рассмотрены в [1–3]. Нестационарные волны в непрерывно стратифицированном потоке, генерируемые не зависящими от времени давлениями, исследовались в работе [4].

1. Пусть двумерный горизонтальный поток идеальной несжимаемой жидкости, заполняющий часть пространства $-\infty<x<+\infty$, $-H\leqslant z\leqslant 0$ ($H=\text{const}$), течет со скоростью $v=\text{const}>0$ в положительном направлении оси x. Плотность жидкости в невозмущенном состоянии ρ_0 является гладкой функцией вертикальной координаты z, причем распределение $\rho_0(z)$ гидростатически устойчивое ($\rho_0'(z)<0$).

Исследуем волны, вызываемые давлениями $p_0=f(x)\exp(-i\sigma_0 t)$, $\sigma_0>0$, прикладываемыми в момент времени $t=0$ к ограниченной области свободной поверхности первоначально невозмущенного потока.

В рамках линейной теории движение жидкости описывается следующей системой уравнений, граничных и начальных условий:

$$Du=-\rho_0^{-1}(p_x+p_{0x}),\quad Dw=-\rho_0^{-1}(g\rho+p_z) \tag{1.1}$$

$$u_x+w_z=0,\quad D\rho+\rho_{0z}w=0$$

$$p-\rho_1 g\zeta=0,\quad D\zeta=w\quad (z=0),\quad w=0\quad (z=-H)$$

$$u=w=\rho=\zeta=0\quad (t=0)$$

Здесь $D=\partial/\partial t+v\partial/\partial x$, u, w, p, ρ — динамические возмущения горизонтальной и вертикальной скоростей, давления и плотности, ζ — возвышение свободной поверхности, $\rho_1=\rho_0(0)$, g — ускорение свободного падения.

С помощью преобразований Фурье по x и Лапласа по t для трансформанты Фурье — Лапласа $W(m, z, \alpha)$ функции $w(x, z, t)$ из (1.1) получаем кравую задачу

$$L(m^2,\beta^2)W=0\quad (-H\leqslant z\leqslant 0) \tag{1.2}$$

$$L_1(m^2,\beta^2)W=-\frac{m^2P(m)}{(\alpha+i\sigma_0)\beta\rho_1}\quad (z=0),\quad W=0\quad (z=-H)$$

$$L=\frac{d}{dz}\left(\rho_0\frac{d}{dz}\right)-m^2\left(\rho_0-\frac{g\rho_{0z}}{\beta^2}\right),\quad L_1=\frac{d}{dz}+\frac{gm^2}{\beta^2}$$

Здесь $\beta=\alpha+imv$, $P(m)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$.

Пусть $\Phi=\Phi(m^2, z, \beta^2)$ — решение задачи Коши: $L\Phi=0$, $\Phi(m^2, -H, \beta^2)=0$, $\Phi_z(m^2, -H, \beta^2)\neq 0$. Выражая решение задачи (1.2) через функцию Φ и применяя соответствующие обратные интегральные преобразования, находим

$$w=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m^2P(m)}{\rho_1}I(m,z,t)e^{imx}\,dm \tag{1.3}$$

$$I=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}\frac{\Phi(m^2,z,\beta^2)e^{\alpha t}}{(\alpha+i\sigma_0)\beta\Delta(m^2,\beta^2)}\,d\alpha \tag{1.4}$$

$$\Delta=\Phi_z(m^2,0,\beta^2)+\frac{gm^2}{\beta^2}\Phi(m^2,0,\beta^2),\qquad \tau>0$$

Вычислим интеграл I аналогично работе [4], используя теорию вычетов. Полюсами подынтегральной функции в (1.4) являются точки $\alpha=-i\sigma_0$ и $\alpha=\beta-imv$, где β — корни уравнения $\Delta=0$. Последнее при $\beta=i\sigma$ переходит в дисперсионное уравнение для волн в непрерывно стратифицированной жидкости. Поэтому [5, 6] существует счетное множество чисто мнимых простых корней β, расположенных симметрично относительно точки $\beta=0$. Следовательно, отличные от $\alpha=-i\sigma_0$ полюсы имеют вид $\alpha=-i(mv\pm\sigma_j)$, где $j=1, 2, \ldots$; $\sigma_j(m)$ можно считать нечетными функциями, $\sigma_j(0)=0$, $|\sigma_j|>|\sigma_{j+1}|$ при $m\neq 0$.

Вычисляя интеграл (1.4) с помощью теоремы Коши о вычетах, получим

$$I=ie^{-i\sigma_0 t}\left(F_0-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{2}F_jk_{sj}^{-1}e^{-ik_{sj}t}\right) \tag{1.5}$$

$$F_0=\frac{\Phi_0}{\beta_0\Delta_0},\qquad F_j=\frac{\Phi_j}{\sigma_j\Delta_j},\qquad \beta_0=mv-\sigma_0$$

$$\Phi_0=\Phi(m^2, z, -\beta_0^2),\qquad \Phi_j=\Phi(m^2, z, -\sigma_j^2),\qquad \Delta_0=\Delta(m^2, -\beta_0^2)$$

$$\Delta_j=\left.\frac{\partial\Delta(m^2,-\sigma^2)}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_j},\qquad k_{sj}=mv+\sigma_0+(-1)^s\sigma_j$$

Поскольку $w(x, z, 0)=0$, то в силу единственности преобразования Фурье из (1.3), (1.5) находим соотношение

$$F_0=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{2}F_jk_{sj}^{-1}$$

которое позволяет преобразовать ряд (1.5) к виду

$$I=-e^{-i\sigma_0 t}t\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{2}F_j\int_0^1 e^{-ik_{sj}t\eta}\,d\eta \tag{1.6}$$

Используя формулы (1.3), (1.6), окончательно получим интегральное представление для неустановившихся вынужденных волн в потоке непрерывно стратифицированной жидкости

$$w=\sum_{j=1}^{\infty}w_j,\qquad w_j=e^{-i\sigma_0 t}\sum_{s=1}^{2}w_{sj} \tag{1.7}$$

$$(1.8)\qquad w_{sj}=-\frac{t}{2\pi\rho_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{1} m^2PF_je^{i(mx-k_{sj}t\eta)}d\eta\, dm$$

Формула (1.7) представляет собой разложение поля скорости w в ряд по собственным функциям краевой задачи $L\Phi=0$, $L_1\Phi=0$ $(z=0)$, $\Phi=0$ $(z=-H)$. Первый член этого ряда описывает поверхностные волны, последующие – внутренние волны, соответствующие отдельным модам.

2. Рассмотрим асимптотическое поведение волны w_j при достаточно больших $|x|$ и t. Применим к интегралам w_{sj} метод стационарной фазы в многомерном случае [7]. Искомые стационарные точки (m, η) являются решениями системы уравнений

$$(2.1)\qquad k_{sj}=mv-\sigma_0+(-1)^s\sigma_j(m)=0,\qquad x-U_{sj}(m)\eta t=0$$

при условии $\eta\in(0, 1)$, которое эквивалентно неравенствам

$$(2.2)\qquad 0<x[U_{sj}(m)]^{-1}<t,\qquad U_{sj}=v+(-1)^s\sigma_j'$$

где штрих означает производную по m.

Проведем анализ корней уравнений $k_{sj}(m)=0$. Запишем их в виде

$$(2.3)\qquad \varphi_{sj}(m)=\sigma_0,\qquad \varphi_{sj}=mv+(-1)^s\sigma_j(m)$$

При исследовании поведения функций φ_{sj} использованы следующие свойства [5, 6] дисперсионных зависимостей $\sigma=\sigma_j(m)$:

$$(2.4)\qquad \sigma_j'(0)=\lim_{m\to 0}(\sigma_jm^{-1})=v_j>0,\qquad \sigma_j'<v_j\quad (m\neq 0)$$

$$(\sigma_jm^{-1})'<0\quad (m\neq 0),\qquad \sigma_jm^{-1}>\sigma_j'\quad (m\neq 0)$$

$$\sigma_1\sim\pm\sqrt{g|m|}\quad (m\to\pm\infty),\qquad \sigma_j\sim\pm N_0\quad (m\to\pm\infty)$$

$$N_0=\max_z(\sqrt{-g\rho_0^{-1}\rho_{0z}})$$

Рассмотрим возможные случаи.

1. $s=1$, $v\geqslant v_j$. Из (2.3), (2.4) следует, что $\varphi_{1j}(0)=0$, $\varphi_{1j}'\geqslant v-v_j\geqslant 0$, $\varphi_{1j}\gtrless 0$ при $m\gtrless 0$, $\varphi_{1j}(\pm\infty)=\pm\infty$. Поэтому существует единственный простой корень $m=m_{1j}>0$ и для него $U_{1j}>0$.

2. $s=1$, $v<v_j$. Функция φ_{1j} обращается в 0 в точках $m=0$, $m=\pm n_j$ $(n_j>0)$, где $\sigma_j(n_j)n_j^{-1}=v$. Помимо этого, $\varphi_{1j}>0$ при $m\in(-n_j, 0)$ и $m\in(n_j, +\infty)$, $\varphi_{1j}'>0$ при $m\in[n_j, +\infty)$, $\varphi_{1j}'(-n_j)>0$, $\varphi_{1j}'(0)<0$. Положим $\Omega_j=\max\limits_{m\leqslant 0}\varphi_{1j}(m)$. Тогда при $\sigma_0>\Omega_j$ уравнение $k_{1j}=0$ имеет один простой корень $m=m_{1j}>n_j$, для которого $U_{1j}>0$, при $0<\sigma_0\leqslant\Omega_j$ дополнительно существует конечное число корней $m=m_{lj}\in(-n_j, 0)$, $l=2,\ldots, J-1$. Для простых отрицательных корней $U_{1j}\neq 0$, для кратных $U_{1j}=0$. Случаю $\sigma_0=\Omega_j$ соответствует кратный корень. При достаточно малых значениях σ_0 всегда найдется пара отрицательных корней, для которых знаки U_{1j} противоположны.

Наиболее простой при $v<v_j$ является ситуация, когда $\sigma_j''\neq 0$ $(\varphi_{1j}''\neq 0)$ на отрезке $(-n_j, 0)$. В этом случае уравнение $\varphi_{1j}=0$ при $\sigma_0=\Omega_j$ имеет один кратный корень, при $0<\sigma_0<\Omega_j$ ровно два простых корня $m=m_{2j}$, $m=m_{3j}$ $(-n_j<m_{2j}<m_{3j}<0)$, причем $U_{1j}(m_{2j})>0$, $U_{1j}(m_{3j})<0$.

3. $s=2$. Имеем $\varphi_{2j}(0)=0$, $\varphi_{2j}'\geqslant v>0$, $\varphi_{2j}\gtrless 0$ при $m\gtrless 0$, $\varphi_{2j}(\pm\infty)=\pm\infty$. Следовательно, уравнение $k_{2j}=0$ всегда имеет один простой корень $m=m_{Jj}>0$ и для него $U_{2j}>0$.

Каждому решению (m, η) системы (2.1) соответствует прогрессивная волна, имеющая наибольшую амплитуду в точках x, удовлетворяющих условию (2.2). Асимптотическое выражение для w при $|x|$, $t\to\infty$ представляет собой суперпозицию таких волн и в общем случае имеет вид

$$
(2.5)\qquad w=\sum_{j=1}^{\infty} w_j,\quad w_j=\sum_{l=1}^{J} A_{lj}(z)\,e^{i(m_{lj}x-\sigma_0 t)}+O(|x|^{-1/2})+O(t^{-1/2})
$$

$$
A_{lj}=B_{lj}\quad (x\in X_{lj}),\qquad A_{lj}=0\quad (x\overline{\in} X_{lj})
$$

$$
B_{lj}=C_{1j}(m_{lj},\ z)\quad (l=1,\ldots,J-1),\qquad B_{Jj}=C_{2j}(m_{Jj},\ z)
$$

$$
C_{sj}(m,\ z)=-m^2PF_j[\rho_1|U_{sj}(m)|]^{-1}
$$

Здесь X_{lj} — отрезок на оси x с концами 0, $U_{1j}(m_{lj})t$ при $l=1,\ldots,J-1$ или 0, $U_{2j}(m_{Jj})t$ при $l=J$.

Из формул (2.5) и проведенного выше анализа волновых чисел следует, что давления вида $p_0=f(x)\exp(-i\sigma_0 t)$, приложенные в ограниченной области свободной поверхности двумерного потока непрерывно стратифицированной жидкости, текущей со скоростью $v>0$, при всех $v>0$, $\sigma_0>0$ генерируют не затухающие со временем поверхностные и внутренние волны. Поле вертикальной скорости, соответствующее j-й волновой моде, является суперпозицией конечного числа прогрессивных волн, каждая из которых имеет наибольшую амплитуду в определенной ограниченной области пространства, расширяющейся со временем пропорционально t. При $v\geqslant v_j$, $\sigma_0>0$ или $v<v_j$, $\sigma_0>\Omega_j$ поле w_j включает две волны указанного вида, при $v<v_j$, $0<\sigma_0<\Omega_j$ могут дополнительно генерироваться незатухающие прогрессивные волны, существующие только вверх или только вниз по потоку от начала координат, но всегда распространяющиеся в отрицательном направлении оси x.

Значениям $v<v_j$, $\sigma_0\leqslant\Omega_j$, при которых $k_{1j}=k_{1j}'=0$, соответствуют кратные стационарные точки, и определенные слагаемые в формулах (2.5) теряют свой смысл ($U_{1j}=0$, $C_{1j}=\infty$). Покажем, следуя методике работы [4], что при таких значениях исходных параметров происходит резонансное возбуждение волны, сопровождающееся степенным ростом ее амплитуды со временем.

Действительно, пусть $m=m_0\in(-n_j,\ 0)$ — единственный M-кратный корень уравнения $k_{1j}=0$ $(M\geqslant1)$, $x=\mathrm{const}$. Из (1.8) находим

$$
(2.6)\qquad \frac{\partial w_{1j}}{\partial t}=\int_{-\infty}^{+\infty} G_j e^{-ik_{1j}t}\,dm,\qquad G_j=-\frac{m^2PF_j}{2\pi\rho_1}e^{imx}
$$

К интегралу (2.6) применим метод стационарной фазы при $t\to\infty$, учитывая, что $m=m_0$ — стационарная точка порядка M. Получим

$$
(2.7)\qquad \frac{\partial w_{1j}}{\partial t}\sim G_{1j}(x,z)\,t^{-1/(M+1)}e^{im_0x}\qquad (t\geqslant T>0)
$$

где G_{1j} — известная функция. Интегрируя (2.7) по отрезку $[T,\ t]$, найдем искомую оценку

$$
w_{1j}=O(t^{M/(M+1)})\,e^{im_0x}\qquad (t\to\infty)
$$

Заметим, что для резонансно возбуждаемой вынужденной волны фазовая скорость, групповая скорость и скорость потока равны между собой, т. е.

$$
[\sigma_0+\sigma_j(m_0)]m_0^{-1}=\sigma_j'(m_0)=v
$$

3. Рассмотрим простейший закон изменения плотности $\rho_0=\rho_1 e^{-kz}$, $k>0$. Влияние плотностной стратификации на линейные поверхностные волны, как известно, мало и поэтому процесс развития волны w_1 аналогичен происходящему в потоке однородной жидкости [1, 2].

Проанализируем развитие не затухающих со временем внутренних волн, соответствующих j-й моде. С этой целью аппроксимируем функции $\sigma_j(m)$, $j\geqslant 2$, дисперсионными зависимостями

$$\sigma_j=N_0 m[m^2+(j-1)^2\pi^2H^{-2}]^{-1/2},\qquad N_0=(gk)^{1/2}$$

найденными в приближении Буссинеска с заменой свободной поверхности твердой крышкой, что позволяет отфильтровать поверхностные волны без существенного искажения внутренних [6, 8].

Введем безразмерные переменные и параметры по формулам

$$x=\frac{Hx_1}{(j-1)\pi},\qquad t=\frac{t_1}{N_0},\qquad m=\frac{(j-1)\pi\xi}{H}$$

$$\Omega=\frac{\sigma_0}{N_0},\qquad F=\frac{v^2}{v_j^2},\qquad v_j=\frac{HN_0}{(j-1)\pi}$$

Тогда уравнения (2.3) и неравенства (2.2) принимают вид

$$\varphi_s(\xi)=\Omega,\qquad \varphi_s=\xi[F^{1/2}+(-1)^s(1+\xi^2)^{-1/2}],\qquad s=1,2$$

$$0<x_1[U_s(\xi)]^{-1}<t_1,\qquad U_s=F^{1/2}+(-1)^s(1+\xi^2)^{-3/2}$$

Используя результаты п. 2 и конкретный вид функций φ_s, легко провести полный анализ структуры не затухающего со временем волнового движения, соответствующего данной моде внутренних волн.

1. $F\geqslant 1$, $\Omega>0$ или $F<1$, $\Omega>\Omega_0(F)$, где $\Omega_0=(1-F^{1/3})^{3/2}$. Генерируются две незатухающие волны с волновыми числами ξ_s ($s=1,4$). Эти волны существуют в областях $0<x<u_s t$, расположенных вниз по потоку, и распространяются в положительном направлении оси x, причем $\xi_1>\xi_4$, $u_1=U_1(\xi_1)>0$, $u_4=U_2(\xi_4)>0$, $u_1<F^{1/2}<u_4$.

2. $F<1$, $\Omega=\Omega_0(F)$. Помимо указанных выше двух волн происходит резонансное возбуждение бегущей вверх по потоку волны с волновым числом $\xi_0=-(F^{-1/3}-1)^{1/2}$. Амплитуда вертикальной скорости этой волны увеличивается по закону $t^{1/2}$.

3. $F<1$, $0<\Omega<\Omega_0(F)$. Генерируются четыре волны с волновыми числами ξ_s ($s=1-4$), удовлетворяющими неравенствам

$$-(F^{-1}-1)^{1/2}<\xi_2<\xi_0<\xi_3<0,\qquad \xi_1>\xi_4>(F^{-1}-1)^{1/2}$$

Волны с волновыми числами $\xi_{1,4}$ аналогичны возникающим в случае $F<1$, $\Omega>\Omega_0(F)$. Волны, соответствующие ξ_2 и ξ_3, распространяются в отрицательном направлении оси x, однако если первая существует в области вниз по потоку ($0<x<u_2 t$, $u_2=U_1(\xi_2)>0$), то вторая — в области вверх по потоку ($u_3 t<x<0$, $u_3=U_1(\xi_2)<0$). Скорости передних фронтов для перечисленных волн удовлетворяют неравенствам

$$F^{1/2}-1<u_3<0<u_2<u_1<F^{1/2}<u_4<F^{1/2}+1$$

Следует отметить, что для не затухающих со временем поверхностных волн в однородном потоке [1, 2] справедлива аналогичная классификация, если положить

$$F=\frac{v^2}{gH},\qquad \Omega=\sigma_0\sqrt{\frac{H}{g}},\qquad \Omega_0=\max_{\xi\leqslant 0}(\xi F^{1/2}-(\xi\,th\,\xi)^{1/2}),\qquad \xi=mH$$

Рассмотрим волновое движение в целом.

Из проведенного выше анализа следует, что при $v\geqslant v_1$, $\sigma_0>0$ и $v<v_1$, $\sigma_0>\Omega_1$ не затухающие со временем волны образуются только вниз по потоку от области приложения давлений, причем резонансное возбуждение волн невозможно. Для скоростей потока $v_{l+1}\leqslant v<v_l$ ($l=1,\ldots$) существует ровно l значений частоты σ_0 изменения внешних давлений $\Omega_1>\ldots>\Omega_l$, таких, что при $\sigma=\Omega_j$ резонансно возбуждается j-я мода. Если $v_{l+1}\leqslant v<v_l$ и $\Omega_{j+1}<\sigma<\Omega_j$ ($j=1,\ldots,l-1$) или $0<\sigma_0<\Omega_j$ ($j=l$), то помимо волнового следа вверх по потоку от области приложения давлений генерируются не затухающие со временем волны, соответствующие первым $j\leqslant l$ волновым модам.

Резонансные значения частоты изменения внешних давлений для внутренних волн можно определить по формуле

$$\Omega_j = N_0(1 - v^{2/3} v_j^{-2/3})^{3/2} \qquad (j \geqslant 2, \quad v < v_j)$$

Поступила 2 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kaplan P.* The waves generated by the forward motion of oscillatory pressure distributions. Proc. 5th Midwest. Conf. Fluid Mech., Ann. Arbor. Univ. Michigon Press, 1957.
2. *Черкесов Л. В.* Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. Киев, «Наукова думка», 1976.
3. *Абрашина Н. Н.* Неустановившиеся волны в стратифицированном море от периодических движущихся возмущений. В сб. Мор. гидрофиз. исслед., вып. 3. Севастополь, 1971.
4. *Доценко С. Ф., Черкесов Л. В.* О нестационарных волнах в непрерывно стратифицированном потоке жидкости конечной глубины. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 6.
5. *Yanowitch M.* Gravity waves in a heterogeneous incompressible fluid. Comm. pure and Appl. Math., 1962, vol. 15, No. 1.
6. *Каменкович В. М.* Основы динамики океана. Л., Гидрометеоиздат, 1973.
7. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М., «Наука», 1977.
8. *Зайцев А. А.* К вопросу о возбуждении внутренних волн колебаниями атмосферного давления. Океанология, 1975, т. 15, № 2.