

## О СТРУКТУРЕ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ДИСПЕРСНОЙ СМЕСИ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ

А. Н. ОСИПЦОВ

(Москва)

Рассматривается задача стационарного обтекания полубесконечной плоской пластины двухфазной средой типа газ — твердые частицы при малой вязкости несущей компоненты. Цель работы — исследование влияния рассогласования скоростей фаз на структуру течения в пограничном слое.

Аналогичная задача рассматривалась в работах [1–5], однако полученные решения не позволяют наглядно проследить развитие течения в пограничном слое и изменение коэффициента трения на всей длине пластины. В работах [1, 2, 4] не используется поперечная к потоку проекция уравнения импульса для частиц и приняты дополнительные предположения о постоянстве осредненной плотности частиц в пограничном слое [1], о равенстве поперечных компонент скоростей газа и частиц [4]. В монографии [2] рассмотрены лишь некоторые особенности течения, в частности торможение частиц вдоль поверхности пластины. В работах [3, 5] решение строится путем разложения в степенные ряды по положительным и отрицательным степеням продольной координаты, при этом предполагается, что вдали от передней кромки пластины осредненная плотность частиц в пограничном слое постоянна.

Ниже методом сращиваемых асимптотических разложений построены уравнения пограничного слоя для неравновесной по скоростям области течения, найдена асимптотика решения для больших расстояний от передней кромки. На основе численного решения изучено распределение параметров фаз и изменение коэффициента трения на всей длине пластины.

**1. Уравнения пограничного слоя.** Исследование поведения двухфазных систем обычно ведется в рамках модели двух взаимопроникающих континуумов [6]. В данной работе ограничимся случаем несжимаемой несущей фазы и пренебрежимо малой объемной концентрации частиц. Предполагается, что все частицы — сферы одинакового радиуса  $\sigma$ , физическая плотность вещества частиц много больше плотности газа  $\rho_s \gg \rho_0$ , броуновское движение частиц и их влияние друг на друга отсутствуют. В качестве силы взаимодействия между континуумами во всей области течения, в том числе и в пограничном слое, принята сила Стокса. Как показывают оценки [3], другие составляющие силы взаимодействия между континуумами необходимо учитывать в случае, когда физические плотности частиц и несущей фазы близки.

Поместим начало декартовой системы координат  $xu$  в переднюю кромку пластины, а ось  $x$  направим по ее поверхности. В безразмерном виде система уравнений, описывающих движение суспензии, примет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{V} &= 0, \quad \operatorname{div} \rho_s \mathbf{V}_s = 0 \\ (1.1) \quad (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla p + \frac{L}{l} \alpha \rho_s (\mathbf{V} - \mathbf{V}_s) &= \frac{l}{L} \varepsilon \Delta \mathbf{V} \\ (\mathbf{V}_s \cdot \nabla) \mathbf{V}_s &= \frac{L}{l} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_s) \end{aligned}$$

Здесь индекс  $s$  относится к параметрам континуума частиц  $\epsilon = \mu/v_\infty l \rho^\circ$ ,  $l = mv_\infty / 6\pi\mu$ , ( $m$  — масса частицы,  $v_\infty$  — скорость потока на бесконечности,  $\mu$  — вязкость несущей фазы),  $\alpha = \rho_{s\infty} / \rho^\circ$ ,  $L$  — характерный масштаб длины, выбранный для обезразмеривания координат. Остальные обозначения общеприняты. В качестве характерных масштабов при обезразмеривании выбраны: для компонент скорости обеих фаз  $v_\infty$ , для давления  $\rho^\circ v_\infty^2$ , для плотности континуума частиц  $\rho_{s\infty}$ .

На поверхности пластины следует задать условие прилипания несущей фазы

$$(1.2) \quad u = v = 0$$

В невозмущенном потоке

$$(1.3) \quad u = u_s = \rho_s = 1, \quad v = v_s = 0, \quad p = p_\infty$$

При рассмотрении обтекания пластины в качестве характерной длины обычно принимается расстояние от кромки пластины до рассматриваемой области. Поскольку задачей данного исследования является анализ влияния рассогласования скоростей фаз на структуру течения в пристеночной области, при выводе уравнений пограничного слоя положим  $L = l$ , так как  $l$  имеет смысл длины торможения частицы, влетающей со скоростью  $v_\infty$  в покоящийся газ.

Будем считать, что вязкая длина  $\mu/v_\infty \rho^\circ$  много меньше  $l$ , т. е.  $\epsilon \ll 1$ . Построим асимптотическое решение системы (1.1) при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Малый параметр стоит при старших производных, и решение вырожденной задачи при  $\epsilon = 0$  вследствие понижения порядка уравнений не может удовлетворить условию прилипания на пластине  $u = 0$ . Согласно методу срачиваемых асимптотических разложений [7], найдем сначала внешнее разложение, т. е. асимптотическое решение (1.1), справедливое при  $\epsilon \rightarrow 0$  и фиксированных  $x$  и  $y$ . В соответствии с физическим смыслом внешнее разложение есть равномерный однородный поток

$$(1.4) \quad u = u_s = \rho_s = 1, \quad v = v_s = 0, \quad p = p_\infty$$

Для построения внутреннего разложения введем растянутую переменную  $\eta = y\epsilon^{-1/2}$ . Будем искать внутреннее разложение в виде

$$(1.5) \quad u(x, \eta) + \dots, \quad u_s(x, \eta) + \dots, \quad \rho_s(x, \eta) + \dots \\ p(x, \eta) + \dots, \quad \sqrt{\epsilon} v(x, \eta) + \dots, \quad \sqrt{\epsilon} v_s(x, \eta) + \dots$$

Подставляя (1.5) в (1.1) и оставляя главные члены, получим уравнения пограничного слоя

$$(1.6) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \rho_s u_s}{\partial x} + \frac{\partial \rho_s v_s}{\partial \eta} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} + \alpha \rho_s (u - u_s) = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \\ u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial \eta} = u - u_s, \quad u_s \frac{\partial v_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial \eta} = v - v_s$$

Необходимо поставить граничные условия на пластине (1.2) и потребовать срачивания с параметрами внешнего обтекания

$$(1.7) \quad u, u_s, \rho_s \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty$$

Аналогичные уравнения можно получить из уравнений пограничного слоя [8], выведенных методом погранслойных поправок, пренебрегая объемной концентрацией частиц.

Для построения единственного решения системы (1.6) в силу ее параболичности необходимо задать начальные профили функций  $u$ ,  $u_s$ ,  $\rho_s$ ,  $v_s$ . Эти функции должны удовлетворять условиям срачивания с асимптотическим решением (1.1) в окрестности передней кромки пластины ( $L \sim \mu/v_\infty \rho^0$ ), т. е. там, где нарушаются предположения, при которых выведены уравнения пограничного слоя. Запишем уравнения для главных членов разложения решения в окрестности передней кромки. Для этого в (1.1) положим  $L = \mu/v_\infty \rho^0$  и устремим  $\epsilon$  к нулю. Получим систему

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{V} &= 0, \quad \operatorname{div} \rho_s \mathbf{V}_s = 0 \\ (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla p &= \Delta \mathbf{V}, \quad (\mathbf{V}_s \cdot \nabla) \mathbf{V}_s = 0 \end{aligned}$$

Видно, что в окрестности передней кромки задачи определения параметров фаз разделяются: для несущей фазы получаем уравнения Навье — Стокса с числом Рейнольдса, равным единице; для частиц, учитывая условия срачивания с внешним потоком, получаем  $\rho_s = u_s = 1$ ,  $v_s = 0$ . Как следует из анализа первого приближения, первый ненулевой член разложения  $v_s$  в этой области имеет порядок  $\epsilon$ . Решение задачи для несущей фазы, как и в однородной вязкой жидкости, срачивается в параболических координатах с решением Блазиуса уравнений Прандтля. Таким образом, для уравнений пограничного слоя (1.6) в качестве начальных условий для  $u$  необходимо задать профиль Блазиуса, а для частиц  $u_s = \rho_s = 1$ ,  $v_s = 0$ . Этот результат имеет наглядное физическое истолкование: на расстоянии порядка вязкой длины взаимодействия обеих фаз не успевает проявиться, так как по предположению длина торможения частицы много больше вязкой длины.

**2. Результаты численного решения.** Для численного решения систему (1.6) удобно переписать в параболических координатах  $x$ ,  $\xi = \eta/\sqrt{x}$  и ввести новые искомые функции  $w = \sqrt{x}v$ ,  $w_s = \sqrt{x}v_s$ ,  $q = \rho_s u_s$ , тогда система (1.6) принимает вид

$$\begin{aligned} x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\xi}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \xi} &= 0, \quad x \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\xi}{2} \frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{qw_s}{u_s} \right) = 0 \\ xu \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{2w - \xi u}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha x q \left( \frac{u}{u_s} - 1 \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\ xu_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + \left( \frac{2w_s - \xi u_s}{2} \right) \frac{\partial u_s}{\partial \xi} &= x(u - u_s) \\ xu_s \frac{\partial w_s}{\partial x} + \left( \frac{2w_s - \xi u_s}{2} \right) \frac{\partial w_s}{\partial \xi} &= \frac{u_s w_s}{2} + x(w - w_s) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Граничные и начальные условия

$$\begin{aligned} u = w = 0, \quad \xi = 0, \quad x \geq 0 \\ u_s = u = q = 1, \quad \xi = \infty, \quad x \geq 0 \\ u_s = q = 1, \quad w_s = 0, \quad u = \varphi'(\xi), \quad x = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

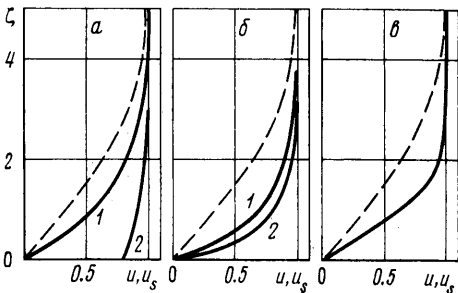
Здесь  $\varphi(\xi)$  — функция Блазиуса [9], удовлетворяющая следующим уравнению и граничным условиям

$$(2.3) \quad 2\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0$$

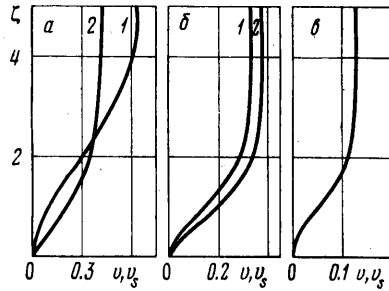
$$(2.4) \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(\infty) = 1$$

Решение системы (2.1) с граничными условиями (2.2) проводилось численным методом на ЭВМ БЭСМ-6. Для аппроксимации уравнений на прямолинейной сетке была реализована неявная разностная схема с порядком аппроксимации  $\Delta x + \Delta \xi^2$ . Для решения разностных уравнений на каждом слое по  $x$  применялся метод прогонки. Окончательные расчеты проводились с параметрами сетки  $\Delta x = 0.001$ ,  $\Delta \xi = 0.01$ .

Как показывают результаты численных расчетов, структура течения для различных значений  $\alpha$  однотипна. На фиг. 1–3 представлены резуль-



Фиг. 1



Фиг. 2

таты расчетов профилей параметров обеих фаз в пограничном слое при  $\alpha = 3$ . На фиг. 1 показано развитие профилей продольных скоростей обеих фаз по координате  $x$ , пунктиром изображен профиль Блазиуса в газе без частиц. На фиг. 2 представлены профили вертикальных составляющих скоростей фаз. Графики а), б), в) соответствуют значениям  $x = 0.2, 1, 12$ , индексом 1 отмечены профили несущей фазы, 2 — профили дисперсной фазы. Продольная скорость частиц по всей толщине пограничного слоя превосходит продольную скорость газа, причем при  $x < 1$  на поверхности пластины она отлична от нуля. Релаксация продольных скоростей фаз практически заканчивается при  $x = 5$ .

При малых  $x$  существует область значений  $\xi$ , где  $v_s < v$ , т. е. частицы пересекают линии тока газа по направлению к пластине. При больших  $x$  по всей толщине пограничного слоя имеем  $v_s > v$ . Необходимо отметить, что релаксация  $v$  и  $v_s$  происходит на значительно большей длине, чем релаксация  $u$  и  $u_s$ . На фиг. 3 показано формирование профиля плотности дисперсной фазы с развитием течения по  $x$ , кривые 1–3 соответствуют значениям  $x = 0.2, 1, 12$ . При  $x < 1$  плотность дисперсной фазы монотонно возрастает с приближением к пластине и достигает на стенке конечного значения, равного  $\rho_{sw} = 1/(1-x)$ . При  $x \geq 1$   $\rho_s$  с приближением к пластине стремится к бесконечности. С завершением релаксации скоростей фаз формируется существенно неоднородный профиль  $\rho_s$ , причем существует область значений  $\xi$ , при которых  $\rho_s < 1$ .

Как видно на фиг. 1, при больших  $x$  профили продольных скоростей обеих фаз выходят на автомодельный. Этот предельный профиль (см. п. 3) совпадает с профилем Блазиуса от аргумента  $z = \xi(1+\alpha)^{1/2}$ , т. е. с решением уравнений Прандтля для однородной жидкости с увеличенной плотностью  $\rho = 1 + \alpha$ .

На фиг. 4 представлены результаты расчетов местного коэффициента трения  $c_f$  при значениях  $\alpha = 0, 3, 10, 20$  (кривые 1–4 соответственно). По

оси ординат отложена величина

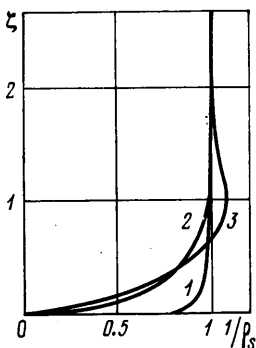
$$c_f \sqrt{\text{Re}} = \tau_w \sqrt{\text{Re}} / \rho^0 v_\infty^2$$

Здесь  $\tau_w$  — местное касательное напряжение на стенке,  $\text{Re}$  — местное число Рейнольдса, в котором в качестве характерной длины взято значение размерной координаты  $x$ .

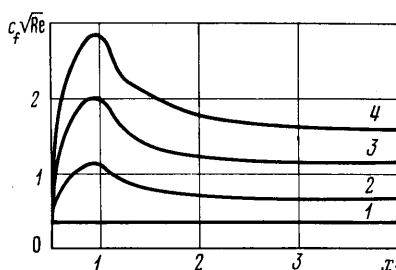
При обтекании пластины однородной вязкой жидкостью справедливо соотношение

$$c_f = 0.332 / \sqrt{\text{Re}}$$

Для уравнений (1.6) этот случай соответствует отсутствию влияния частиц на движение несущей фазы, т. е.  $\alpha = 0$ . Как видно на фиг. 4, ко-



Фиг. 3



Фиг. 4

эффициент трения при различных значениях  $\alpha$  с увеличением  $x$  изменяется от значений, соответствующих решению Блазиуса в газе без частиц (асимптотика  $c_f$  при  $x \rightarrow 0$ ), до значений, соответствующих решению Блазиуса в однородном газе с плотностью  $\rho = 1 + \alpha$ , т. е. до значений

$$(2.5) \quad c_f = 0.332(1 + \alpha)^{1/2} / \sqrt{\text{Re}}$$

(асимптотика  $c_f$  при  $x \rightarrow \infty$ ). Причем во всей области течения, исключая область очень малых  $x$ , коэффициент трения превосходит величину, соответствующую в замороженному течению, т. е. решению Блазиуса для однородной жидкости с увеличенной плотностью.

**3. Асимптотика решения для больших расстояний от передней кромки.** Для выяснения асимптотического поведения решения системы (1.6) построим уравнения пограничного слоя, справедливые в области, лежащей много ниже по потоку, чем область релаксации скоростей. Для этого в системе (1.1) положим  $L \gg l$ . Обозначим  $l/L = \delta(\epsilon)$ , причем  $\delta \rightarrow 0$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ . В дальнейшем будем отмечать все переменные в рассматриваемой области индексом 1.

По аналогии с методом, изложенным в п. 1, введем растянутую переменную пограничного слоя  $\eta_1 = y_1 / (\epsilon \delta)^{1/2}$ .

Будем искать решение внутри пограничного слоя в виде

$$(3.1) \quad \begin{aligned} &u_1(x_1, \eta_1) + \dots, u_{s1}(x_1, \eta_1) + \dots, \rho_{s1}(x_1, \eta_1) + \dots \\ &(\epsilon \delta)^{1/2} v_1(x_1, \eta_1) + \dots, (\epsilon \delta)^{1/2} v_{s1}(x_1, \eta_1) + \dots \end{aligned}$$

Подставляя (3.1) в (1.1) и оставляя главные члены, получим уравнения пограничного слоя

$$(3.2) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta_1} = 0, \quad u_1 \frac{\partial \rho_{s1}}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial \rho_{s1}}{\partial \eta_1} = 0$$

$$(1 + \alpha \rho_{s1}) \left( u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta_1} \right) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta_1^2}, \quad u_{s1} = u_1, \quad v_{s1} = v_1$$

Граничные условия аналогичны (1.2), (1.7). Отметим, что координата  $x_1$  играет роль внешней, а  $x$  — внутренней координаты для неравновесной по скоростям области течения,  $x_1 = \delta x$ . Решение системы (3.2) при  $x_1 \rightarrow 0$  должно срачиваться с решением (1.6) при  $x \rightarrow \infty$ , причем срачивание удобно производить в переменных  $\zeta, x$ , поскольку  $\zeta = \eta/\sqrt{x} = \eta_1/\sqrt{x_1}$ , т. е. двигаясь из области неравновесного течения по параболам  $\eta/\sqrt{x} = \text{const}$ . В формулировку задачи (3.2) не входит  $l$ , поэтому решение должно быть автомодельным. Введем переменную  $\zeta = \eta_1/\sqrt{x_1}$  и будем искать функцию тока в виде  $\psi(\zeta, x_1) = \sqrt{x_1} \varphi_1(\zeta)$

Из (3.2) с учетом граничных условий получаем

$$(3.3) \quad (1 + \alpha) \varphi_1 \varphi_1'' + 2 \varphi_1''' = 0, \quad \rho_{s1} = 1$$

Граничные условия примут вид

$$(3.4) \quad \varphi_1(0) = \varphi_1'(0) = 0, \quad \varphi_1'(\infty) = 1$$

Введем функцию  $F(z) = (1 + \alpha)^{1/2} \varphi_1(\zeta)$ ,  $z = \zeta(1 + \alpha)^{1/2}$

Для  $F(z)$  из (3.3), (3.4) получаем задачу Блазиуса (2.3), (2.4).

Для профиля скорости  $u_1(\zeta)$  справедливо соотношение

$$(3.5) \quad u_1(\zeta) = \varphi_1'(\zeta) = F'(z)$$

Следовательно, решение  $u_1(\zeta)$  системы (3.2) совпадает с автомодельным решением Блазиуса от переменной  $z$ , т. е. с решением уравнений Прандтля в однородной жидкости с плотностью  $\rho = 1 + \alpha$ . Коэффициент трения в рассматриваемой области находится из (3.5) и имеет вид (2.5).

Численные расчеты профилей продольных скоростей фаз и коэффициента трения в неравновесной области течения подтверждают найденную асимптотику решения; так, уже при  $x = 12$  профиль  $u(\zeta)$ , приведенный на фиг. 1, практически совпадает с (3.5).

Аutomодельное решение системы (3.2) с постоянной плотностью, очевидно, не является равномерно пригодным в рассматриваемой области течения, так как из результатов численных расчетов (фиг. 3) следует наличие существенно неоднородного профиля дисперсной фазы в пристеночной области. Этот факт свидетельствует о существовании некой более «тонкой» в асимптотическом смысле области, в которой не пригодна решение (3.2) с  $\rho_{s1} = 1$ . Назовем эту область неавтомодельным пограничным слоем (НПС). Будем отмечать параметры течения в НПС индексом 2. Введем новую растянутую координату  $\eta_2 = y_1 e^{-1/2} \delta^{-1/4}$ .

Будем искать решение в НПС в виде

$$(3.6) \quad \delta^{1/4} u_2(x_1, \eta_2) + \dots, \delta^{1/4} u_{s2}(x_1, \eta_2) + \dots, \rho_{s2}(x_1, \eta_2) + \dots$$

$$\varepsilon^{1/2} \delta^{3/4} v_2(x_1, \eta_2) + \dots, \varepsilon^{1/2} \delta^{3/4} v_{s2}(x_1, \eta_2) + \dots$$

Порядки величин выбираются из соображений непротиворечивости и срачивания с решением в других областях.

Подставляя (3.6) в (1.1) и оставляя уравнения для главных членов, получим систему

$$(3.7) \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial \eta_2} = 0, \quad u_2 \frac{\partial \rho_{s2}}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \rho_{s2}}{\partial \eta_2} = 0$$

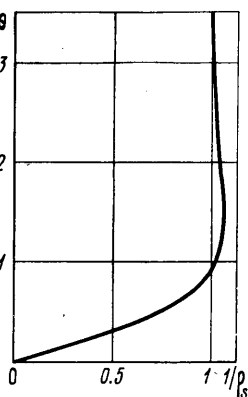
$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta_2^2} = 0, \quad u_2 = u_{s2}, \quad v_2 = v_{s2}$$

Учитывая равенство нулю  $u_2$  и  $v_2$  на пластине и условие срачивания  $u_2$  с  $u_1$  при  $\eta_2 \rightarrow \infty$ , из (3.7) находим

$$(3.8) \quad u_2 = \varphi''(0) \eta_2 (1 + \alpha)^{1/2} x_1^{-1/2}, \quad v_2 = \varphi''(0) \eta_2^2 (1 + \alpha)^{1/2} x_1^{-3/2} / 4$$

$$\frac{\partial \rho_{s2}}{\partial x_1} + \frac{\eta_2}{4x_1} \frac{\partial \rho_{s2}}{\partial \eta_2} = 0$$

Из последнего уравнения (3.8) следует, что значение  $\rho_{s2}$  сохраняется вдоль кривых  $\eta_2 x_1^{-1/4} = \text{const}$ . Величина  $\rho_{s2}$  должна удовлетворять условию срачивания с величиной  $\rho_s$  в области неравновесного по скоростям течения. Так как  $\eta_2 x_1^{-1/4} = \eta x^{-1/4} = \theta$ , срачивание удобно производить в переменных  $\theta, x$  при  $x_1 \rightarrow 0$  и  $x \rightarrow \infty$  соответственно. Таким образом, профиль плотности, рассчитанный из (1.6) в переменных  $\theta, x$ , должен выходить на автомоделный профиль, являющийся начальным условием для  $\rho_{s2}$ , из НПС. Этот результат подтверждают численные расчеты. На фиг. 5 представлен профиль  $1/\rho_s(\theta)$ , рассчитанный для  $\alpha = 5$  при  $x = 12$ , причем результаты расчетов при  $x > 12$  практически совпадают с приведенным графиком.



Фиг. 5

Отметим, что наличие неоднородного профиля плотности в пограничном слое при больших  $x$  не оказывает существенного влияния на величину коэффициента трения, т. е. коэффициент трения в области, где релаксация скоростей практически закончилась, можно приближенно рассчитывать из решения Блазиуса для замороженного движения частиц.

В случае, когда массовая концентрация частиц  $\alpha$  пренебрежимо мала, все результаты значительно упрощаются (достаточно положить  $\alpha = 0$  во всех полученных выражениях). Оказывается, что частицы не влияют на движение газа и для несущей фазы справедливо решение Блазиуса в газе без частиц.

В заключение автор благодарит В. П. Стулова за внимание к работе и полезные рекомендации.

Поступила 10 XII 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Chiu H. H. Boundary layer flow with suspended particles. Princeton Univ. Dept. Aeronaut. Engng Rept., 1962, No. 620.
2. Соу С. Л. Гидродинамика многофазных систем. М., «Мир», 1971.
3. Singleton R. E. The compressible gas-solid particle flow over a semi-infinite flat plate. Z. angew. Math. und Phys., 1965, Bd 16, No. 4.
4. Marble F. E. Dynamics of a gas containing small solid particles. Combust. and Plo-puls. Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press, 1963.
5. Soo L. S. Non-equilibrium fluid dynamics-laminar flow over a flat plate. Z. angew. Math. and Phys., 1968, Bd 19, No. 4.
6. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М., «Наука», 1978.
7. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
8. Стулов В. П. Об уравнениях ламинарного пограничного слоя в двухфазной среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, № 1.
9. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.