

## О ФОРМЕ ТОНКОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КАВЕРНЫ

И. Г. НЕСТЕРУК

(Москва)

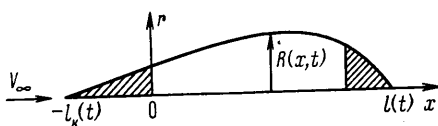
Проблеме расчета пространственных нестационарных кавитационных течений посвящено очень небольшое число работ. В статьях [1, 2] при помощи метода источников и стоков, распределенных по оси тонких осесимметричных тела и каверны, получены дифференциальные уравнения для формы нестационарной каверны. В интегродифференциальном уравнении, полученном в настоящей работе, учтен ряд дополнительных членов, что позволило отказаться от требования  $|\ln \epsilon| \gg 1$ , принятого в [1, 2]. Полученное уравнение справедливо при более слабом ограничении  $\epsilon \ll 1$ .

В работе [3] задача об определении формы каверны сведена к системе интегральных уравнений. Примеры расчета формы каверны по нестационарным уравнениям работ [1-3] неизвестны.

В работе [4] получено уравнение для формы тонкой осесимметричной нестационарной каверны на основе полуэмпирического подхода.

В данной работе получено с точностью порядка  $\epsilon^2$  ( $\epsilon$  — малый постоянный параметр, имеющий порядок отношения поперечного размера системы кавитатор — каверны — замыкатель к продольному) интегродифференциальное уравнение для формы тонкой осесимметричной нестационарной каверны. Сформулирована краевая задача и получено в первом приближении (с точностью до членов порядка  $\epsilon^2 \ln \epsilon$ ) аналитическое решение соответствующего дифференциального уравнения. Рассмотрен ряд конкретных задач.

**1. Вывод уравнения.** Рассматривается осесимметричное нестационарное безвихревое обтекание системы кавитатор — каверна — замыкатель идеальной, несжимаемой, весомой жидкостью. Задача рассматривается в



неинерциальной системе отсчета, в которой центр донного сечения кавитатора покоится. Цилиндрическая система координат выбрана, как показано на фигуре.

Скорости будут обезразмериваться делением на текущее значение скорости набегающего потока  $V_\infty'(t)$ , длины — на постоянное характерное значение  $L'$ , времена — на постоянное время  $t_\infty'$ . Значения последних будут оговорены ниже. Штрихом вверх будут обозначаться физические (безразмерные) величины.

Система тел предполагается тонкой, т. е.  $\epsilon L' \sim R_m'(t) \ll (l_k'(t) + l'(t)) \sim L'$ , где  $R_m'$  — максимальный поперечный размер системы,  $l_k'$  — длина кавитатора,  $l'(t)$  — суммарная длина каверны и замыкателя.

Уравнение неразрывности дает следующее выражение для безразмерного потенциала скорости  $\Phi = \Phi'/L'V_\infty'(t)$ :

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$$

Граничное условие на бесконечности имеет вид  $\Phi \rightarrow x$  для любого момента времени. На поверхности системы тел выполняется условие непротекания

$$(1.2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big/ \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial F}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial t} \tau;$$

$$F(x, t) = \frac{R(x, t)}{\varepsilon}; \quad \tau = \frac{L'}{t_x' V_{\infty}'(t)}; \quad v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

Внешнее разложение для потенциала, связанное с предельным процессом  $\varepsilon \rightarrow 0$  при фиксированных  $x, r, t$  будет искажаться в виде

$$\Phi(x, r, t, \varepsilon) = x + \mu_1(\varepsilon) \Phi_1(x, r, t) + \mu_2(\varepsilon) \Phi_2(x, r, t) + \dots$$

где функции  $\Phi_i$  вследствие линейности задачи удовлетворяют нулевым условиям на бесконечности и уравнению (1.1),  $\mu_i$  — некоторые функции от  $\varepsilon$ .

Решение для  $\Phi_1$  будет искажаться в виде потенциала точечных источников с зависящей от времени интенсивностью  $Q(x, t)$ , распределенных на интервале  $-l_k(t) \leq x \leq l(t)$ , т. е.

$$\Phi_1(x, r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-l_k(t)}^{l(t)} \frac{Q(\xi, t)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + r^2}} d\xi$$

Путем выделения эффективной области сингулярности (метод аналогичен примененному в [5] на стр. 199) можно показать, что  $\Phi_1$  представляется в виде

$$\Phi_1 = \frac{Q(x, t)}{2\pi} \ln r + T + o(1); \quad T = -\frac{Q(x, t)}{2\pi} \ln 2 - \\ - \frac{1}{4\pi} \int_{-l_k(t)}^{l(t)} \frac{\partial Q}{\partial \xi} \text{sign}(x-\xi) \ln |x-\xi| d\xi$$

Внутреннее разложение, справедливое в окрестности границы системы тел и связанное с предельным процессом  $\varepsilon \rightarrow 0$  при фиксированных  $x, t, r_* = r/\varepsilon$ , будет искажаться в виде

$$\Phi(x, r_*, t, \varepsilon) = x + \delta_1(\varepsilon) \varphi_1(x, r_*, t) + \delta_2(\varepsilon) \varphi_2(x, r_*, t) + \dots$$

Ясно, что разложение в таком виде пригодно всюду, за исключением окрестностей точек торможения. Подстановка в (1.1) и выделение старших членов порядка  $\delta_1/\varepsilon^2$  дает следующее уравнение для  $\varphi_1$ :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r_*} = 0$$

решение которого записывается в виде

$$(1.3) \quad \varphi_1 = A(x, t) \ln r_* + B(x, t)$$

Из граничного условия (1.2) следует

$$\frac{\delta_1(\varepsilon)}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi_1(x, F(x, t), t)}{\partial r_*} = \varepsilon \left[ (1 + \dots) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} \tau \right]$$

Подстановка в это уравнение выражения (1.3) дает

$$(1.4) \quad \frac{\delta_1(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \frac{A}{F(x, t)} = \frac{\partial F}{\partial x} + \tau \frac{\partial F}{\partial t}$$

откуда при  $\tau \ll 1$  следует, что  $\delta_1(\varepsilon) = \varepsilon^2$  и

$$(1.5) \quad A(x, t) = F \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \tau \frac{\partial F}{\partial t} \right)$$

Неизвестная функция  $B(x, t)$  должна определяться из условия сращивания в промежуточном пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;  $r_\eta = r/\eta(\varepsilon)$ ,  $x, t$  фиксированы

$$\begin{aligned} & \{ \mu_1(\varepsilon) [Q(x, t) \ln(\eta r_\eta) / 2\pi + T(x, t)] + \dots \\ & \dots - \varepsilon^2 [A(x, t) \ln(\eta r_\eta / \varepsilon) + B(x, t)] \} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Член порядка  $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$  не может быть сращен при таком выборе разложения, поэтому во внутреннее разложение следует добавить старший член  $\delta_0(\varepsilon) \varphi_0(x, t) = \varepsilon^2 \ln \varepsilon A(x, t)$ , который не изменяет уравнение для  $\varphi_1$  и вид граничного условия (1.4). После этого условие сращивания дает:

$$A(x, t) = Q/2\pi; \quad \mu_1(\varepsilon) = \varepsilon^2$$

Таким образом, внутреннее разложение для потенциала имеет вид

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \Phi(x, r_*, t, \varepsilon) &= x + \varepsilon^2 \ln \varepsilon A(x, t) + \\ &+ \varepsilon^2 \{ A(x, t) \ln r_* + B(x, t) \} + o(\varepsilon^2) \\ B(x, t) &= -A(x, t) \ln 2 - \frac{1}{2} \int_{-l_*(t)}^{l_*(t)} \frac{\partial A}{\partial \xi} \operatorname{sign}(x - \xi) \ln |x - \xi| d\xi \end{aligned}$$

Здесь  $A(x, t)$  определяется формулой (1.5). Выражение (1.6) имеет такую же структуру, как и выражение для потенциала в стационарном случае (см. [5]). Отличие состоит в разных выражениях для  $A(x, t)$ ,  $B(x, t)$ . Можно показать, что, так же как и в стационарном случае, следующий член внутреннего разложения имеет порядок  $\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon$ .

Уравнение для формы нестационарной каверны может быть получено из интеграла Коши — Лагранжа

$$(1.7) \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial t'} + \frac{v_r'^2 + v_x'^2}{2} + \frac{p'}{\rho'} \mp g x' - \frac{dV_\infty'}{dt'} x' = f'(t')$$

Здесь знак «минус» соответствует направленному вдоль набегающего потока вектору силы тяжести; знак «плюс» — противоположному направлению; последний член в левой части представляет собой потенциал силы инерции. Значение функции  $f'(t')$  можно определить в бесконечно удаленной от тела точке, лежащей на уровне схода струй. В этой точке  $x' = 0$ ;  $v_r' = 0$ ;  $v_x' = V_\infty'(t)$ ;  $p' = p_\infty'(0, t)$ ;  $\partial \Phi' / \partial t' = 0$  и, следовательно,

$$f'(t') = \frac{V_\infty'^2}{2} + \frac{p_\infty'(0, t')}{\rho'}$$

Подстановка выражения для  $f'$  в (1.7) дает следующее уравнение:

$$\tau \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Phi S(t) + \frac{v_r^2 + v_x^2}{2} = \frac{\sigma(t)}{2} \pm \frac{x}{\operatorname{Fr}^2(t)} + \frac{1}{2} + x S(t)$$

$$S(t) = \frac{L'}{V_{\infty}'^2(t)} \frac{dV_{\infty}'}{dt'}; \quad \sigma(t) = \frac{2[p_{\infty}'(0, t) - p_k'(t)]}{\rho' V_{\infty}'^2(t)}$$

$$\text{Fr}(t) = \frac{V_{\infty}'(t)}{\sqrt{gL'}}$$

Здесь  $p_k'$  — давление в каверне,  $\sigma(t)$  и  $\text{Fr}$  — числа кавитации и Фруда. С использованием выражения (1.6) уравнение для формы тонкой нестационарной каверны запишется в виде

$$(1.8) \quad \varepsilon^2 \ln \varepsilon \left[ \tau \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} + AS \right] +$$

$$+ \varepsilon^2 \left[ \tau \frac{\partial A}{\partial t} \ln \frac{R}{\varepsilon} + \tau \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} \ln \frac{R}{\varepsilon} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2 \left( \frac{\varepsilon}{R} \right)^2 + AS \ln \frac{R}{\varepsilon} + BS \right] +$$

$$+ O(\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon) = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{x}{\text{Fr}^2}$$

Полученное выражение при  $\partial/\partial t=0$ ,  $S=0$  переходит в уравнение для стационарной каверны (см. [6]). Неизвестная функция  $l(t)$ , входящая в выражение для  $B(x, t)$ , должна определяться из схемы замыкания. В качестве удобной схемы можно выбрать следующую. Пусть уравнение (1.8) описывает форму не только каверны, но и замыкателя. Тогда условие безотрывного замыкания выполняется автоматически и  $l(t)$  определяется как решение уравнения

$$(1.9) \quad R(l(t), t) = 0$$

Уравнение (1.8) получено при одном и том же давлении вдоль каверны ( $p_k'$  — функция только от  $t$ ), а на замыкателе имеется критическая точка, и, следовательно, давление на нем не может быть постоянно. Однако следует иметь в виду, что полученные асимптотические разложения справедливы только вдали от концов системы тел и уравнение (1.8) вблизи критических точек не обеспечивает постоянства давления. Опыт расчета установившихся осесимметричных и плоских кавитационных течений, где также возникает проблема определения длины каверны, показывает, что аналог условия (1.9) —  $R(l) = 0$  вполне приемлем для практики (см., например, [7, 8]). Окончательный ответ на вопрос о пригодности той или иной схемы замыкания может дать только численное интегрирование уравнения (1.8) и сравнение с экспериментом.

Для решения уравнения (1.8) необходимо наложить начальные и граничные условия

$$(1.10) \quad R(x, 0) = R_1(x), \quad \frac{\partial R(x, 0)}{\partial t} = R_2(x)$$

$$(1.11) \quad R(0, t) = R_3(t); \quad \frac{\partial R(0, t)}{\partial x} = R_4(t)$$

Здесь  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  — заданные функции. Если считать, что  $R_3$  и  $R_4$  равны радиусу кавитатора и производной от него в точке схода струй, то для насадки фиксированной формы  $R_3$ ,  $R_4$  постоянны.

Если известны функции  $dV_{\infty}'/dt'$ ,  $\sigma(t)$ , то уравнений (1.8), (1.9) достаточно для определения формы каверны, в противном случае необходи-

мо задать дополнительные соотношения. Например, при движении тела по инерции для вычисления сопротивления можно использовать выражение (1.6), и тогда для  $dV_{\infty}'/dt'$  получается интегродифференциальное соотношение, которое должно решаться совместно с (1.8), (1.9).

**2. Квазистационарное решение.** В случае  $\tau \rightarrow 0$ ,  $S \rightarrow 0$  уравнение (1.8) запишется в виде

$$(2.1) \quad \varepsilon^2 \ln \varepsilon \frac{\partial A}{\partial x} + \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial A}{\partial x} \ln \frac{R}{\varepsilon} + \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2 \left( \frac{\varepsilon}{R} \right)^2 \right\} + \\ + O(\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon) = \frac{\sigma(t)}{2} \pm \frac{x}{Fr^2(t)}$$

где  $A(x, t) = F(x, t) \partial F / \partial x$ ,  $B(x, t)$  определяется выражением из предыдущего пункта. Уравнение (2.1) с условиями (1.9), (1.11) позволяет определить форму каверны в квазистационарном случае. Действительно, уравнение (2.1) в каждый фиксированный момент времени совпадает с уравнением стационарной каверны (см. [6]). Таким образом, при достаточно медленных эволюциях форму каверны можно рассчитать по стационарному уравнению с текущими значениями чисел кавитации и Фруда.

Для справедливости гипотезы квазистационарности недостаточно того, чтобы кавитатор двигался с малым ускорением, т. е. чтобы

$$(2.2) \quad |S| = \left| \frac{dV_{\infty}'}{dt'} \right| \frac{L'}{V_{\infty}'^2} \ll 1$$

Необходимо также, чтобы характерное время задачи было достаточно велико, т. е. чтобы  $\tau \ll 1$ .

Характерное время может определяться различными физическими процессами. Например, изменение числа кавитации дает характерное время  $t_{\sigma}' = |\sigma| / |d\sigma/dt'|$ . Аналогично можно определить характерные времена изменения скорости набегающего потока и числа  $Fr - t_v'$  и  $t_f'$ . Гипотеза квазистационарности справедлива, когда  $\tau = \max \{ \tau_f, \tau_v, \tau_{\sigma}, \dots \} \ll 1$ .

Поскольку при выполнении условия (2.2) малость  $\tau_{\sigma} = |S|$  обеспечивается, необходимо проверить малость величин  $\tau_f$ ,  $\tau_v$  и др. В случае движения кавитатора в тяжелой жидкости с постоянным давлением в каверне и выполненным условием (2.2) имеют место следующие требования квазистационарности:

$$t_f' = \frac{V_{\infty}'}{|dV_{\infty}'/dt'|} \gg \frac{L'}{V_{\infty}'}; \quad t_v' = \frac{\sigma V_{\infty}'}{2g} \gg \frac{L'}{V_{\infty}'}$$

Первое из требований выполняется благодаря (2.2), второе дает условие  $\sigma \gg Fr^{-2}$ , которое свидетельствует о том, что при движении с малым ускорением и постоянным давлением в каверне квазистационарное решение имеет место только при достаточно больших числах кавитации.

В случае невесомой жидкости для квазистационарности достаточно условия (2.2). Следует подчеркнуть, что условия  $\sigma \gg Fr^{-2}$  достаточно только при постоянном давлении в каверне. Если это не так, то для квазистационарности необходимо кроме (2.2) выполнение условия  $t_p' = p_h' / |dp_h'/dt'| \gg L'/V_{\infty}'$ .

**3. Решение уравнения в первом приближении.** Уравнение (1.8) является нелинейным интегродифференциальным с частными производными, и его решение связано с очень большими трудностями. Если ограничить-

ся членами порядка  $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$ , то уравнение (1.8) запишется в виде

$$(3.1) \quad \varepsilon^2 \ln \varepsilon \left[ \tau \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} + AS \right] = \frac{\sigma(t)}{2} \pm \frac{x}{Fr^2(t)}$$

Уравнение (3.1) справедливо, вообще говоря, только для очень тонких каверн, когда  $|\ln \varepsilon| \gg 1$ . Вместе с уравнением (1.5) и условиями (1.10), (1.11) уравнение (3.1) позволяет определить форму нестационарной каверны. В использовании условия (1.9) нет необходимости, так как (3.1) не содержит  $l(t)$ .

Уравнения (3.1), (1.5) являются линейными дифференциальными с частными производными первого порядка и решаются стандартными методами (см. [9], стр. 71). Решения обоих уравнений ищутся в первом квадранте ( $x \geq 0, t \geq 0$ ) в некоторой окрестности положительных полуосей ( $t=0, x \geq 0; x=0, t \geq 0$ ). Проекция характеристического направления на плоскость  $x, t$  задается уравнением  $dt/dx = \tau, 0 < \tau \sim 1$ . Стационарный случай ( $\tau=0$ ) рассмотрен в [6]. Поскольку в любой точке начального многообразия касательное и характеристическое направления имеют разные проекции на плоскость переменных  $x, t$ , то условия (1.10), (1.11) обеспечивают существование и единственность поставленной задачи.

Характеристики уравнения (3.1) задаются следующей системой уравнений:

$$(3.2) \quad \frac{dx}{du} = 1; \quad \frac{dt}{du} = \tau; \quad \frac{dA}{du} = -AS + \frac{1}{E} \left( \frac{\sigma}{2} \pm \frac{x}{Fr^2} \right)$$

где  $E = \varepsilon^2 \ln \varepsilon$ ,  $u$  — параметр, изменяющийся вдоль характеристики, такой, что на начальном многообразии  $x_0(y), t_0(y), A_0(y)$   $u=0$ .

Решение системы (3.2) записывается в виде

$$(3.3) \quad x = \int_{t_0}^t \frac{dt}{\tau} + x_0, \quad u = \int_{t_0}^t \frac{dt}{\tau}$$

$$(3.4) \quad A = z(t, t_0) \left\{ \int_{t_0}^t \left[ \frac{\sigma(t)}{2} \pm \left( \int_{t_0}^t \frac{dt}{\tau} + x_0 \right) / Fr^2(t) \right] \frac{dt}{E\tau z(t, t_0)} + A_0 \right\}$$

$$(3.5) \quad z(t, t_0) = \exp \left( - \int_{t_0}^t \frac{S dt}{\tau} \right)$$

Характеристики (1.5) задаются системой уравнений

$$(3.6) \quad \frac{dx}{du} = 1, \quad \frac{dt}{du} = \tau, \quad \frac{dF^2}{du} = 2A$$

Первые два уравнения систем (3.2) и (3.6) совпадают и их решения задаются выражениями (3.3). Решение последнего уравнения (3.6) записывается в виде

$$F^2 = 2 \int_{t_0}^t \left\{ \int_{t_0}^t \left[ \frac{\sigma(t)}{2} \pm \left( \int_{t_0}^t \frac{dt}{\tau} + x_0 \right) / Fr^2(t) \right] \frac{dt}{E\tau z(t, t_0)} + A_0 \right\} \times$$

(3.7)

$$\times \frac{z(t, t_0) dt}{\tau} + F_0^2$$

где  $F_0^2$  — значение  $F^2$  на начальном многообразии.

В области влияния начальных условий решение запишется в виде

$$(3.8) \quad R^2(x, t) = \frac{2}{\ln \varepsilon} \int_0^t \frac{z(t, 0)}{\tau} dt \int_0^t \left[ \frac{\sigma(t)}{2} \pm \left( \int_0^t \frac{dt}{\tau} + x_0 \right) / Fr^2(t) \right] \times$$

$$\times \frac{dt}{\tau z(t, 0)} + 2A_1(x_0) \int_0^t \frac{z(t, 0) dt}{\tau} + R_1^2(x_0), \quad x \geq \int_0^t dt/\tau$$

$$(3.9) \quad A_1(\xi) = R_1(\xi) \frac{dR_1}{d\xi} + \tau(0) R_1(\xi) R_2(\xi)$$

В уравнении (3.8)  $x_0$  после интегрирования нужно заменить на выражение, следующее из (3.4) при  $t_0=0$ , а именно

$$x_0 = x - \int_0^t \frac{dt}{\tau}.$$

В области влияния граничных условий решение имеет следующий вид:

$$(3.10) \quad R^2(x, t) = \frac{2}{\ln \varepsilon} \int_{t_0}^t \frac{z(t, t_0)}{\tau} dt \int_{t_0}^t \left[ \frac{\sigma(t)}{2} \pm \left( \int_{t_0}^t \frac{dt}{\tau} \right) / Fr^2(t) \right] \times$$

$$\times \frac{dt}{\tau z(t, t_0)} + 2A_2(t_0) \int_{t_0}^t \frac{z(t, t_0)}{\tau} dt + R_3^2(t_0), \quad x \leq \int_0^t dt/\tau$$

$$(3.11) \quad A_2(\xi) = R_3(\xi) R_4(\xi) + \tau(\xi) R_3(\xi) \frac{dR_3}{d\xi}$$

В уравнении (3.10)  $t_0$  после интегрирования нужно заменить зависимостью  $t_0(x, t)$ , полученной из уравнения  $x = \int_{t_0}^t \frac{dt}{\tau}$  в частности при  $\tau = \text{const}$   $t_0 = t - x\tau$ .

Чтобы решение  $R(x, t)$  не имело разрывов на характеристике, исходящей из начала координат, должны выполняться следующие условия:  $R_1(0) = R_3(0)$ ;  $A_1(0) = A_2(0)$ . С учетом (3.9), (3.11) второе условие эквивалентно

$$\frac{dR_1(0)}{d\xi} + \tau(0) R_2(0) = R_4(0) + \tau(0) \frac{dR_3(0)}{d\xi}$$

Если требовать большую гладкость решения, то помимо условий, указанных выше, необходимо наложить дополнительные требования на функции  $R_1, R_2, R_3, R_4$ . В классе непрерывных решений, который будет исследоваться ниже, достаточно, чтобы эти функции были непрерывно дифференцируемы.

Решение задачи, задаваемое выражениями (3.8), (3.10), подтверждает принцип «независимости расширения каверны», выдвинутый в работе [10]. Действительно, при фиксированном  $x$  радиус каверны не зависит от характера пульсаций радиуса в других сечениях. Легко видеть, что принцип «независимости расширения каверны» справедлив только в рассматриваемом приближении очень тонких каверн ( $|\ln \varepsilon| \gg 1$ ). Решение более точного уравнения (1.8) указанным свойством не обладает.

В качестве примера будет рассмотрена задача об эволюции стационарной в начальный момент каверны с постоянным давлением за кавитатором фиксированной формы при наложении на набегающий поток постоянного ускорения  $\pm a'$ . Для простоты рассматривается случай невесомой жидкости. Функция  $R_1$  может быть взята из решения с точностью порядка  $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$  стационарной задачи (см. [6])

$$R_1^2 = \sigma(0) x^2 / 2 \ln \varepsilon + 2R_4 R_3 x + R_3^2; \quad R_2 = 0$$

где  $\varepsilon$  — отношение радиуса миделевого сечения каверны к полной длине системы кавитатор — каверна — замыкатель в начальный момент времени. Характерное время можно задать выражением:  $t_x' = V_{\infty}'(0)/a'$ ; в качестве характерной длины выбрана длина системы кавитатор — каверна — замыкатель в начальный момент времени. Тогда

$$(3.13) \quad \tau(t) = |S(0)| / (1 \pm t); \quad S(t) = S(0) / (1 \pm t)^2; \quad \sigma(t) = \sigma(0) / (1 \pm t)^2$$

Подстановка (3.13) в (3.8), (3.10) дает при  $x \geq (t \pm t^2/2) / |S(0)|$  и при  $x \leq (t \pm t^2/2) / |S(0)|$  соответственно

$$R^2 = R_1^2(x) \mp \frac{R_4 R_3 t^2}{|S(0)|} + \frac{1}{S(0) \ln \varepsilon} \left[ \frac{\sigma(0) t^4}{8S(0)} + \frac{\sigma(0) x t^2}{2} \right]$$

$$R^2 = \frac{(t-t_0)^2 \sigma(0)}{2S^2(0) \ln \varepsilon} + \frac{2R_3 R_4}{S(0)} (1 \pm t_0) (t-t_0) + R_3^2$$

$$t_0 = \mp 1 \pm \sqrt{(t+1)^2 \mp 2|S(0)|x}$$

4. Движение с малым ускорением. Из (3.8), (3.10) при  $\tau \gg S$  следует

$$(4.1) \quad R^2 = \frac{2}{\ln \varepsilon} \int_0^t \frac{dt}{\tau} \int_0^t \left[ \frac{\sigma(t)}{2} \pm \left( \int_0^t \frac{dt}{\tau} + x_0 \right) / \text{Fr}^2(t) \right] \frac{dt}{\tau} +$$

$$+ 2A_1(x_0) \int_0^t \frac{dt}{\tau} + R_1^2(x_0), \quad x \geq \int_0^t \frac{dt}{\tau}$$

$$(4.2) \quad R^2 = \frac{2}{\ln \varepsilon} \int_{t_0}^t \frac{dt}{\tau} \int_{t_0}^t \left[ \frac{\sigma(t)}{2} \pm \left( \int_{t_0}^t \frac{dt}{\tau} \right) / \text{Fr}^2(t) \right] \frac{dt}{\tau} +$$

$$+ 2A_2(t_0) \int_{t_0}^t \frac{dt}{\tau} + R_3^2(t_0), \quad x \leq \int_0^t \frac{dt}{\tau}$$

Здесь  $t_0$  определяется из уравнения  $x = \int_{t_0}^t \frac{dt}{\tau}$ ;  $x_0 = x - \int_0^t \frac{dt}{\tau}$ ;  $A_1, A_2$

задаются выражениями (3.9), (3.11).



В качестве примера будет рассмотрена задача о движении кавитатора фиксированной формы с постоянными скоростью и давлением в каверне в поле силы тяжести. Начальные функции можно взять из решения с точностью  $\epsilon^2 \ln \epsilon$  стационарной задачи (см. [6])

$$(4.3) \quad R_1^2 = \sigma(0) \frac{x^2}{2 \ln \epsilon} \pm \frac{x^3}{3 \text{Fr}^2 \ln \epsilon} + 2R_3 R_4 x + R_3^2; \quad R_2 = 0$$

$$(4.4) \quad t_x' = t_\sigma' = |\sigma(0)| \frac{V_\infty'}{2g}; \quad \sigma(t) = \sigma(0) (1 \mp t \text{sign } \sigma(0)); \quad \tau = \frac{2}{\text{Fr}^2 |\sigma(0)|}$$

В качестве характерной длины  $L'$  выбрана длина системы кавитатор — каверна — замыкатель в начальный момент времени.

Подстановка (4.4) в (4.1), (4.2) дает

$$(4.5) \quad R^2 = R_1^2 \mp \frac{|\sigma(0)| t^3}{6\tau^2 \ln \epsilon}, \quad x \geq \frac{t}{\tau}$$

$$(4.6) \quad R^2 = R_1^2 \mp |\sigma(0)| x^2 \frac{t - 2x\tau/3}{2 \ln \epsilon}, \quad x \leq \frac{t}{\tau}$$

Как видно из (4.3), (4.4), выражение (4.6) при  $\tau \rightarrow 0$  представляет собой квазистационарное решение. Уравнения (4.5), (4.6) показывают, что в случае, когда вектор силы тяжести направлен вдоль набегающего потока, каверна с течением времени становится все более широкой и длинной. При противоположном направлении силы тяжести добавки к  $R_1^2(x)$  отрицательны и возможно смыкание каверны. Из уравнений (4.4) — (4.6) следует, что условие смыкания эквивалентно условию

$$(4.7) \quad \sigma(0) < \sigma_* - 2l_c / \text{Fr}^2$$

где  $\sigma_*(\text{Fr}, R_4)$  — значение числа кавитации, при котором полученное из (4.6), (4.4) уравнение

$$(4.8) \quad \frac{\sigma x^2}{2 \ln \epsilon} - \frac{x^3}{\text{Fr}^2 \ln \epsilon} + 2R_4 R_3 x + R_3^2 = 0$$

имеет два равных положительных корня  $l_c(\text{Fr}, R_4)$ .

Поскольку в качестве начальной формы каверны использовано стационарное решение, начальное число кавитации должно быть больше минимального  $\sigma_m$  (см. [6]). Расчет показывает, что для тонких кавитаторов существует диапазон  $\sigma(0)$ , удовлетворяющих условию (4.1) и ббльших  $\sigma_m$ . Верхняя и нижняя границы этого диапазона зависят от формы насадка и числа  $\text{Fr}$ . Таким образом, если кавитатор движется в направлении вектора силы тяжести с достаточно малыми числами кавитации, то происходит смыкание каверны.

Уравнение (4.8) можно использовать для расчета формы каверны при вертикальном движении с постоянной скоростью. Если для определения  $t_x'$ ,  $\tau$  использовать число кавитации в момент смыкания  $\sigma_*$  и считать, что  $\epsilon$  равно отношению радиуса миделевого сечения каверны на участке от носика кавитатора до точки смыкания к длине этого участка, то форма каверны определится выражением (4.8), в котором под  $\sigma$  понимается текущее значение числа кавитации ( $\sigma(0) = 0$ ). Время смыкания определится выражением  $t_c' = \sigma_* V_\infty' / 2g$ . Например, для конуса с  $R_4 = 0.1$  величина  $\sigma_*$  в диапазоне  $2 < \text{Fr} < 100$  хорошо аппроксимируется зависимостью  $\sigma_* V_\infty' \approx 4\sqrt{gR_3'}$ . Если радиус донного среза конуса  $R_3'$  составляет 1 см, то

$t_c' \approx 60 \cdot 10^{-3}$  сек. В работе [11] для сферы диаметром 1 дюйм экспериментально получено значение  $t_c' \approx 70 \cdot 10^{-3}$  сек.

Автор благодарен В. П. Карликову и Ю. Л. Якимову за интересные обсуждения результатов работы.

Поступила 16 VII 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С. Приближенное решение задачи об отрывном обтекании осесимметричного тела. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
2. Якимов Ю. Л. Об осесимметричном срывном обтекании тела вращения при малых числах кавитации. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
3. Ивченко В. М. Нестационарные задачи гидродинамики суперкавитирующих тел. В сб.: Гидроаэродинамика несущих поверхностей. Киев, «Наукова думка», 1966.
4. Логвинович Г. В. Вопросы теории тонких осесимметричных каверн. Тр. ЦАГИ, 1976, вып. 1797.
5. Коци Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир». 1972.
6. Нестерук И. Г. К вопросу о форме тонкой осесимметричной каверны в весоной жидкости. Изв. АН СССР, МЖТ, 1979, № 6.
7. Chou Y. S. Axisymmetric cavity flows past slender bodies of revolution. J. Hydronautics, 1974, vol. 8, No. 1.
8. Рождественский В. В. Кавитация. Л., «Судостроение», 1977.
9. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
10. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами. Киев, «Наукова думка», 1969.
11. Gilbarg D., Anderson R. A. Influence of atmospheric pressure on the phenomena accompanying the entry of spheres into water. J. Appl. Phys., 1948, vol. 19, No. 2.