

**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА**
№ 4 · 1980

УДК 532.59

**СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
О СОСТАВНЫХ УСТАНОВИВШИХСЯ ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ
ПОТОКА ЖИДКОСТИ С ВОЛНИСТЫМ ДНОМ**

В. С. ПОТАПКИН

(Москва)

Составными волнами на поверхности стационарного потока тяжелой идеальной несжимаемой жидкости называются установившиеся вынужденные волны конечной амплитуды, которые при переходе давления над свободной поверхностью в постоянное не пропадают, а преобразуются в свободные нелинейные волны [¹]. Ниже будет показано, что такие волны соответствуют случаю нелинейного резонанса, а математически – ветвлению решения основного интегрального уравнения, описывающего эти волны. В работе [²] рассмотрена задача о составных волнах на потоке конечной глубины, возникающих под действием периодически распределенного вдоль поверхности потока переменного давления. В [³] такие же волны рассмотрены для потока с волнистым дном. В этом случае составными волнами называются установившиеся вынужденные волны конечной амплитуды, которые при переходе давления в постоянное и расправлении линий дна не пропадают, а преобразуются в свободные нелинейные волны над плоским горизонтальным дном. Однако для последнего случая не было приведено доказательство теоремы существования и единственности. Цель настоящей статьи – восполнить этот пробел и исследовать условия, при которых подобные волны могут возникать.

Составные волны описываются нелинейным интегральным уравнением типа уравнения Некрасова. Такое уравнение для потока с волнистым дном и периодически распределенным над ним давлением получено стандартными методами теории установившихся волн конечной амплитуды в [³]. В дальнейшем предполагается, что поток и атмосферный фронт имеют скорости c . Пульсации давления, волнистость дна и искомая волна имеют одну и ту же длину λ . Скорость потока или волны в системе координат, связанной с потоком, задается в той же форме, что и скорость свободной нелинейной волны

$$(1) \quad c^{-2} = (1 - \varepsilon^2) c_*^{-2}$$

где ε – малый масштабный параметр, характеризующий амплитуду пульсаций давления, c_* – скорость исходной свободной линейной волны над плоским дном. Соотношение (1) фактически задает условие резонанса между внешним давлением, вызывающим составную волну, и той свободной нелинейной волной, в которую она преобразуется. С помощью конформных преобразований область одной волны с неизвестным профилем свободной поверхности, определяемым функцией $f(x, y)$, переводится в кольцо единичного внешнего радиуса и с внутренним радиусом, зависящим от глубины потока: $r_0 = \exp(-2\pi h/\lambda)$. Решение задачи ищется для аналитической функции $\ln f(r, \theta) = \tau(r, \theta) + i\Phi(r, \theta)$ на комплексной плоскости этого кольца в полярных координатах r, θ . Причем основное интегральное уравнение строится для функции $\Phi(\theta)$, где Φ – угол между касательной к профилю волны и осью x – направлением потока [¹]. Градиент пульсаций атмосферного давления Q и уравнение линии дна Θ зада-

ются в виде [4]

$$(2) \quad Q(\theta) = \frac{1}{\rho g} \frac{dp_0(x)}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n+l} d_n \sin n\theta$$

$$(3) \quad \Theta(s(\theta)) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n+l} \beta_n \sin \pi n \frac{s(\theta)}{b}$$

где ρ — плотность жидкости, $g=9.8 \text{ м/сек}^2$, p_0 — переменная компонента атмосферного давления, $s(\theta)$ — длина отрезка линии пересечения волнистого дна с вертикальной плоскостью течения, отсчитанная от гребня, b — длина линии дна за период, Θ — угол между касательной к линии дна и осью x . Величина натурального показателя l будет определена далее в результате исследования уравнения разветвления.

Из существования интеграла Бернули на свободной поверхности и с учетом (2) основное интегральное уравнение задачи получено в [3] в виде

$$(4) \quad \begin{aligned} \Phi(1, \theta) &= \Phi(\theta) = \mu \int_0^{2\pi} H[Q(\eta), \Phi(\eta)] K(\eta, \theta) \times \\ &\times \left[1 + \mu \int_0^{\eta} H[\Phi(\xi), Q(\xi)] d\xi \right]^{-1} d\eta + 2 \int_0^{2\pi} M(\eta, \theta) \frac{d\Phi^*}{d\eta} d\eta \\ \Phi^*(\theta) &= \Phi(r_0, \theta); \quad H[Q(\eta), \Phi(\eta)] = \sin \Phi(\eta) + Q(\eta) \cos \Phi(\eta) \\ K(\eta, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\eta) \varphi_n(\theta)}{v_n}, \quad \varphi_n(\theta) = \frac{\sin n\theta}{\sqrt{\pi}}, \quad v_n = 3n \operatorname{cth} \left(2\pi n \frac{h}{\lambda} \right) \\ M(\eta, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(\eta) \psi_n(\theta)}{v_n^*}, \quad \psi_n(\theta) = \frac{\cos n\theta}{\sqrt{\pi}} \\ v_n^* &= 2n \operatorname{ch} \left(2\pi n \frac{h}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

Из условия гладкого обтекания дна $\Phi^*(\theta) = \Theta(s(\theta))$.

Параметр уравнения (4) имеет функциональную природу и берется в форме [1]

$$(5) \quad \mu = \frac{3g\lambda}{2\pi c_*^2} (1 - \varepsilon^2) \exp[-3\tau(1, 0)] = \mu_0 (1 - \varepsilon^2) \exp[-3\tau(1, 0)]$$

Параметрические уравнения профиля волны имеют вид [3]

$$(6) \quad x = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{\theta} e^{-\tau(\eta)} \cos \Phi(\eta) d\eta, \quad y = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\tau(\eta)} \sin \Phi(\eta) d\eta$$

В силу аналитичности функции $\ln f$ справедливы соотношения типа Дини

$$(7) \quad -\tau(1, \theta) = -\tau(\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{d\Phi}{d\eta} K_\tau(\eta, \theta) d\eta - 2 \int_0^{2\pi} M_\tau(\eta, \theta) \frac{d\Phi^*}{d\eta} d\eta + \text{const}$$

Величину показателя скорости τ можно, кроме того, задать в форме

$$(8) \quad \tau(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta$$

Из (7) и (8) для коэффициентов разложения нетрудно получить следующее соотношение:

$$(9) \quad \begin{aligned} A_n &= \frac{v_n}{3\pi n} \int_0^{2\pi} \Phi(\eta) \sin n\eta d\eta - \frac{2}{\pi \kappa_n^*} \int_0^{2\pi} \frac{d\Phi^*}{d\eta} \cos n\eta d\eta \\ K_\tau(\eta, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(\eta) \psi_n(\theta)}{\kappa_n}, \quad \kappa_n = n \operatorname{th} \left(2\pi n \frac{h}{\lambda} \right) \\ M_\tau(\eta, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(\eta) \psi_n(\theta)}{\kappa_n^*}, \quad \kappa_n^* = 2n \operatorname{sh} \left(2\pi n \frac{h}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

Функционал A_0 можно рассчитывать как из граничного условия на волнистом дне по аналогии с [3], так и из условия на свободной поверхности. Результат оказывается идентичным, так как длина искомой волны, волны пульсаций атмосферного давления и волнистости дна принята одинаковой — λ , а длина дуги линии дна отвечает заданному числу b . Так что из условий (8) и (9) следует уравнение для отыскания A_0 :

$$(10) \quad \exp(-A_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \right) \cos \Phi(\theta) d\theta$$

Величину $s(\theta)$, входящую в функцию $\Theta(s(\theta)) = \Phi^*(\theta)$, следует отыскивать из отображеного на кольцо параметрического уравнения линии дна, вычисляя $\tau^* = \tau(r_0, \theta)$:

$$(11) \quad s(\theta) = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{\theta} e^{-\tau^*(\eta)} d\eta$$

Используя прием работы [1], преобразуем уравнение (4) к эквивалентной системе уравнений, введя вспомогательную функцию

$$(12) \quad \Psi(\theta) = \left[1 + \mu \int_0^{\theta} H(\eta) d\eta \right]^{-1}$$

Решение такой системы проще, чем решение уравнения (4), а эквивалентность решений доказывается элементарно. Из (4) и (12) имеем

$$(13) \quad \begin{aligned} \Phi &= \mu \int_0^{2\pi} \Psi(\eta) H[\Phi(\eta), Q(\eta)] K(\eta, \theta) d\eta + 2 \int_0^{2\pi} M(\eta, \theta) \frac{d\Phi^*}{d\eta} d\eta \\ \Psi &= 1 - \mu \int_0^{\theta} \Psi^2(\eta) H[\Phi(\eta), Q(\eta)] d\eta \end{aligned}$$

Как отмечалось выше, составные волны отвечают условиям резонанса. Будем далее считать, что такому условию отвечает первая гармоника

волны, т. е. первое собственное значение ядра равно параметру линейной части этого уравнения: $v_1 = \mu_0$ или в соответствии с (4) и (5)

$$(14) \quad \operatorname{cth} 2\pi \frac{h}{\lambda} = g \frac{\lambda}{2\pi c_*^2}$$

Последнее предположение приводит к ветвлению решения первого из уравнений [13] [6]. Чтобы доказать существование и единственность такого решения, необходимо построить уравнение разветвления, которое, кроме того, подскажет, в какой форме искать решение (13) и всей системы.

Учитывая, что $\sin \Phi$ можно разложить в ряд по Φ и первое слагаемое этого ряда $\Phi(\eta)$, перепишем (13) в виде

$$(15) \quad \begin{aligned} \Phi(\theta) &= \mu_0(1+\mu') \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta) [\Phi(\eta) + P(\eta)] d\eta + 2 \int_0^{2\pi} M(\eta, \theta) \frac{d\Phi^*}{d\eta} d\eta \\ \Psi^* &= \Psi - 1 = -\mu_0(1+\mu') \int_0^\theta (\Psi^* + 1)^2 H[\Phi(\eta), Q(\eta)] d\eta \\ \mu' &= -\varepsilon^2 + (1-\varepsilon^2)[\exp(-3\tau_0) - 1], \quad \tau_0 = \tau(0) = \tau(1, 0) \\ P(\eta) &= \varepsilon^{1+l} d_1 \sin \eta + F(\Phi, \Psi^*, \varepsilon) \\ F(\Phi, \Psi^*, \varepsilon) &= \sin \Phi - \Phi + Q(\cos \Phi - 1) + \\ &+ Q - \varepsilon^{1+l} d_1 \sin \eta + \Psi^* [\sin \Phi + Q \cos \Phi] \end{aligned}$$

Если в (11) разлагать экспоненту в ряд по параметру ε в соответствии с (3), то

$$(16) \quad s(\theta) = -\frac{b}{\pi} \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n s_n(\theta)$$

Для длины волны линии дна λ также можно ввести некоторый задающий ряд, рассматривая параметрические уравнения линии дна $\Theta(\theta)$:

$$(17) \quad \lambda = \int_0^{2\pi} \cos \Theta(s) ds = \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \lambda_n$$

Используя результат последующего анализа, можно показать, что $\lambda_0 = 2b$, $\lambda_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), $\lambda_6 = -\beta_1^2 b/2$.

Проведя эти вспомогательные построения, можем далее приступить к выводу уравнения разветвления для интегрального уравнения (15) в соответствии с методикой Ляпунова — Шмидта [6].

Прежде всего преобразуем ядро K к эквивалентному виду

$$(18) \quad K(\eta, \theta) = \frac{1}{\pi v_1} \sin \eta \sin \theta + N(\eta, \theta), \quad N(\eta, \theta) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi_n(\eta) \varphi_n(\theta)}{v_n}$$

Если подставить (18) в уравнение (15), то в нем появится величина

$$(19) \quad \xi = \frac{1}{\pi v_1} \int_0^{2\pi} \Phi(\eta) \sin \eta d\eta$$

которую в дальнейшем будем рассматривать в качестве нового малого параметра, влияющего на решение системы (13). Уравнение (19) послужит для построения уравнения разветвления. Теперь (15) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 \Phi + F = & \mu \xi \sin \theta + (1+\mu') \frac{\sin \theta}{\pi} \int_0^{2\pi} F \sin \eta \, d\eta + F + \\
 & + \varepsilon^{1+l} d_1 (1+\mu') \sin \theta - 2 \varepsilon^{1+l} \frac{\beta_1}{v_1^*} \sin \theta + 2 \int_0^{2\pi} M(\eta, \theta) F^*(\eta) \, d\eta + \\
 (20) \quad & + (1+\mu') \int_0^{2\pi} N(\eta, \theta) [\Phi + F] \, d\eta \\
 F^*(s(\theta)) = & \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^{n+l} \beta_n \frac{\cos \pi n s}{b} + \frac{\pi n}{b} \frac{ds}{d\theta} + \\
 & + \varepsilon^{1+l} \frac{\pi \beta_1}{b} \cos \frac{\pi s}{b} \frac{ds}{d\theta} - \varepsilon^{1+l} \beta_1 \left[\cos \frac{\pi s}{b} - \cos \theta \right]
 \end{aligned}$$

Величина F^* появляется после дифференцирования ряда (3) с учетом (16). Уравнение (20) можно рассматривать как линейное неоднородное уравнение Фредгольма второго рода относительно $\Phi + F$, для которого существует резольвента

$$(21) \quad R_1(\eta, \theta, \mu) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\eta \sin n\theta}{v_n - \mu_0(1+\mu')}$$

С помощью разрешающего ядра R_1 и с учетом ортогональности входящих в (20) функций это уравнение преобразуется к эквивалентному виду

$$\begin{aligned}
 (22) \quad \Phi(\theta, \varepsilon, \xi) = & \sin \theta \left[\mu_0(1+\mu') \xi + \frac{1}{\pi} (1+\mu') \int_0^{2\pi} F \sin \eta \, d\eta + \right. \\
 & + \varepsilon^{1+l} \left. \left[d_1 (1+\mu') - 2 \frac{\beta_1}{v_1^*} \right] \right] + 2 \int_0^{2\pi} M(\eta, \theta) F^*(\eta) \, d\eta + \\
 & + \int_0^{2\pi} R_1(\eta, \theta, \mu) \left[F + 2 \int_0^{2\pi} M(\beta, \eta) F^*(\beta) \, d\beta \right] \, d\eta
 \end{aligned}$$

Аналогичные преобразования для функции Ψ^* дают

$$\begin{aligned}
 (23) \quad \Psi^*(\theta, \varepsilon, \xi) = & -\mu_0(1+\mu') \int_0^{\theta} [\Phi(\eta) + \varepsilon^{1+l} d_1 \sin \eta + F_1(\Phi, \Psi^*, \varepsilon)] \, d\eta \\
 F_1(\Phi, \Psi^*, \varepsilon) = & Q \cos \Phi - \varepsilon^{1+l} d_1 \sin \eta + \sin \Phi - \Phi + (\Psi^{*2} + 2\Psi^*) H[Q, \Phi]
 \end{aligned}$$

Соотношения для $\tau, \tau^*, A_0, \mu, \Phi^*, s$, входящие в полную систему, оставим в прежнем виде. Таким образом, получена преобразованная система, для которой существование и единственность малого аналитического относительно параметров решения доказывается обычным методом последовательных приближений [5, 6].

В процессе построения уравнений задачи введено три параметра: ε, ξ и μ' . Однако, используя соотношения (8), (9), (10) и (15), а также теорему о неявной функции, нетрудно показать, что μ' выражается в виде двойного степенного ряда по ε и ξ . Подобное рассмотрение проведено в [6]. Из сказанного естественно вытекает, что искомые функции и функционалы можно представить в виде двойных рядов по ε и ξ , коэффициенты которых далее будем вычислять для составления

уравнения разветвления. Пусть

$$\begin{aligned}
 \Phi(\theta, \varepsilon, \xi) &= \Phi_{01}\xi + \Phi_{10}\varepsilon + \Phi_{11}\varepsilon\xi + \Phi_{20}\varepsilon^2 + \Phi_{02}\xi^2 + \dots \\
 \Psi^*(\theta, \varepsilon, \xi) &= \Psi_{01}\xi + \Psi_{10}\varepsilon + \Psi_{11}\varepsilon\xi + \dots \\
 A_0(\varepsilon, \xi) &= A_{00} + \varepsilon A_{10} + \xi A_{01} + \varepsilon \xi A_{11} + \dots \\
 \tau(\varepsilon, \xi, \theta) &= \tau_0 + \varepsilon \tau_{10} + \xi \tau_{01} + \dots \\
 \mu(\varepsilon, \xi) &= \mu_0(1 + \varepsilon \mu_{10}' + \xi \mu_{01}' + \varepsilon \xi \mu_{11}' + \dots) \\
 \Phi^*(\theta, \varepsilon, \xi) &= \sum_{i,j=0}^{\infty} \varepsilon^i \xi^j \Phi_{ij}^* \quad (i+j>0) \\
 \tau^* &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \xi^m \tau_{nm}^*
 \end{aligned} \tag{24}$$

Кроме того, в ряд по ε и ξ необходимо разложить величины

$$R_1 \int_0^{2\pi} F^* M d\eta, \quad F_1, \quad F, \quad R_1 F, \quad MF^*$$

Далее будем ограничиваться величинами третьего порядка малости. Непосредственный подсчет дает [6]:

$$\begin{aligned}
 (25) \quad F = & \varepsilon^2 \Psi_{10} \Phi_{10} + \xi^2 \Psi_{01} \Phi_{01} + \varepsilon \xi (\Phi_{10} \Psi_{10} + \Phi_{01} \Psi_{10}) + \\
 & + \varepsilon^3 \left(-\frac{1}{6} \Phi_{10}^3 + \Psi_{10} \Phi_{20} + \Psi_{20} \Phi_{10} \right) + \xi^3 \left(-\frac{1}{6} \Phi_{01}^3 + \Psi_{01} \Phi_{02} + \Phi_{01} \Psi_{02} \right) + \\
 & + \varepsilon^2 \xi \left(-\frac{1}{2} \Phi_{01} \Phi_{10}^2 + \Psi_{01} \Phi_{20} + \Psi_{10} \Phi_{11} + \Psi_{11} \Phi_{10} + \Psi_{20} \Phi_{01} \right) + \\
 & + \varepsilon \xi^2 \left(-\frac{1}{2} \Phi_{01}^2 \Phi_{10} + \Psi_{01} \Phi_{11} + \Psi_{10} \Phi_{02} + \Psi_{11} \Phi_{01} + \Psi_{02} \Phi_{10} \right) + \dots
 \end{aligned}$$

С учетом (20) легко получаем, что

$$(26) \quad \int_0^{2\pi} M(\eta, \theta) F^*(\Phi, \Psi^*, \varepsilon, \xi) d\eta = -\varepsilon^{1+l} \frac{\beta_1}{\nu_1} \sin \theta + \dots + O_4(\varepsilon, \xi)$$

После достаточно громоздких выкладок (см. [6]) получим

$$\begin{aligned}
 (27) \quad R_1 F = & \frac{1}{\pi} \left\{ \varepsilon^2 \left[\frac{\Psi_{10} \Phi_{10}}{\nu_2 - \mu_0} \sin 2\theta \sin 2\eta + \frac{\Psi_{10} \Phi_{10}}{\nu_2 - \mu_0} \sin 3\theta \sin 3\eta + \dots \right] + \right. \\
 & + \varepsilon \xi (\Phi_{10} \Psi_{01} + \Psi_{01} \Phi_{01}) \left[\frac{\sin 2\theta \sin 2\eta}{\nu_2 - \mu_0} + \frac{\sin 3\theta \sin 3\eta}{\nu_3 - \mu_0} + \dots \right] + \\
 & + \xi^2 \Psi_{01} \Phi_{01} \left[\frac{\sin 2\theta \sin 2\eta}{\nu_2 - \mu_0} + \dots \right] + \\
 & + \varepsilon^3 \left(-\frac{1}{6} \Phi_{10}^3 + \Psi_{10} \Phi_{20} + \Psi_{20} \Phi_{10} + \mu_0 \mu_{10}' \Psi_{10} \Phi_{10} \right) \left[\frac{\sin 2\theta \sin 2\eta}{\nu_2 - \mu_0} + \dots \right] + \\
 & + \varepsilon^2 \xi \left(-\frac{1}{2} \Phi_{01} \Phi_{10}^2 + \Psi_{01} \Phi_{20} + \Psi_{10} \Phi_{11} + \Psi_{11} \Phi_{10} + \Psi_{20} \Phi_{01} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mu_0 [\mu_{10}' (\Phi_{10} \Psi_{01} + \Psi_{10} \Phi_{01}) + \mu_{01}' \Psi_{10} \Phi_{10}] \left[\frac{\sin 2\theta \sin 2\eta}{v_2 - \mu_0} + \dots \right] \Big) + \\
 & + \varepsilon \xi^2 \left[-\frac{1}{2} \Phi_{01}^2 \Phi_{10} + \Psi_{10} \Phi_{02} + \Psi_{01} \Phi_{11} + \Psi_{11} \Phi_{01} + \Psi_{02} \Phi_{10} \right] + \\
 & + \mu_0 [\mu_{10}' \Psi_{01} \Phi_{01} + \mu_{01}' (\Phi_{01} \Psi_{10} + \Psi_{01} \Phi_{10})] \left[\frac{\sin 2\theta \sin 2\eta}{v_2 - \mu_0} + \dots \right] + \\
 & + \xi^3 \left[-\frac{1}{6} \Phi_{01}^3 + \Psi_{01} \Phi_{02} + \mu_0 \mu_{01}' \Psi_{01} \Phi_{01} \right] \left[\frac{\sin 2\theta \sin 2\eta}{v_2 - \mu_0} + \dots \right] + \dots \Big)
 \end{aligned}$$

Выражение

$$\int_0^{2\pi} R_1 \left[\int_0^{2\pi} M(\beta, \eta) F^* d\beta \right] d\eta$$

опустим, так как в соответствии с [6] ($l > 1$) его порядок малости более трех.

Разложение (24) – (27) подставим в (22), (23) и методом неопределенных коэффициентов получим

$$\Phi_{10} = 0, \quad \Phi_{01} = \mu_0 \sin \theta, \quad \Phi_{20} = 0, \quad \Phi_{11} = \mu_0 \mu_{10}' \sin \theta$$

(28)

$$\Phi_{02} = \left(\mu_0 \mu_{01}' - \frac{\mu_0^4}{v_1} \right) \sin \theta + \frac{1}{2} \mu_0^3 \frac{\mu_0}{v_2 - \mu_0} \sin 2\theta, \dots$$

$$\Psi_{10} = 0, \quad \Psi_{01} = \mu_0^2 (\cos \theta - 1), \quad \Psi_{20} = 0$$

$$\Psi_{11} = \mu_0^2 \mu_{10}' (\cos \theta - 1), \quad \Psi_{02} = \mu_0^2 \left(2\mu_{01}' - \frac{\mu_0^3}{v_1} - 2\mu_0^2 \right) (\cos \theta - 1) +$$

$$+ \frac{1}{4} \mu_0^4 \frac{2v_2 - \mu_0}{v_2 - \mu_0} (\cos 2\theta - 1) \dots$$

Дальнейшие приближения целесообразно рассчитывать уже после вычисления первых двух приближений для μ , которое состоит из двух слагаемых: первое зависит от A_0 , второе от ΣA_n , из которых потребуется только A_1 и A_2 . Из (10)

$$\begin{aligned}
 A_0 &= -\ln \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[\tau(\eta) - A_0] \cos \Phi(\eta) d\eta = \\
 &= -\ln \left(1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\Phi^2}{2!} + \sum_1^\infty A_n \cos n\eta + \dots \right) d\eta \right) = \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\Phi_{01} \xi + \Phi_{10} \varepsilon + \Phi_{11} \varepsilon \xi + \dots - \left(\xi \frac{1}{3} v_1 \cos \eta + \dots \right)^2 \right] d\eta = \\
 &= \xi^2 \frac{1}{4} \mu_0^2 \left(1 - \frac{1}{9} v_1^2 \right) + \varepsilon^3 A_{30} + \dots
 \end{aligned}$$

Откуда

$$A_{00} = 0, \quad A_{10} = 0, \quad A_{20} = 0, \quad A_{11} = 0, \quad A_{01} = 0, \quad A_{02} = \frac{1}{4} \mu_0^2 \left(1 - \frac{1}{9} \mu_0^2 \right)$$

В выражении для A_n (9) второй интеграл является малой третьего порядка и поэтому далее опускается. Тогда, так же как и в [6]:

$$A_1 = \xi \frac{1}{3} \mu_0^2 + \varepsilon \xi \frac{1}{3} \mu_0^2 \mu_{01}' + O_3(\varepsilon, \xi), \quad A_2 = \xi^2 \frac{v_2}{12} \frac{\mu_0^4}{v_2 - \mu_0} + O_3(\varepsilon, \xi)$$

Теперь из (5), (8) и (24) легко получим

$$(29) \quad \mu_{01}'=0, \quad \mu_{01}'=\mu_0^2, \quad \mu_{20}'=0, \quad \mu_{11}'=0, \quad \mu_{02}'=\frac{3}{4}\mu_0^2+\frac{1}{12}\frac{\mu_0^4}{v_2-\mu_0}$$

Соотношения (28) и (29) позволяют рассчитать коэффициенты третьего порядка в разложении для Φ . Опуская выкладки, приведем конечный результат

$$(30) \quad \Phi_{30}=0, \quad \Phi_{21}=-\mu_0 \sin \theta, \quad \Phi_{12}=0, \quad \Phi_{03}=\left(\frac{5}{8}\mu_0^3+\frac{1}{24}\frac{-2v_2+5\mu_0}{v_2-\mu_0}\right) \sin \theta + \\ + \left(\frac{1}{24}\frac{\mu_0}{v_3-\mu_0}+\frac{1}{4}\mu_0^5\frac{\mu_0}{v_3-\mu_0}+\frac{3}{8}\mu_0^5\frac{\mu_0}{v_2-\mu_0}\frac{\mu_0}{v_3-\mu_0}\right) \sin 3\theta$$

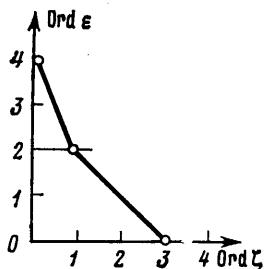
В разложении для Φ появилось слагаемое с неопределенным показателем $(l+1)$:

$$(31) \quad \varepsilon^{l+1} \left(d_1 - \frac{2\beta_1}{v_1^*} \right) \sin \theta$$

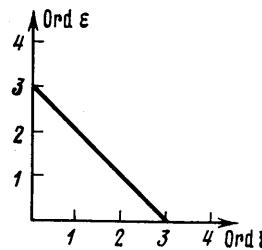
Если теперь подставить (28) и (30) в (19), то получим уравнение разветвления в виде

$$-\varepsilon^2 \xi \mu_0 + \xi^3 \mu_0^3 \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{24} \mu_0^2 \frac{-2v_2+5\mu_0}{v_2-\mu_0} \right) + o_4(\varepsilon, \xi)$$

Это уравнение необходимо разрешить относительно ξ и подставить полученное решение в преобразованную систему (15). Результат подстановки даст решение исходной системы. Так как теорема о неявной функции



Фиг. 1



Фиг. 2

ции здесь неприменима, то это решение определяется с помощью диаграммы Ньютона [5]. Эта диаграмма, определяющая малое решение, в этом случае представлена на фиг. 1.

Количество целочисленных отрезков на оси $ord \xi$ равно числу решений уравнения разветвления, а тангенс угла наклона между направлением $-ord \xi$ и диаграммой показывает, в какой форме следует искать эти решения; он численно равен показателям степени p_i в первом слагаемом рядов

$$\xi^{(i)} = \sum_i^\infty \varepsilon^{np_i} \xi_n, \quad i=1, 2, 3, \dots, \text{которые и представляют искомое решение.}$$

Полученное уравнение разветвления имеет три решения, причем одно из них представимо в виде ряда по степеням ε^{2n} и два — по целым степеням ε , что, конечно, не удобно для исследований.

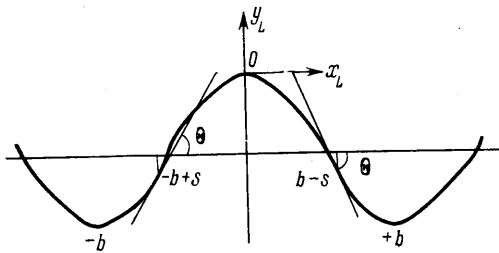
Если положить $l=2$, как и в [6], то $\Phi_{30}=(d_1-2\beta_1/v_1^*) \sin \theta$ и уравнение разветвления примет вид

$$(32) \quad \varepsilon^3 \left(d_1 - 2 \frac{\beta_1}{v_1^*} \right) - \varepsilon^2 \xi \mu_0 + \xi^3 \mu_0^3 \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{24} \mu_0^2 \frac{-2v_2+5\mu_0}{v_2-\mu_0} \right) + o_4(\varepsilon, \xi)$$

Диаграмма Ньютона, определяющая малое решение, в этом случае представлена на фиг. 2.

Теперь все три решения (32) представимы в виде рядов по целым степеням ε . Используя лемму соответствия между решениями уравнения разветвления и исходного преобразованного интегрального уравнения (22) [5], приходим к выводу, что решение уравнения (22) и как следствие системы (13) и уравнения (5), а также всей полной системы, следует искать в виде рядов по целым степеням параметра ε . Такое решение формально получено, но не исследовано в [3].

Для выяснения характера решения достаточно, как это показано в [5], рассмотреть главный член уравнения (32). В соответствии с диаграммой



Фиг. 3



Фиг. 4

Ньютона положим $\xi = \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 + \dots$ и подставим этот сходящийся ряд в (32). Сразу же получаем, что $\xi_2 = 0$, что соответствует равенству $C_{12} = 0$ в [3]. Для ξ_1 получаем следующее кубическое уравнение:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^3 \left[\xi_1^3 \mu_0^3 \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{24} \mu_0^2 \frac{-2v_2 + 5\mu_0}{v_2 - \mu_0} \right) - \right. \\ & \left. - \mu_0 \xi_1 + \left(d_1 - \frac{2\beta_1}{v_1^*} \right) \right] + o_4(\varepsilon, \xi) = 0 \end{aligned}$$

Сокращая на ε^3 и отбрасывая o_4 , получим

$$(33) \quad \xi_1^3 \mu_0^3 \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{24} \mu_0^2 \frac{-2v_2 + 5\mu_0}{v_2 - \mu_0} \right) - \mu_0 \xi_1 + \left(d_1 - \frac{2\beta_1}{v_1^*} \right) = 0$$

Из формул (4) и (14) следует, что $v_2 = \mu_0 + 9/\mu_0$. Тогда (33) перепишется в эквивалентном виде

$$(34) \quad \xi_1^3 - \frac{\mu_0}{T} \xi_1 + \frac{d_1 - 2\beta_1/v_1^*}{T} = 0, \quad T = \frac{1}{8} \mu_0^3 \left[5 + \frac{1}{27} \mu_0^2 (3\mu_0^2 - 18) \right]$$

Это кубическое уравнение имеет единственное действительное решение, если его дискриминант больше нуля, т. е. выполняется неравенство

$$(35) \quad \left(d_1 - \frac{2\beta_1}{v_1^*} \right)^2 > 32 [45 + \mu_0^2 (3\mu_0 - 18)]^{-1}$$

В [2] было показано, что $d_1 < 0$. Величина $v_1^* = 2(r_0 + r_0^{-1}) > 0$. Для определения знака величины β_1 предположим, что дно имеет синусоидальный характер, т. е. отлична от нуля лишь первая гармоника $\Theta(s(\theta))$:

$$\Theta(s(\theta)) = \varepsilon^2 \beta_1 \sin \left(-\theta + \frac{\pi}{b} \sum_1^{\infty} \varepsilon^n s_n \right) + \dots = -\varepsilon^3 \beta_1 \sin \theta + \dots$$

Физический смысл функции $\Theta = \Phi^*$ можно представить из фиг. 3. Очевидно, что $\Theta(-b+s) = -\Theta(b-s)$, причем $\Theta(b-s) < 0$ при $\theta > 0$, $\Theta(s) < 0$ и $\Theta(-b+s) > 0$ при $\theta < 0$, $\Theta(s) > 0$.

Из этих соображений в соответствии с (35) следует принять, что $\beta_1 > 0$. Тогда из (35) следует

$$(36) \quad |d_1| + \left| \frac{2\beta_1}{v_1^*} \right| > \sqrt{32[45+\mu_0^3(3\mu_0^2-18)]^{-1}}$$

Следовательно, возбуждение единственной резонансной волны имеет пороговый характер, причем для возбуждения составной волны над волнистым дном требуется меньшая амплитуда пульсаций атмосферного давления. По-видимому, волнистое дно стимулирует переход энергии пульсаций давления в энергию большой волны.

Единственное положительное решение (33) при условии (36) записывается в виде

$$\xi_1 = \left(\frac{|m|}{2T} + f \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{|m|}{2T} - f \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$|m| = \left| d_1 - \frac{\beta_1}{v_1^*} \right|, \quad f = \sqrt{\frac{9Tm^2 - \mu_0^2}{36T^3}}$$

Коэффициент ξ_1 определяет амплитуду первой гармоники составной волны, которая в свою очередь является основной и максимальной по амплитуде гармоникой. Величина ξ_1 определяется параметром m . Ее значение превосходит значение аналогичного коэффициента ξ_1^0 для свободной нелинейной волны. Это увеличение тем больше, чем больше $|m|$. В самом деле, из (33) непосредственно вытекает, что

$$\xi_1^0 = 2\sqrt{2}\mu_0^{-1} \left(5 + \frac{1}{9}\mu_0^2(\mu_0^2 - 6) \right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{T}}$$

Тогда превышение составной волны над свободной при условии (36):

$$\Delta\xi_1 = \xi_1 - \xi_1^0 = \left(\frac{|m|}{2T} + f \right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{|m|}{2T} - f \right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{\mu_0}{T} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Например, для $h=40$ м и $\lambda=400$ м (величины характеризуют волнение моря в районе Агульяского течения (ЮАР)) $\mu_0=3.53$; $\xi_1^0=0.215$; $|m|>0.505$ и

$$\Delta\xi_1 = \left(\frac{|m|}{153.35} + \frac{\sqrt{15.68m^2 - 1}}{607.33} \right)^{\frac{1}{3}} +$$

$$+ \left(\frac{|m|}{153.35} - \frac{\sqrt{15.68m^2 - 1}}{607.33} \right)^{\frac{1}{3}} - 0.215$$

Итак, $\Delta\xi_1$ — возрастающая функция m (см. фиг. 4).

Таким образом, действительно амплитуда составной волны превосходит амплитуду свободной нелинейной (а также чисто вынужденной [2]) волны, что отвечает условиям резонанса.

Кроме того, исследование уравнения разветвления в случае единственного действительного корня и применение леммы о взаимнооднозначном соответствии между малыми решениями уравнения разветвления и малыми решениями исходного интегрального уравнения ([5], лемма 12.I, § 12, гл. V) показывает, что решение основного интегрального уравнения

и всей системы, построенное в виде рядов по целым степеням ε , существует и единственно. Следовательно, доказана теорема: «Система уравнений (13), (11), (5), (10) и дифференцированного (4) при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ имеет единственное малое относительно ε и непрерывное по θ решение $\theta \in [0, 2\pi]$. Это решение — аналитическая функция ε . Здесь ε_0 отвечает области сходимости заданных рядов (2) и (3)».

Случай трех действительных решений характеристического уравнения (33), где ξ_1 фактически определяет амплитуду первой гармоники составной волны, менее интересен. Возникающие при этом волны неустойчивы, а две из них находятся в противофазе к основной волне, что можно показать, исследуя комплексные корни характеристического уравнения. В принципе они возникают не одновременно, но картина неустойчива и они имеют тенденцию преобразовываться одна в другую.

Поступила 22 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Секерж-Зенькович Я. И. О составных установившихся гравитационных волнах конечной амплитуды. ПММ, 1969, т. 33, № 4.
2. Потапкин В. С. Составные установившиеся волны на потоке тяжелой жидкости конечной глубины. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 5.
3. Потапкин В. С. Установившиеся составные волны на поверхности стационарного потока тяжелой несжимаемой жидкости над волнистым дном. В сб.: Цунами и внутренние волны. Севастополь, 1976.
4. Секерж-Зенькович Я. И. Об одном виде установившихся капиллярно-гравитационных волн конечной амплитуды на поверхности жидкости над волнистым дном. ПММ, 1973, т. 37, № 6.
5. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., Физматгиз, 1969.
6. Потапкин В. С. Существование и единственность решения задачи о составных волнах на поверхности потока жидкости. М., 1977 (Ин-т проблем мех. АН СССР. Препринт № 87).