

ВЕНТИЛИРУЕМЫЙ ВХОД ТОНКОГО ПРОФИЛЯ
В СЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ С ДОЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

А. В. КУЗНЕЦОВ

(Казань)

В линейной постановке решена задача о вертикальном погружении с дозвуковой скоростью в идеальную сжимаемую жидкость тонкого профиля с открытой присоединенной каверной. Получено и исследовано интегральное уравнение для потенциала ускорений. Приведены формулы для вычисления сопротивления тонкого клина и некоторые результаты расчетов, из которых следует, что в предельном случае бесконечной глубины погружения, соответствующем стационарному обтеканию тонкого клина с отрывом струй, имеет место аналог теоремы Прандтля — Глаузрта.

1. Постановка задачи. Рассмотрим вертикальное погружение тонкого симметричного профиля в идеальную сжимаемую среду, занимающую нижнее полупространство (фиг. 1). При погружении профиля на глубину $H > h$ (обозначения H и h даны на фиг. 1) за ним образуется открытая присоединенная каверна со свободными границами, сходящими с профиля в точках E и E' .

Вследствие малости возмущений, вызываемых погружением тонкого тела, течение жидкости, возбуждаемое в области, ограниченной свободной поверхностью и цилиндрической поверхностью радиуса at (a — скорость звука, t — время) с центром в точке касания тела невозмущенной свободной поверхности, будем считать потенциальным.

В неподвижной системе координат потенциал скорости удовлетворяет волновому уравнению

$$(1.1) \quad \Delta\Phi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

в котором Δ — оператор Лапласа, а в качестве a с принятой степенью точности можно брать скорость звука в невозмущенной жидкости.

Избыточное давление в жидкости находится из линеаризованного интеграла Коши — Лагранжа

$$(1.2) \quad p = -\rho\varphi_t = -\rho\Phi$$

где $\varphi_t = \Phi$ — потенциал ускорения.

Очевидно, что $\Phi = \varphi = 0$ на свободной границе в любой момент времени, если считать $\varphi = 0$ в начальный момент. Так как при проникании тонкого тела свободная поверхность, за исключением брызговых струй, мало отклоняется от невозмущенной, будем полагать, что условие $\varphi = 0$ выполняется при $z = 0$. Это позволяет продолжить функцию $\varphi(t, z, y)$ на полупространство $z < 0$ нечетным образом. На границе каверны $\Phi = 0$. На профиле известна нормальная составляющая скорости его точек $v_n = \partial\varphi/\partial n$. Для тонкого слабо изогнутого профиля можно положить $\partial\varphi/\partial n = \partial\varphi/\partial y$ и снести граничные условия на профиле и каверне на ось z . Очевидно, что вслед-

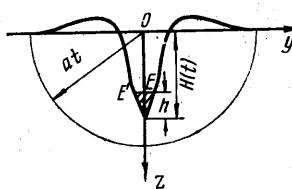
ствие симметрии течения относительно оси z достаточно найти $\varphi(t, z, y)$ в области $y \geq 0$.

Решение этой линеаризованной граничной задачи записывается запаздывающим потенциалом источников

$$(1.3) \quad \varphi(t, z, y) = -\frac{a}{\pi} \iint_s \frac{\partial \Phi}{\partial y}(\zeta, \tau) \frac{d\zeta d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (z-\zeta)^2 - y^2}}$$

с областью интегрирования, ограниченной линиями $\zeta = \pm H(\tau)$ — траекторией носика профиля и ее зеркальным отражением относительно оси τ и гиперболой $\tau = t - \mu \sqrt{(z-\zeta)^2 + y^2}$, $\mu = 1/a$.

При погружении профиля без образования каверны $\partial\varphi/\partial y$ известна в S и решение задачи сводится к квадратурам [1]. Для удобства вычислений



Фиг. 1

целесообразен переход к характеристическим переменным $t_1 = t - \mu z$, $z_1 = t + \mu z$, $\tau_1 = \tau - \mu \zeta$, $\zeta_1 = \tau + \mu \zeta$. Тогда при $y=0$

$$(1.4) \quad \varphi(t_1, z_1, 0) = -\frac{1}{2\pi\mu} \iint_{S'} \frac{\partial \Phi}{\partial y}(\zeta_1, \tau_1) \frac{d\zeta_1 d\tau_1}{\sqrt{(t_1 - \tau_1)(z_1 - \zeta_1)}}$$

При погружении с образованием каверны область $S = S^+ + S^-$, где S^+ и S^- — части S , лежащие в полуплоскостях $z > 0$ и $z < 0$ соответственно, разделяются линиями $\zeta = \pm [H(\tau) - h]$ на области S_1 и S_2 . Для случая равномерного погружения ($H = V = \text{const}$) эти области показаны на фиг. 2, а, а в плоскости характеристических переменных — на фиг. 2, б. На фиг. 2, а цифрами 1—6 обозначены соответственно линии $\zeta = \pm V\tau$, $\zeta = \pm (V\tau - h)$, $\zeta = z \mp (\tau - t)/\mu$, а на фиг. 2, б цифрами 1—6 — линии $\tau_1 = \alpha \zeta_1$, $\zeta_1 = \alpha \tau_1$, $\tau_1 = \alpha \zeta_1 + \beta$, $\zeta_1 = \alpha \tau_1 + \beta$, $\zeta_1 = z_1$, $\tau_1 = t_1$, причем $\alpha = (1-M)/(1+M)$, $M = V/a$, $\beta = 2\mu h/(1+M)$, $\delta = \beta/(1-\alpha) = \mu h/M$. Подынтегральная функция в (1.4) задана только в S_1 .

Из фиг. 2, б непосредственно видно, что при неполном погружении профиля, т. е. при значениях $0 \leq t_1 \leq \delta$, $0 \leq z_1 < \infty$, $S' = S'_1$.

Для определения $\partial\varphi/\partial y$ в S'_1 можно получить из (1.4) интегральное уравнение, используя условие $\Phi = 0$ на границе каверны, т. е. в S'_2 .

Однако исследование и решение этого уравнения сопряжено с известными трудностями, так как оно будет двукратным уравнением первого рода. Ввиду того что основной целью решения задачи является вычисление сопротивления, целесообразно получить уравнение непосредственно для Φ .

2. Интегральное уравнение. Доопределим каким-либо образом $\partial\varphi/\partial y$ в S_2 и по (1.4) вычислим φ , которое обозначим через Φ_0 . Разность $\varphi_1(t, z, 0) = \varphi(t, z, 0) - \Phi_0(t, z, 0)$ может быть представлена теми же интегралами (1.3) или (1.4) с плотностью $\partial\varphi_1/\partial y$, которая по определению тождественно равна нулю в S_1 . Очевидно, что разность

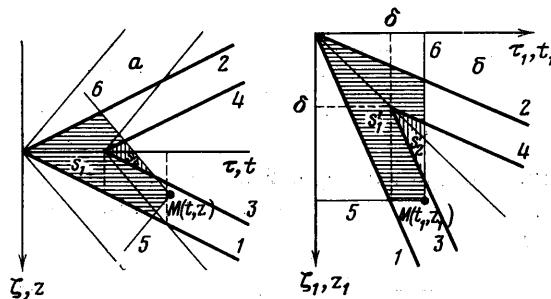
$$(2.1) \quad \Phi_1(t, z) = \Phi(t, z) - \Phi_0(t, z)$$

удовлетворяет волновому уравнению и представима интегралом (1.4) с плотностью $f(\tau_1, \zeta_1)$, которая тождественно равна нулю вне S'_2 и $\Phi_1(t_1, z_1) = -\Phi_0(t_1, z_1)$ в S'_2 .

Перейдем к системе координат (t_2, z_2) по формулам $t_2 = t_1 - \delta$, $z_2 = z_1 - \delta$. Очевидно, что в новой системе координат функцию $\Phi_1(t_1, z_1)$ можно, опуская для сокращения записи индекс при переменных, записать в виде

$$\Phi_1(t, z) = -\frac{1}{2\pi\mu} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^z \frac{f(\tau, \zeta) d\zeta}{\sqrt{z-\zeta}}$$

Это представление будем рассматривать как интегральное уравнение относительно $f(t, z)$. Оно сводится к двум интегральным уравнениям



Фиг. 2

Абеля и при условии $\Phi_1(t_1, 0) = 0$, справедливость которого следует из определения (2.1), имеет решение

$$(2.2) \quad f(t, z) = -\frac{2\mu}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^z \frac{\Phi_{1t}(\tau, \zeta) d\zeta}{\sqrt{z-\zeta}}, \quad \Phi_{1t} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta}$$

Отсюда для $z > t/\alpha$, где $f(t, z) = 0$, получим

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^z \frac{\Phi_{1t}(\tau, \zeta) d\zeta}{\sqrt{z-\zeta}} = 0$$

Это уравнение Абеля с правой частью, тождественно равной нулю. Оно равносильно уравнению

$$(2.3) \quad \int_{t/\alpha}^z \frac{\Phi_{1t}(t, \zeta) d\zeta}{\sqrt{z-\zeta}} = F(t, z) + F_1(t, z)$$

$$F(t, z) = - \int_{\alpha t}^{t/\alpha} \frac{\Phi_{1t}(t, \zeta) d\zeta}{\sqrt{z-\zeta}} = \int_{\alpha t}^{t/\alpha} \frac{\Phi_{0t}(t, \zeta) d\zeta}{\sqrt{z-\zeta}}$$

$$F_1(t, z) = - \int_0^{\alpha t} \frac{\Phi_{1t}(t, \zeta) d\zeta}{\sqrt{z-\zeta}}$$

Здесь $F(t, z)$ — известная функция. Полагая функцию $F_1(t, z)$ также известной, найдем решение уравнения (2.3)

$$(2.4) \quad \Phi_1(t, z) = -\Phi_0\left(t, \frac{t}{\alpha}\right) + \frac{1}{\pi} \int_{t/\alpha}^z \frac{dy}{\sqrt{z-y}} \int_{at}^{t/\alpha} \frac{\Phi_0(t, \xi) d\xi}{\sqrt{y-\xi}} - \\ - \frac{1}{\pi} \int_{t/\alpha}^z \frac{dy}{\sqrt{z-y}} \int_0^{at} \frac{\Phi_1(\xi, t) d\xi}{\sqrt{y-\xi}}$$

В последнем интеграле переставим порядок интегрирования, вычислим внутренний интеграл и проинтегрируем по частям. Тогда

$$\int_{t/\alpha}^z \frac{dy}{\sqrt{z-y}} \int_0^{at} \frac{\Phi_1(\xi, t) d\xi}{\sqrt{y-\xi}} = \\ = \left(\pi - 2 \arcsin \sqrt{\frac{t/\alpha - at}{z - at}} \right) \Phi_1(t, at) - \int_{at}^{z-t/\alpha} \frac{\Phi_1(t, \xi) d\xi}{(z-\xi) \sqrt{t/\alpha - \xi}}$$

Аналогично преобразуем и первый интеграл. Учитывая, что $\Phi_1(t, at) = -\Phi_0(t, at)$, $\Phi_1(t, \xi) = -\Phi_0(\xi, t)$, после подстановки преобразованных интегралов в (2.4) будем иметь

$$\Phi_1(t, z) + \frac{1}{\pi} \int_{at}^{z-t/\alpha} \frac{\Phi_1(t, \tau) d\tau}{(z-\tau) \sqrt{t/\alpha - \tau}} = \\ = -\frac{1}{\pi} \int_{at}^{z-t/\alpha} \frac{\Phi_0(t, \tau) d\tau}{(z-\tau) \sqrt{t/\alpha - \tau}}$$

Отсюда, используя соотношение (2.1), получим интегральное уравнение для $\Phi(t, z)$

$$(2.5) \quad \Phi(t, z) + \int_0^{at} K(z, \tau; t) \Phi(\tau, t) d\tau = F(t, z), \quad z \geq t/\alpha$$

$$(2.6) \quad K(z, \tau; t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{z-t/\alpha}}{(z-\tau) \sqrt{t/\alpha - \tau}}$$

$$(2.7) \quad F(t, z) = \Phi_0(t, z) - \int_0^{t/\alpha} K(z, \tau; t) \Phi_0(\tau, t) d\tau$$

Существование и единственность решения этого уравнения можно установить с помощью принципа сжатых отображений. Действительно, оператор $g(t, z) = F(t, z) + A\varphi$, где $F(t, z)$ — непрерывная функция и

$$A\varphi = - \int_0^{at} K(z, \tau; t) \varphi(\tau, t) d\tau$$

переводит всякую непрерывную функцию в непрерывную, так как оператор A ограничен

$$(2.8) \quad \|A\| = \max_{t,z} \int_0^{\alpha t} |K(z, \tau; t)| d\tau = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}}{2(1 - \alpha^2)^{1/4}} = \beta$$

причем для $\forall \alpha \in [0, 1)$ $\beta < 1$. Поэтому оператор $I + A$, где I — тождественный оператор, имеет ограниченный обратный линейный оператор $(I + A)^{-1}$. Следовательно, при непрерывной правой части уравнения (2.5) решение его можно найти методом последовательных приближений

$$(2.9) \quad \Phi^{(n)}(t, z) = F(t, z) - \int_0^{\alpha t} K(z, \tau; t) \Phi^{(n-1)}(\tau, t) d\tau, \quad n=1, 2 \dots$$

при любом начальном приближении $\Phi^{(0)}(t, z)$. Если $\Phi^{(0)}(t, z) = 0$ и $|F(t, z)| \leq N$, то

$$(2.10) \quad |\Phi - \Phi^{(n)}| \leq N\beta^n / (1 - \beta)$$

В случае, когда $F(t, z)$ имеет интегрируемые особенности, замена $\Phi(t, z) = \Phi^*(t, z) + F(t, z)$ приводит к интегральному уравнению для новой функции $\Phi^*(t, z)$ с уже непрерывной правой частью.

3. Погружение тонкого клина. Для симметричного клина с углом 2γ функция $\partial\phi/\partial y = \pm V\gamma$ в S_1^\pm соответственно. Определим функцию $\Phi_0(t, z)$, положив $\partial\phi/\partial y = \pm V\gamma$ в S_2^\pm . После вычисления интеграла (1.4) и дифференцирования по t (t — время) получим

$$\Phi_0(t_1, z_1) = A \ln \left| \frac{\sqrt{z_1} + \sqrt{\alpha}t_1}{\sqrt{z_1} - \sqrt{\alpha}t_1} \frac{\sqrt{t_1} - \sqrt{\alpha}z_1}{\sqrt{t_1} + \sqrt{\alpha}z_1} \right|, \quad A = \frac{V^2\gamma}{\pi\sqrt{1 - M^2}}$$

Уравнение (2.5) перепишем в переменных t_1, z_1

$$(3.1) \quad \Phi(t_1, z_1) + \int_0^{c(t_1)} K(z_1, \tau_1; t_1) \Phi(\tau_1, t_1) d\tau_1 = F(t_1, z_1)$$

$$(3.2) \quad z_1 \geq b(t_1) = [t_1 - \delta(1 - \alpha)]/\alpha, \quad c(t_1) = \alpha t_1 + \delta(1 - \alpha)$$

$$K(z_1, \tau_1; t_1) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{z_1 - b(t_1)}}{(z_1 - \tau_1)\sqrt{b(t_1) - \tau_1}}$$

$$(3.3) \quad F(t_1, z_1) = \Phi_0(t_1, z_1) - \int_0^{b(t_1)} K(z_1, \tau_1; t_1) \Phi_0(t_1, \tau_1) d\tau_1$$

Представление $F(t_1, z_1)$ в виде суммы

$$F(t_1, z_1) = F_0(t_1, z_1) + F_1(t_1, z_1)$$

$$F_0(t_1, z_1) = \Phi_0(t_1, z_1) - \int_0^{b(t_1)} K(z_1, \tau_1; t_1) \Phi_0(t_1, \tau_1) d\tau_1$$

$$F_1(t_1, z_1) = \int_0^{\delta} K(z_1, \tau_1; t_1) \Phi_0(t_1, \tau_1) d\tau_1$$

позволяет вычислить $F_0(t_1, z_1)$ в явном виде

$$F_0(t_1, z_1) = A \ln \left| \frac{\sqrt{\delta(1-\alpha)} - \sqrt{\alpha[z_1 - b(t_1)]}}{\sqrt{\delta(1-\alpha)} + \sqrt{\alpha[z_1 - b(t_1)]}} \right|$$

$$(z_1 \geq b(t_1), t_1 \geq \delta)$$

Отсюда непосредственно видно, что $F(t_1, z_1)$ имеет особенность логарифмического типа, содержащуюся в первом слагаемом. Поэтому, положив $\Phi(t_1, z_1) = F_0(t_1, z_1) + \Phi^*(t_1, z_1)$, получим для $\Phi^*(t_1, z_1)$ уравнение

$$(3.4) \quad \Phi^*(t_1, z_1) + \int_{\delta}^{c(t_1)} K(z_1, \tau_1; t_1) \Phi^*(\tau_1, t_1) d\tau_1 =$$

$$= F_1(t_1, z_1) - \int_{\delta}^{c(t_1)} K(z_1, \tau_1; t_1) F_0(\tau_1, t_1) d\tau_1$$

$$(z_1 \geq b(t_1), t_1 \geq \delta)$$

с непрерывной правой частью.

Рассмотрим сначала предельный случай бесконечно глубокого погружения клина. Введем в физической плоскости подвижную систему координат (x, y) , положив $z = Vt - x$. Если в уравнении (3.4) произвести замену переменных $t_1 = (1-M)t + x/a$, $z_1 = (1+M)t - x/a$ и перейти к пределу при $t \rightarrow \infty$, то оно превратится в однородное уравнение, имеющее тривиальное решение $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi^*(t_1, z_1) = 0$. Поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t_1, z_1) = \lim_{t \rightarrow \infty} F_0(t_1, z_1) = A \ln \frac{\sqrt{h} - \sqrt{h-x}}{\sqrt{h} + \sqrt{h-x}} \quad (0 \leq x \leq h)$$

и в соответствии с (1.2) распределение давления на щеке клина, движущегося с постоянной дозвуковой скоростью и обтекаемого с отрывом струй, определится формулой

$$p = \frac{\rho V^2 \gamma}{\pi \sqrt{1-M^2}} \ln \frac{\sqrt{h} + \sqrt{h-x}}{\sqrt{h} - \sqrt{h-x}}$$

В случае несжимаемой жидкости [2]

$$p_0 = \frac{\rho V^2 \gamma}{\pi} \ln \frac{\sqrt{h} + \sqrt{h-x}}{\sqrt{h} - \sqrt{h-x}}$$

Таким образом, $p = p_0 / \sqrt{1-M^2}$, т. е. в задачах установившегося струйного обтекания тонких тел дозвуковым потоком имеет место аналог теоремы Прандтля — Глауэрта.

Так как разрежение на границе каверны распространяется в жидкости со скоростью акустической волны, распределение давления на щеках клина будет определяться различными формулами в зависимости от интервала изменения t или, иначе, глубины погружения H . Из фиг. 2 непосредственно видно, что $0 < H < h$: $p = -\rho \Phi_0(t, z)$, $0 < z < H$

$$h < H < \frac{h}{1-M}: p = -\rho \begin{cases} \Phi_0(t, z), & \frac{H-h}{M} < z < H \\ \Phi(t, z), & H-h < z < \frac{H-h}{M} \end{cases}$$

$$H > \frac{h}{1-M} : \quad p = -\rho \Phi(t, z), \quad H-h < z < H$$

Ввиду того что при применении метода последовательных приближений к уравнению (3.4) квадратуры не могут быть выполнены точно, ограничимся первым приближением, положив

$$\Phi(t_1, z_1) = \Phi^{(1)}(t_1, z_1) = F_0(t_1, z_1) + F_1(t_1, z_1) - F_2(t_1, z_1)$$

$$\begin{aligned} F_2(t_1, z_1) &= \int_0^{c(t_1)} K(z_1, \tau_1; t_1) F_0(\tau_1, t_1) d\tau_1 = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\zeta - y} \sqrt{\frac{\alpha^2 \zeta - y}{(1-\alpha^2) \zeta}} \left[(y-1) \ln \left| \frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{y+1}} \right| - 2\sqrt{y} \right] + O(\alpha^2) \\ \zeta &= \frac{z_1 - \delta}{\delta(1-\alpha)}, \quad y = \frac{\alpha(t_1 - \delta)}{\delta(1-\alpha)} \end{aligned}$$

Допускаемая при этом погрешность при малых α не превосходит, согласно формулам (2.8) – (2.10), величины $N[\alpha^2/4 + O(\alpha^4)]$. Для вычисления последующих приближений нужно использовать известные методы приближенного вычисления интегралов.

Сила сопротивления клина при неполном погружении равна [1]

$$R_1 = 2\gamma \int_0^H p dz = \frac{4\rho V^2 \gamma^2}{\pi \sqrt{1-M^2}} H \ln(1 + \sqrt{1-M^2})$$

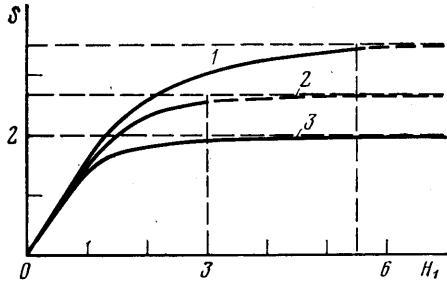
При погружении на глубину $H > h$

$$R = 2\gamma \int_{H-h}^H p dz$$

поэтому для второй фазы погружения ($h < H < h/(1-M)$)

$$\begin{aligned} R_2 &= R_0 + R_{F_0} + R_{F_1} - R_{F_2} \\ R_0 &= -2\gamma \rho \int_{(H-h)/M}^H \Phi_0(t, z) dz = \frac{2\rho V^2 \gamma^2}{\pi} \frac{h H_1}{M \sqrt{1-M^2}} \left[2M \ln M - \right. \\ &\quad \left. - \frac{H_1 - 1}{H_1} \ln \frac{H_1 + M(H_1 - 1) - \sqrt{(1-M^2)(2H_1 - 1)}}{H_1 + M(H_1 - 1) + \sqrt{(1-M^2)(2H_1 - 1)}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - (1-M)H_1}{H_1} \ln \frac{\sqrt{2H_1 - 1} + H_1 \sqrt{1-M^2}}{\sqrt{2H_1 - 1} - H_1 \sqrt{1-M^2}} \right] \\ R_{F_0} &= -2\gamma \rho \int_{H-h}^{(H-h)/M} F_0(t, z) dz = \\ &= \frac{2\rho V^2 \gamma^2}{\pi} h \left[2 \sqrt{\frac{1-M}{M}} (H_1 - 1) + \frac{1 - (1-M)H_1}{M} \ln \frac{\sqrt{M} - \sqrt{(1-M)(H_1 - 1)}}{\sqrt{M} + \sqrt{(1-M)(H_1 - 1)}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{F_2} = & -2\gamma\rho \int_{H-h}^{(H-h)/M} F_2(t, z) dz = \\
 = & \frac{4\rho V^2 \gamma^2}{\pi^2} h \sqrt{\frac{1-M}{M}} (H_1 - 1) \left(\frac{2}{3} \frac{1+2M}{1+M} - \sqrt{\frac{2M}{1-M}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-M}{2M}} \right) \times \\
 \times & \left[1 - \frac{2M - (1-M^2)(H_1 - 1)}{2\sqrt{2M}(1-M^2)(H_1 - 1)} \ln \frac{\sqrt{2M} + \sqrt{(1-M^2)(H_1 - 1)}}{\sqrt{2M} - \sqrt{(1-M^2)(H_1 - 1)}} \right] \\
 (H_1 =) & H/h
 \end{aligned}$$



Фиг. 3

Вычисление составляющей

$$\begin{aligned}
 R_{F_1} = & -2\gamma\rho \int_{H-h}^{(H-h)/M} F_1(t, z) dz \\
 F_1(t_1, z_1) = & \frac{A}{\pi} \sqrt{z_1 - b(t_1)} \int_0^\delta \frac{f(\tau_1/t_1) d\tau_1}{(z_1 - \tau_1) \sqrt{b(t_1) - \tau_1}} \\
 f(\tau_1/t_1) = & \ln \left| \frac{(1-\alpha) \sqrt{\tau_1/t_1} - \sqrt{\alpha} (1-\tau_1/t_1)}{(1-\alpha) \sqrt{\tau_1/t_1} + \sqrt{\alpha} (1-\tau_1/t_1)} \right|
 \end{aligned}$$

после замены $z=x+H-h$, $t_1=\mu(b_1+h_1-x)$, $z_1=\mu(b_1/\alpha+h_1+x)$, $b_1=(1-M)(H-h)/M$, $h_1=h/M$, $\xi(x)=z_1/t_1$, $\xi(x)=b(t_1)/t_1$, $\tau_1/t_1=y$ сводится к вычислению двукратного интеграла

$$R_{F_1} = -\frac{2\rho\gamma A}{\pi} \int_0^{b_1} dx \int_0^{\delta/\mu(x)} \sqrt{\frac{\xi(x) - \xi(y)}{\xi(x) - y}} \frac{f(y)}{\xi(x) - y} dy$$

которое реализуется на ЭВМ.

Рассчитанные по приведенным формулам зависимости величины $S = \pi R / (2\rho V^2 \gamma^2 h)$ от $H_1 = H/h$ при $M = 0.818$ ($\alpha = 0.1$) и $M = 2/3$ ($\alpha = 0.2$) представлены соответственно кривыми 1, 2 на фиг. 3. Они свидетельствуют о том, что для относительно больших M значения S в конце второй фазы проникания ($H_1 = 5.5$ при $M = 0.818$ и $H_1 = 3$ при $M = 2/3$), когда возмущения

от границы каверны достигают остряя клина, незначительно отличаются от предельных значений S_∞ при $H_1 \rightarrow \infty$ ($S_\infty = 3.476$ при $M = 0.818$ и $S_\infty = -2.683$ при $M = \frac{2}{3}$). Для сравнения на фиг. 3 показана зависимость $S = S(H_1)$ при $M = 0$ [^{3, 4}] (кривая 3).

Поступила 22 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Сагомонян А. Я. Проникание. М., Изд-во Моск. ун-та, 1974.
2. Tulin M. P. Steady two-dimensional cavity flows about slender bodies. David W. Taylor Mod. Basin, 1953, Rept. No. 834.
3. Yim B. Investigation of gravity and ventilation effects in water entry of thin foils. В сб. Неустановившиеся течения воды с большими скоростями. М., «Наука», 1973.
4. Кузнецов А. В. Вход тонкого тела в воду, Плоская задача. Тр. Семинара по краевым задачам, вып. 14. Изд-во Казанского ун-та, 1977.