

РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ НЕСУЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

А. А. ЗАЙЦЕВ, В. В. ТЮРЕВ

(Москва)

Задаче о неустановившемся обтекании несущей поверхности идеальной несжимаемой жидкостью посвящено много работ. Современное состояние численных методов решения этой задачи освещено в обзоре [1]. В настоящей статье рассматривается трехмерное неустановившееся обтекание деформирующейся несущей поверхности, за которой формируется спутная вихревая поверхность. Несущая и спутная вихревые поверхности представляются в параметрической форме. Используются метрики указанных поверхностей и аппроксимация введенной вихревой функции бикубическими сплайнами. Для удобства приложения развиваемой теории к машущему полету насекомых, где порой трудно выделить боковую и заднюю кромки крыла, вводится следующая терминология. Часть кромки несущей поверхности, с которой сходит спутная вихревая поверхность, называется задней кромкой. Остальная часть кромки несущей поверхности называется передней кромкой. На передней кромке скорость имеет особенность. Пробные расчеты показали эффективность разработанного метода.

1. Система определений. Равномерный поток идеальной несжимаемой жидкости со скоростью V_∞ набегаает на деформируемую несущую поверхность

$$(1.1) \quad x^k = f^k(a^1, a^2, t), \quad k=1, 2, 3; \quad 0 \leq a^1 \leq a_0^1, \quad -a_0^2 \leq a^2 \leq a_0^2, \quad t \geq t_0$$

Здесь x^k — декартовы координаты; a^1, a^2 — лагранжевы координаты несущей поверхности; t — время. Передняя и задняя кромки несущей поверхности определяются значениями лагранжевых координат соответственно

$$a^1 = 0, \quad -a_0^2 \leq a^2 \leq a_0^2 \\ a^1 = a_0^1, \quad -a_0^2 \leq a^2 \leq a_0^2; \quad a^2 = \pm a_0^2, \quad 0 \leq a^1 \leq a_0^1$$

Интенсивность несущей вихревой поверхности [2] $\Omega(a^1, a^2, t) = \mathbf{e}_k \Omega_x^k = = \mathbf{e}_k \Omega_k, \quad \Omega^3 = 0$ является соленоидальным вектором

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial a^1} (e_{12} \Omega^1) + \frac{\partial}{\partial a^2} (e_{12} \Omega^2) = 0 \\ \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_j \frac{\partial f^j}{\partial a^k}, \quad k=1, 2; \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{e_{12}}; \quad e_{12} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}; \quad g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$$

Здесь [3] \mathbf{e}_k — единичные векторы базиса декартовой системы координат, по повторяющемуся в произведениях индексу проводится суммирование от 1 до 3. Вихревая поверхность индуцирует скорость [2]

$$(1.3) \quad V_i(x^1, x^2, x^3, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{a_0^1} \int_{-a_0^2}^{a_0^2} \Omega(a^1, a^2, t) \times \mathbf{r}_{e_{12}} / r^3 da^1 da^2 \\ \mathbf{r} = \mathbf{e}_k [x^k - f^k(a^1, a^2, t)]$$

Спутная вихревая поверхность представляется в виде

$$(1.4) \quad x^k = f_w^k(b^1, b^2, t), \quad k=1, 2, 3; \quad 0 \leq b^1 \leq b_0^1(t), \quad -b_0^2 \leq b^2 \leq b_0^2$$

Здесь b^1 и b^2 — лагранжевы координаты спутной вихревой поверхности, причем на задней кромке несущей поверхности $b^1 = b_0^1(t)$, $-b_0^2 \leq b^2 \leq b_0^2$, а на краях спутной вихревой поверхности $b^2 = \pm b_0^2$, $0 \leq b^1 \leq b_0^1(t)$; $b^1 = 0$, $-b_0^2 \leq b^2 \leq b_0^2$. Интенсивность спутной вихревой поверхности и индуцируемая ею скорость представляется соответственно

$$(1.5) \quad \Omega_w = e_k \Omega_{wx}^k = \partial_{wk} \Omega_w^k, \quad \Omega_w^3 = 0$$

$$\partial_{wk} = e_j \frac{\partial f_w^j}{\partial b^k}, \quad k=1, 2$$

$$\partial_{w3} = \frac{\partial_{w1} \times \partial_{w2}}{e_{w12}}; \quad e_{w12} = \sqrt{g_{w11}g_{w12} - g_{w12}^2}, \quad g_{wji} = \partial_{wj} \cdot \partial_{wi}$$

$$(1.6) \quad V_w(x^1, x^2, x^3, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{b_0^1} \int_{-b_0^2}^{b_0^2} \frac{\Omega_w \times \mathbf{r}}{r^3} e_{12} db^1 db^2, \quad \mathbf{r} = e_k [x^k - f_w^k(b^1, b^2, t)]$$

Параметризация спутной вихревой поверхности выбирается так, что на задней кромке несущей поверхности лагранжевы координаты этих поверхностей связаны соотношениями

$$b^2 = K_2 a^2, \quad -K_2 a_0^2 \leq b^2 \leq K_2 a_0^2$$

$$(1.7) \quad b^2 = K_1 (a_0^1 - a^1) + K_2 a_0^2, \quad K_2 a_0^2 < b^2 \leq K_1 a_0^1 + K_2 a_0^2$$

$$b^2 = K_1 (a^1 - a_0^1) - K_2 a_0^2, \quad -K_2 a_0^2 > b^2 \geq -K_1 a_0^1 - K_2 a_0^2$$

$$(1.8) \quad b_0^1 = qt$$

Здесь K_1 и K_2 — коэффициенты, выбираемые из удобства вычислений. Имеют место соотношения между параметрами вихревых поверхностей на задней кромке

$$(1.9) \quad f_w^k(b_0^1, b^2, t) = f^k(a^1, a^2, t)_0, \quad \partial_{w0}^3 = \partial_0^3$$

$$(\partial_{w1} \Omega_w^1 + \partial_{w2} \Omega_w^2)_0 = (\partial_1 \Omega^1 + \partial_2 \Omega^2)_0$$

откуда получаются выражения для контравариантных компонент вектора интенсивности спутной вихревой поверхности на задней кромке через параметры несущей вихревой поверхности

$$(1.10) \quad \Omega_w^i = \Omega^i \partial_1 \cdot \partial_w^i + \Omega^2 \partial_2 \cdot \partial_w^i, \quad i=1, 2$$

$$\partial_w^1 = \frac{\partial_{w2} \times \partial_{w3}}{\partial_{w3} (\partial_{w1} \times \partial_{w2})}, \quad \partial_w^2 = \frac{\partial_{w3} \times \partial_{w1}}{\partial_{w3} (\partial_{w1} \times \partial_{w2})}$$

В силу (1.7) и (1.9) на задней кромке имеют место соотношения

$$(1.11) \quad \frac{\partial f_w^k}{\partial b^2} = \frac{1}{K_2} \frac{\partial f^k}{\partial a^2}, \quad -K_2 a_0^2 \leq b^2 \leq K_2 a_0^2$$

$$\frac{\partial f_w^k}{\partial b^2} = -\frac{1}{K_1} \frac{\partial f^k}{\partial a^1}, \quad K_2 a_0^2 < b^2 \leq K_1 a_0^1 + K_2 a_0^2$$

$$\frac{\partial f_w^k}{\partial b^2} = \frac{1}{K_1} \frac{\partial f^k}{\partial a^1}, \quad -K_2 a_0^2 > b^2 \geq -K_1 a_0^1 - K_2 a_0^2$$

Скорость течения имеет различные значения V_+ и V_- с разных сторон вихревой поверхности. Дифференциальные уравнения движения спутной вихревой поверхности имеют вид

$$(1.12) \quad \frac{\partial f_w^k}{\partial t} = V_0^k, \quad k=1, 2, 3, \quad e_k V_0^k = 1/2(V_+ + V_-)$$

Из соотношений (1.8), (1.9) и (1.12) на задней кромке имеем

$$(1.13) \quad \frac{\partial f_w^k}{\partial b^1} = \frac{1}{q} \left(\frac{\partial f^k}{\partial t} - V_0^k \right)$$

С помощью выражений (1.10), (1.11), (1.13) контравариантные компоненты вектора интенсивности спутной вихревой поверхности на задней кромке выражаются через контравариантные компоненты вектора интенсивности несущей поверхности, известное движение несущей поверхности и компоненты скорости уноса спутной вихревой поверхности.

Пусть b^1, b^2, b^3 — лагранжевы координаты, в которых описывается движение идеальной несжимаемой жидкости, $e_k = \partial r / \partial b^k$ — векторы базиса этой системы. Свободная вихревая поверхность является образом вихревого слоя конечной толщины 2ϵ в окрестности поверхности, определяемой уравнением $b^3 = 0$. Вне этого слоя $\omega = \text{rot } V = 0$. Причем

$$\Omega_w = e_{wk} \Omega_w^k = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} e_k \omega^k |n^\circ \cdot e_3| db^3$$

Здесь n° — единичный вектор нормали к поверхности $b^3 = \text{const}$. Уравнение неразрывности в случае несжимаемой жидкости в лагранжевой системе координат приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \{e_1 (e_2 \times e_3)\} = \frac{\partial}{\partial t} \{e_{12} |n^\circ \cdot e_3|\} = 0$$

С помощью этих представлений уравнение Гельмгольца для вихря, которое в лагранжевой системе координат имеет вид $\partial \omega^i / \partial t = 0$ [2], приводит к уравнениям для контравариантных компонент вектора интенсивности свободной вихревой поверхности

$$(1.14) \quad \frac{\partial}{\partial t} (e_{12} \Omega_w^1) = \frac{\partial}{\partial t} (e_{12} \Omega_w^2) = 0$$

Перепад давления на несущей поверхности определяется с помощью интеграла Коши — Лагранжа и представляется в следующем виде [2]:

$$(1.15) \quad \Delta p = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{M_1}^M e_{12} (\Omega^2 da^1 - \Omega^1 da^2) + \left(V_0^k - \frac{\partial f^k}{\partial t} \right) e_k (\Omega \times e_3)$$

где ρ — плотность жидкости. Интегрирование ведется вдоль некоторой линии на несущей поверхности, соединяющей точку M_1 на передней кромке с точкой M , в которой определяется перепад давления.

Условие отсутствия перепада давления в точке M_0 на задней кромке, эквивалентное в определенном смысле известному постулату Чаплыгина — Жуковского, приводит к нелинейному относительно Ω^1 и Ω^2 соотношению на задней кромке

$$(1.16) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{M_1}^{M_0} e_{12} (\Omega^2 da^1 - \Omega^1 da^2) + e_3 \left[\left(V_0^k - \frac{\partial f^k}{\partial t} \right) e_k \times \Omega \right] = 0$$

Элементарная подсосывающая сила $d\Gamma$, действующая на элемент передней кромки, который соответствует приросту координаты da^2 , записывается по аналогии с выражением для подсосывающей силы, действующей на переднюю кромку плоской пластины [4]:

$$(1.17) \quad d\Gamma = \pi/4\rho\Gamma^0(a^2, t) [\varphi(a^2, t)]^2 \sqrt{g_{22}} da^2$$

Суммарная подсосывающая сила получается интегрированием вдоль передней кромки.

Скорость течения V складывается из скорости набегающего потока V_∞ и индуктивных скоростей от вихревых поверхностей (1.3) и (1.6). Условие непроницаемости несущей поверхности приводит к интегральному уравнению относительно Ω^1 и Ω^2 , которое с помощью (1.3) и (1.6) записывается кратко

$$(1.18) \quad V_{i0}\varepsilon_3 = \frac{\partial f^k}{\partial t} e_k \varepsilon_3 - V_w \varepsilon_3 - V_\infty \varepsilon_3$$

Введение вихревой функции $\kappa(a^1, a^2, t)$, такой, что $e_{12}\Omega^1 = \partial\kappa/\partial a^2$, $e_{12}\Omega^2 = -\partial\kappa/\partial a^1$, позволяет автоматически удовлетворить уравнение (1.2). Ввиду (1.17) κ представляется произведением $\kappa = \sqrt{a^1}\Phi(a^1, a^2, t)$, где $\Phi(a^1, a^2, t)$ — регулярная на передней кромке функция. В самом деле:

$$\Omega^1 = \frac{\sqrt{a^1}}{e_{12}} \frac{\partial \Phi}{\partial a^2} \quad \Omega^2 = -\frac{1}{e_{12}\sqrt{a^1}} \left(\frac{1}{2} \Phi + a^1 \frac{\partial \Phi}{\partial a^1} \right)$$

Контравариантные компоненты вектора интенсивности спутной вихревой поверхности на задней кромке (1.10) выражаются через Φ :

$$(1.19) \quad \Omega_w^i = \frac{1}{e_{12}\sqrt{a^1}} \left(a^1 \frac{\partial \Phi}{\partial a^2} \varepsilon_{10}\varepsilon_w^i - a^1 \frac{\partial \Phi}{\partial a^1} \varepsilon_{20}\varepsilon_w^i - \frac{1}{2} \Phi \varepsilon_{20}\varepsilon_w^i \right), \quad i=1, 2$$

Аналогично преобразуются выражения (1.15) и (1.17)

$$(1.20) \quad \Delta p = \rho \left[\left(V_0^k - \frac{\partial f^k}{\partial t} \right) e_k (\Omega \times \varepsilon_3) - \sqrt{a^1} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]$$

$$(1.21) \quad d\Gamma = \frac{\pi}{16} \rho \Gamma^0 \frac{D(a^2, t) [g_{22}(0, a^2, t)]^{1/2}}{[e_{12}(0, a^2, t)]^2} [\Phi(0, a^2, t)]^2 da^2, \quad D = -T^0 \varepsilon_1$$

Интегральное уравнение для Ω^1 и Ω^2 (1.18) превращается в интегродифференциальное уравнение для Φ , где теперь

$$(1.22) \quad V_{i0}\varepsilon_3 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{a_0^1} \int_0^{a_0^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a^1} \sqrt{a^1} \Phi_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial a^2} \sqrt{a^1} \Phi_1 + \Phi \frac{\Phi_2}{2\sqrt{a^1}} \right) da^1 da^2$$

$$(1.23) \quad \Phi_k = \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\partial f^3}{\partial a^k} \frac{f_1^2 - 1}{r} - \frac{\partial f^2}{\partial a^k} \frac{f_1^3 - f^3}{r} \right) \varepsilon_3^1 + \left(\frac{\partial f^1}{\partial a^k} \frac{f_1^3 - f^3}{r} - \frac{\partial f^3}{\partial a^k} \frac{f_1^1 - f^1}{r} \right) \varepsilon_3^2 + \left(\frac{\partial f^2}{\partial a^k} \frac{f_1^1 - f^1}{r} - \frac{\partial f^1}{\partial a^k} \frac{f_1^2 - f^2}{r} \right) \varepsilon_3^3 \right], \quad k=1, 2$$

$$(1.24) \quad r = e_k (f_1^k - f^k), \quad f_1^k = f^k(a_1^1, a_1^2, t), \quad \varepsilon_3 = e_k \varepsilon_3^k$$

$$(1.25) \quad V_w \varepsilon_3 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{b_0^1} \int_0^{b_0^2} (\Omega_w^2 \Phi_{w2} - \Omega_w^1 \Phi_{w1}) e_{w12} db^1 db^2$$

$$(1.26) \quad \Phi_{wk} = \frac{1}{r_w^2} \left[\left(\frac{\partial f_w^3}{\partial b^k} \frac{f_2^2 - f_w^2}{r_w} - \frac{\partial f_w^2}{\partial b^k} \frac{f_1^2 - f_w}{r_w} \right) \mathfrak{e}_3^1 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial f_w^4}{\partial b^k} \frac{f_1^3 - f_w^3}{r_w} - \frac{\partial f_w^3}{\partial b^k} \frac{f_1^1 - f_w^1}{r_w} \right) \mathfrak{e}_3^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial f_w^2}{\partial b^k} \frac{f_1^1 - f_w^1}{r_w} - \frac{\partial f_w^1}{\partial b^k} \frac{f_1^2 - f_w^2}{r_w} \right) \mathfrak{e}_3^3 \right], \quad k=1, 2 \\ \mathbf{r}_w = \mathbf{e}_k (f_1^k - f_w^k)$$

Соотношение (1.16) на задней кромке становится граничным условием для интегродифференциального уравнения (1.18), (1.22)–(1.26)

$$(1.27) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{a^1}} \mathfrak{e}_3 \cdot \left[\left(V_0^k - \frac{\partial f^k}{\partial t} \right) \mathbf{e}_k \times \boldsymbol{\Omega} \right]$$

Постановка задачи. Движение несущей поверхности задается функциями (1.1). В начальный момент времени t_0 задается форма спутной вихревой поверхности, функции (1.4) при $t=t_0$; ее интенсивность $\Omega_w(b^1, b^2, t_0)$, а также значения функции Φ на задней кромке несущей поверхности. В частности, в начальный момент времени может не быть спутной вихревой поверхности, а $\Phi=0$ на задней кромке. С указанными начальными условиями и граничными условиями (1.19), (1.27) требуется решить систему уравнений (1.18), (1.12)–(1.14) относительно функций $\Phi(a^1, a^2, t)$, $f_w^k(b^1, b^2, t)$, $k=1, 2, 3$; $\Omega_w^k(b^1, b^2, t)$, $k=1, 2$. Решение этой задачи позволяет вычислить перепад давления Δp , подсосывающую силу и все аэродинамические характеристики несущей поверхности.

2. Численный метод решения задачи. Функция Φ представляется бикубическими сплайнами [5] по переменным a^1, a^2 следующим образом. Прямоугольник $0 \leq a^1 \leq a_0^1$, $-a_0^2 \leq a^2 \leq a_0^2$ на плоскости (a^1, a^2) разбивается на $m \times n$ клеток сеткой координатных линий

$$(2.1) \quad a^1 = a_i^1; \quad a^2 = a_j^2; \quad \Delta_i^1 = a_{i+1}^1 - a_i^1; \quad \Delta_j^2 = a_{j+1}^2 - a_j^2$$

В клетке $a_i^1 \leq a^1 \leq a_{i+1}^1$, $a_j^2 \leq a^2 \leq a_{j+1}^2$ функция Φ представляется бикубическим сплайном

$$(2.2) \quad \Phi^{ij}(a^1, a^2) = \sum_{q=1}^{m+1} \sum_{r=1}^{n+1} \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 a_{\alpha r} b_{\beta q} \times \\ \times \left(\frac{a^1 - a_i^1}{\Delta_i^1} \right)^k \left(\frac{a^2 - a_j^2}{\Delta_j^2} \right)^l \Phi_{qr}, \quad \alpha = nl + j, \quad \beta = mk + i$$

Здесь $a_{\alpha r}$ и $b_{\beta q}$ – элементы матриц размерностей $4m \times 4n$ и $4n \times 4n$ соответственно, которые зависят только от разбиений (2.1). Эти матрицы получаются путем обращения матриц коэффициентов при неизвестных двух систем $4m$ и $4n$ соответственно линейных алгебраических уравнений, определяющих коэффициенты соответствующих частичных сплайнов [5].

В плоскости лагранжевых переменных спутной вихревой поверхности (b^1, b^2) прямоугольник $0 \leq b^1 \leq b_0^1$, $-b_0^2 \leq b^2 \leq b_0^2$ разбивается на клетки сеткой координатных линий

$$(2.3) \quad b_i^1 = q \Delta t (i-1), \quad i=1, 2, \dots, l \\ b_j^2 = -K_1 a_0^1 - K_2 a_0^2 + K_1 a_j^1, \quad j=1, 2, \dots, m \\ b_j^2 = K_2 a_{j-n}^2, \quad j=m+1, m+2, \dots, m+n+1 \\ b_j^2 = 2K_1 a_0^1 + K_2 a_0^2 - K_1 a_{m+2n+2-j}^1, \quad j=m+n+2, \dots, 2m+n+1$$

Здесь Δt — шаг по времени при переходе к конечным разностям. В клетке $b_i^1 \leq b^1 \leq b_{i+1}^1$, $b_j^2 \leq b^2 \leq b_{j+1}^2$ функции $f_w^k(b^1, b^2, t)$, $\Omega_w^i(b^1, b^2, t)$, $k=1, 2, 3$; $i=1, 2$ интерполируются по значениям в узлах следующим образом:

$$(2.4) \quad f(b^1, b^2) = f(b_i^1, b_j^2) z_i(b^1) z_j(b^2) + f(b_{i+1}^1, b_j^2) z_{i+1}(b^1) z_j(b^2) + \\ + f(b_i^1, b_{j+1}^2) z_i(b^1) z_{j+1}(b^2) + f(b_{i+1}^1, b_{j+1}^2) z_{i+1}(b^1) z_{j+1}(b^2) \\ z_i(b) = \frac{b - b_{i+1}}{b_i - b_{i+1}}, \quad z_{i+1}(b) = \frac{b - b_i}{b_{i+1} - b_i}$$

Величины z_{wk} , e_{w12} в указанной клетке рассчитываются с помощью подстановки выражений типа (2.4) для $f_w^k(b^1, b^2, t)$ в соотношения (1.5).

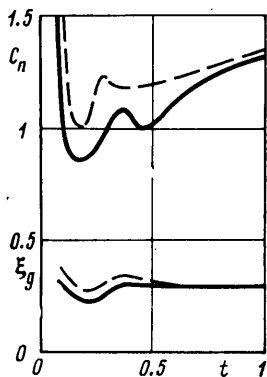
Алгоритм решения задачи для момента времени $t=t_i$ с переходом к моменту времени t_{i+1} следующий. Предполагается, что в момент времени t_i известны значения Φ_{ij} на задней кромке несущей поверхности, известно расположение узловых точек спутной вихревой поверхности, известны контравариантные компоненты вектора интенсивности этой поверхности во всех узловых точках, кроме тех, которые лежат на задней кромке несущей поверхности. На задней кромке контравариантные компоненты вектора интенсивности спутной вихревой поверхности выражаются с помощью соотношения (1.19) через функцию Φ и ее производные, а при использовании сплайновой аппроксимации (2.2) — через значения функции Φ в узловых точках. Таким образом, уравнение (1.18) содержит $m(n-1)$ неизвестных Φ_{ij} , не лежащих на задней кромке. Соответствующее число уравнений получается с помощью метода коллокации, т. е. удовлетворения уравнения (1.18) в $m(n-1)$ опорных точках. Получается замкнутая система линейных алгебраических уравнений относительно Φ_{ij} . Коэффициенты при неизвестных выражаются через интегралы по несущей поверхности, для вычисления которых каждая сплайновая ячейка разбивается дополнительно на клетки. Сингулярные интегралы рассчитываются в смысле главного значения Коши. В результате решения указанной системы уравнений становятся известными Φ_{ij} и, следовательно, известно сплайновое представление функции Φ в момент времени t_i . С этим Φ вычисляются перепад давления на несущей поверхности (1.20) и подсазывающая сила (1.21); входящая в (1.20) производная $\partial\Phi/\partial t$ подсчитывается с помощью конечных разностей коэффициентов сплайнов для моментов времени t_i и t_{i+1} .

Для совершения очередного шага по времени проводятся следующие вычисления. Рассчитываются компоненты V_0^k скорости уноса спутной вихревой поверхности (1.12) в узловых точках, которая складывается из скорости набегающего потока V_∞ и индуктивных скоростей от вихревых поверхностей (1.3) и (1.6). При этом используются сплайновое представление функции Φ и интерполяции спутной вихревой поверхности. Определяются координаты узловых точек спутной вихревой поверхности в момент времени t_{i+1} по формулам, которые получаются из уравнения (1.12) при переходе к конечным разностям. Вычисляются лагранжевы координаты узловых точек спутной вихревой поверхности на задней кромке несущей поверхности в момент времени t_{i+1} в соответствии с (1.8) и (2.3) по формуле $b_0^i(t_{i+1}) = b_0^i(t_i) + \Delta t$. Рассчитываются значения функции Φ в узловых точках на задней кромке несущей поверхности в момент времени t_{i+1} с помощью соотношения, которое получается из (1.27) после перехода к конечным разностям. Теперь можно переходить к следующему циклу. В каждом таком цикле подсчитываются аэродинамические силы и делается шаг по времени. С течением времени выстраивается спутная вихревая поверхность.

Вопросы о выборе разбиения несущей поверхности при построении сплайнов и о выборе шага по времени могут быть решены путем сравнения полученных при различных разбиениях и шагах результатов расчетов между собой, а также с известными данными.

3. Результаты расчетов. Несущая поверхность в виде квадратной пластины из состояния покоя внезапно начинает двигаться под углом атаки $\alpha=30^\circ$ с постоянной скоростью U_0 . Свободные вихри сходят с боковых и задней кромки. По принятой в статье терминологии боковые и задняя кромки пластины являются задней кромкой несущей поверхности. С передней кромки пластины пелена не сходит — это передняя кромка несущей поверхности. (Такое обтекание было рассчитано в [6] на основе представления несущей поверхности и спутной вихревой пелены сетью вихревых

нитей.) При $4 \times 4 = 16$ ячейках на полупластине и шаг по безразмерному времени $\Delta\tau = 0.1$ геометрическая картина образования вихревой пелены близка к той, что получена в работе [6]. При вычислении интегралов по несущей поверхности каждая сплайновая ячейка разбивалась на $4 \times 8 = 32$ клетки. Зависимости коэффициента нормальной силы $C_n = N/(qS)$ (N — нормальная к пластине сила, S — площадь пластины, q — скоростной напор) и безразмерной координаты центра давления $\xi_a = x_a/b$ (b — ширина пластины) от безразмерного времени $\tau = tU_0/b$ изображены на фиг. 1 сплошными линиями. Штриховыми линиями нанесены данные работы [6]. Эти данные находятся в согласии.

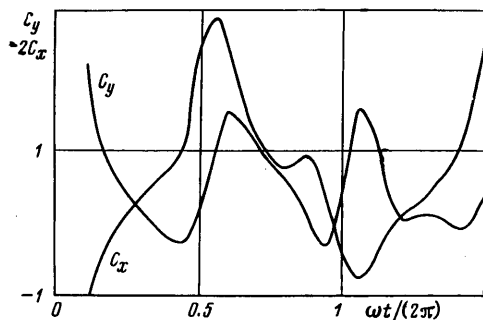


Фиг. 1

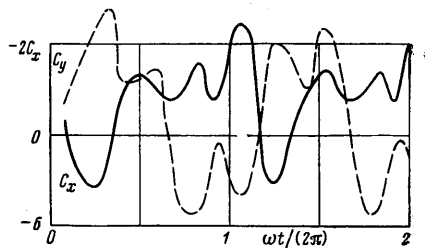
Движение несущей поверхности, имитирующей волнообразно машущее крыло, задается уравнениями

$$\begin{aligned}x^1 &= a^1, & x^2 &= a^2 \cos \varphi, & x^3 &= a^2 \sin \varphi \\ \varphi &= \beta(a^1) \sin(ka^1 + \omega t), & -1 &\leq a^2 \leq 1, \\ 0 &\leq a^1 \leq 0.5\end{aligned}$$

Скорость набегающего потока лежит в плоскости $x^2 = 0$ и составляет с осью x^1 угол α . Параметры k и ω определяют длину и скорость волны, бегущей по несущей поверхности. В расчетах длина волны была в 4 раза больше хорды, а ее скорость в 2 раза больше скорости набегающего



Фиг. 2



Фиг. 3

потока. Рассчитаны три случая: 1 — $\beta = \pi/12$; 2 — $\beta = \pi(1/6 + (a^1)^2/3)$; 3 — $\beta = \pi(1/6 - a^1/6 - (a^1)^2/3)$. Во всех этих случаях после первого взмаха распределение давления по крылу оказалось близким к периодическому по времени. Отношение произведения средней тяги за период на скорость набегающего потока к работе несущей поверхности за тот же отрезок времени рассматривается как коэффициент полезного действия η . Расчеты при $\alpha = 0$ показали, что для 1-, 2- и 3-го способов движения несущей поверхности коэффициенты η соответственно составляют 45, 34 и 60%. На фиг. 2 приводятся графики зависимости коэффициентов тяги $-C_x$ и подъемной силы C_y от фазы при первом способе движения для $\alpha = \pi/10$.

В [7] было высказано предположение, что если синхронно со взмахами изменять угол атаки так, чтобы в то время, когда крыло поднимается вверх, он был максимальным, то за период удастся расширить отрезки времени, на которых тяга и подъемная сила положительны. Такая возможность была обнаружена в расчетах для плоских машущих крыльев при $\alpha = \pi(1 + \cos \omega t)/12$. На фиг. 3 представлен результат расчета в виде

графика зависимости коэффициентов подъемной силы и тяги от времени. Эти и другие расчеты показали возможность использования описанного метода расчета для анализа машущего полета и других движений несущей поверхности при больших деформациях.

Поступила 23 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывные течения и нелинейные характеристики тонких несущих поверхностей в несжимаемой жидкости. Механика жидкости и газа, т. 11. М., 1978 (Итоги науки и техники. ВИНТИ).
2. Зайцев А. А. Несущая поверхность при больших деформациях. В сб. Аэромеханика и газовая динамика. М., «Наука», 1976.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 1 и 2. М., «Наука», 1976.
4. Голубев В. В. Лекции по теории крыла. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
5. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., «Мир», 1972.
6. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Нестационарная нелинейная теория тонкого крыла произвольной формы в плане. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 4.
7. Голубев В. В. Труды по аэродинамике. М.—Л., Гостехиздат, 1957.