

**МЕХАНИКА  
ЖИДКОСТИ И ГАЗА**  
**№ 4 • 1980**

УДК 532.5.013.4:538.4

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПОДВИЖНОГО  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТОЛБА НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ  
ЖИДКОСТИ**

**В. И. АРХИПЕНКО, Ю. Д. БАРКОВ, В. Г. БАШТОВОЙ,  
М. С. КРАКОВ**

(Минск)

Создание намагничающихся жидкостей позволяет управлять течениями таких жидкостей со свободными границами (струи, сопло) с помощью магнитного поля.

Проведенные к настоящему времени исследования обнаружили стабилизирующее действие тангенциального к поверхности жидкости однородного магнитного поля [1-4]. существенно повышающего устойчивость, например, тангенциального разрыва [1], плоских пленок [2, 3] и пленочных течений [4]. К этому же эффекту приводят и неоднородное магнитное поле с градиентом напряженности, направленным от свободной поверхности внутрь жидкости [4, 5]. Обнаружен также и специфический магнитный механизм неустойчивости свободной поверхности в нормальном к ней магнитном поле [6]. Теоретическое исследование влияния магнитного поля на устойчивость осесимметричной струи намагничающейся жидкости было проведено в работах [5, 7]. Особого внимания заслуживает то обстоятельство, что сравнительная простота создания постоянных и переменных магнитных полей различной пространственной конфигурации обеспечивает возможность формирования в лабораторных условиях многообразных стационарных и нестационарных форм свободной поверхности намагничающейся жидкости и открывает определенные перспективы моделирования поверхностных явлений, обусловленных различного рода ускорениями, в том числе центростремительными или самогравитацией.

В настоящей работе теоретически и экспериментально исследуется устойчивость невесомого неподвижного цилиндрического слоя идеальной намагничающейся жидкости, образованного вокруг цилиндрического проводника с током и окруженного немагнитной жидкостью.

**1. Постановка задачи.** В рассматриваемом случае при отсутствии силы тяжести форма свободной поверхности намагничающейся жидкости определяется только двумя факторами: силами поверхностного натяжения и конфигурацией магнитного поля. Магнитное поле  $\mathbf{H}$  создается цилиндрическим проводником радиуса  $R$  с током  $J$  и при сохранении осевой симметрии задачи является точным решением во всем пространстве уравнений Максвелла  $\mathbf{H} = [H_r=0, H_\theta=H_z=J/2\pi r, H_z=0]$  (ось  $z$  цилиндрической системы координат  $(r, \theta, z)$  направлена вдоль оси проводника). Так как магнитное поле имеет только азимутальную составляющую, т. е. всюду касательно к свободной поверхности, то отсутствуют как магнитный скачок давления, так и магнитный механизм неустойчивости поверхности. Действие магнитного поля в этом случае проявляется только в наличии объемной магнитной силы, вызванной неоднородностью поля.

Движение жидкостей предполагается потенциальным и потенциалы скорости в намагничающейся жидкости  $\Phi$  и в окружающей среде  $\Phi_e$  удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$(1.1) \quad \Delta\Phi=0, \quad \Delta\Phi_e=0$$

В каждой из сред сохраняется интеграл Коши — Лагранжа

$$(1.2) \quad p + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho (\nabla \varphi)^2 - \mu_0 \int_0^H M dH = \text{const}$$

$$(1.3) \quad p_e + \rho_e \frac{\partial \varphi_e}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho_e (\nabla \varphi_e)^2 = \text{const}$$

а на границе их раздела выполняется условие

$$(1.4) \quad p = p_e + \alpha (R_1^{-1} + R_2^{-1})$$

Здесь  $\rho$ ,  $\rho_e$  — плотности,  $p$ ,  $p_e$  — давления в намагничающейся жидкости и окружающей среде соответственно,  $\mu_0$  — магнитная проницаемость вакуума,  $M$  — намагниченность жидкости, для которой в дальнейшем будет использован линейный закон  $M = \chi H = [0, \chi H, 0]$ ,  $t$  — время,  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $R_1$ ,  $R_2$  — главные радиусы кривизны поверхности.

Наличие внутри слоя намагничающейся жидкости твердой поверхности проводника с током ведет к появлению дополнительного граничного условия — обращению на ней в нуль нормальную компоненту возмущений скорости

$$(1.5) \quad \partial \varphi / \partial r = 0 \quad (r=R)$$

В рассматриваемом поле проводника с током задача (1.1)–(1.5) имеет своим решением неподвижную ( $\varphi = \varphi_e = 0$ ) цилиндрическую равновесную форму поверхности раздела жидкостей  $R_1 = a = \text{const}$ ,  $R_2 = \infty$ . Исследованию ее устойчивости посвящена дальнейшая часть работы. В опущенных выше деталях постановка задачи и процедура ее решения аналогичны работе [5].

**2. Дисперсионное уравнение и его анализ.** Для волновых возмущений, распространяющихся вдоль слоя жидкости (то есть пропорциональных  $\exp[i(kz - \omega t)]$ ), которые приводят к неустойчивости слоя и распаду его на капли, решения уравнений Лапласа (1.1) в цилиндрических координатах для потенциалов скорости с учетом необходимого затухания их на бесконечности дают

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \varphi &= [c_1 I_0(kr) + D_1 K_0(kr)] \exp[i(kz - \omega t)] \\ \varphi_e &= D_e K_0(kr) \exp[i(kz - \omega t)] \end{aligned}$$

где  $I_n(kr)$ ,  $K_n(kr)$  — функции Бесселя мнимого аргумента.

Подстановка этих решений в (1.2), (1.3) и удовлетворение граничным условиям (1.4), (1.5) дает в линейном приближении по амплитудам возмущений следующее дисперсионное уравнение, записанное в безразмерном виде:

$$(2.2) \quad \Omega^2 = \left[ \frac{I_1(s) K_1(\delta s) + I_1(\delta s) K_1(s)}{I_0(s) K_1(\delta s) - I_1(\delta s) K_0(s)} + \beta \frac{K_0(s)}{K_1(s)} \right]^{-1} s (Bo_m - 1 + s^2)$$

Безразмерные частота  $\Omega$  и волновое число  $s$  связаны с размерными величинами следующими соотношениями:  $\Omega^2 = \rho a^3 \omega^2 / \alpha$ ,  $s = ka$ . Кроме того,  $\delta = R/a$  — отношение внутреннего радиуса слоя к наружному,  $\beta = \rho_e / \rho$  — отношение плотностей жидкостей вне и внутри рассматриваемого слоя. Безразмерный комплекс  $Bo_m = \mu_0 M G a^2 / \alpha$  играет в описании явлений на поверхности намагничающейся жидкости в неоднородных магнитных полях с характерным градиентом напряженности  $G$  такую же роль, как и известное число Бонда  $Bo = \rho g a^2 / \alpha$  в обычной жидкости, поэтому его можно назвать магнитным числом Бонда. Вместо силы тяжести  $\rho g$  оно

определяется магнитной силой  $\mu_0 MG$  и представляет собой отношение давления, обусловленного ею, к давлению, вызванному силами поверхностного натяжения. Так как в рассматриваемом случае  $G=J/2\pi a^2$ , то  $Bo_m = \mu_0 \chi J^2 / 4\pi^2 a$ , т. е. обратно пропорционален внешнему радиусу столба. При рассмотрении явлений на границе раздела двух намагничивающихся жидкостей  $Bo_m$  определяется через разность их намагнченностей  $Bo_m = \mu_0 (M - M_e)^2 G a^2 / \alpha$ .

Дисперсионное уравнение (2.2) при малом радиусе проводника с током ( $\delta \ll 1$ ) и  $\beta = 0$  переходит в соответствующее выражение для сплошного столба жидкости, окруженного немагнитным газом [5].

Знак правой части выражения (2.2) определяется только соотношением  $(Bo_m - 1 + s^2)$ , поскольку стоящий перед ним коэффициент всегда положителен ( $\delta < 1$ ). При  $Bo_m > 1$  это соотношение положительно,  $\Omega$  – вещественна, и столб намагничивающейся жидкости устойчив относительно рассматриваемых возмущений. При  $Bo_m < 1$  всегда найдется такое волновое число  $s$ , для которого  $(Bo_m - 1 + s^2) < 0$ , т. е.  $\Omega$  становится мнимой и обуславливает монотонный рост возмущений, приводящий к неустойчивости столба и распаду его на капли. С этой точки зрения критическое значение  $Bo_m$  равно единице. С уменьшением числа  $Bo_m$  столб становится неустойчивым относительно всех возмущений, безразмерная длина волны которых  $\Lambda = 1/s$  превышает значение  $(1 - Bo_m)^{-1/2}$ . Отметим, что при выбранных масштабах  $\Lambda$  оказывается обезразмеренной по внешнему периметру столба.

Наиболее опасными являются возмущения, которые имеют наименьшее время развития, т. е. возмущения с такой длиной волны, которой соответствует максимальное по модулю отрицательное значение  $\Omega^2$ . С этих позиций выражение (2.2) легко анализируется в предельном случае тонкого цилиндрического слоя  $1 - \delta = \gamma \ll 1$ , окруженного немагнитным газом  $\beta = 0$ . При этих условиях с точностью до членов порядка  $\gamma^2$  соотношение (2.2) записывается в виде  $\Omega^2 = \gamma s^2 (Bo_m - 1 + s^2)$ . Отсюда характеристики наиболее опасных возмущений, обозначаемые индексом \*, определяются следующим образом:

$$(2.3) \quad \Lambda_*^{-1} = s_* = \sqrt{1/2(1 - Bo_m)}, \quad |\Omega|_* = 1/2\sqrt{\gamma}(1 - Bo_m)$$

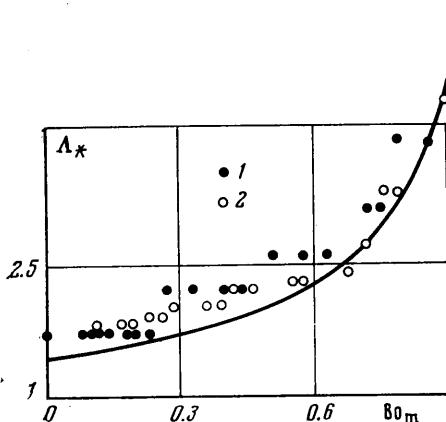
При  $Bo_m = 0$ , что соответствует немагнитной жидкости или отсутствию магнитного поля,  $\Lambda_* = \sqrt{2} \approx 1.41$ . Это практически совпадает с известной величиной  $\Lambda_* = 1.43$  для сплошного цилиндрического столба обычной жидкости [8], откуда можно сделать вывод о том, что толщина слоя практически не влияет на длину волны возмущений, приводящих к распаду столба. С приближением значений числа  $Bo_m$  к единице  $\Lambda_*$  растет, стремясь к бесконечности. Для столба жидкости конечной длины это означает уменьшение количества капель, на которые он распадается в результате неустойчивости. Как следует из (2.3), характерное время развития возмущений  $|\Omega|_*^{-1}$  сильно увеличивается, стремясь к бесконечности с ростом  $Bo_m$ . Уменьшение относительной толщины слоя  $\gamma$  также приводит к замедлению процесса распада столба ( $|\Omega|_*^{-1} \sim \gamma^{-1/2}$ ).

Рассчитанные по формуле (2.2) характеристики неустойчивости цилиндрического слоя намагничивающейся жидкости конечной толщины представлены на фиг. 1, 2 и сохраняют все качественные особенности, проявившиеся в предельном случае тонкого слоя.

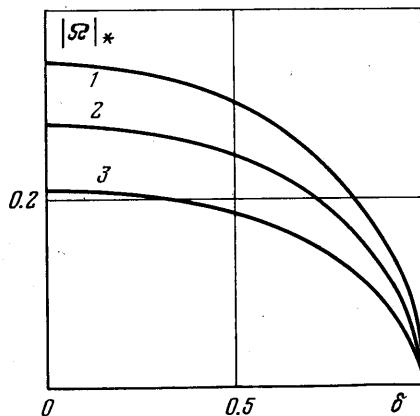
На фиг. 1 сплошной линией представлен график зависимости длины волны наиболее опасных возмущений  $\Lambda_*$  от магнитного числа Бонда  $Bo_m$ . При всех значениях толщины слоя он хорошо описывается формулой (2.3). На фиг. 2 представлена зависимость  $|\Omega|_*$  от отношения радиусов слоя  $\delta$

для значений числа  $Bo_m$ : 0, 0.2, 0.4 (кривые 1–3 соответственно). Резкое замедление процесса распада столба начинается примерно при  $\delta > 0.75$ .

3. Экспериментальное исследование. Эксперименты по исследованию устойчивости цилиндрического столба намагничивающейся жидкости были реализованы в двух прямоугольных стеклянных кюветах, имеющих горизонтальные размеры  $240 \times 40$  и  $507 \times 40$  мм. По длине кювет в них устанавливался полый проводник с внешним радиусом 1 мм из нержавеющей стали, охлаждаемый прокачкой воды. Необходимость охлаждения была вызвана значительной величиной токов питания (до 30 а),



Фиг. 1



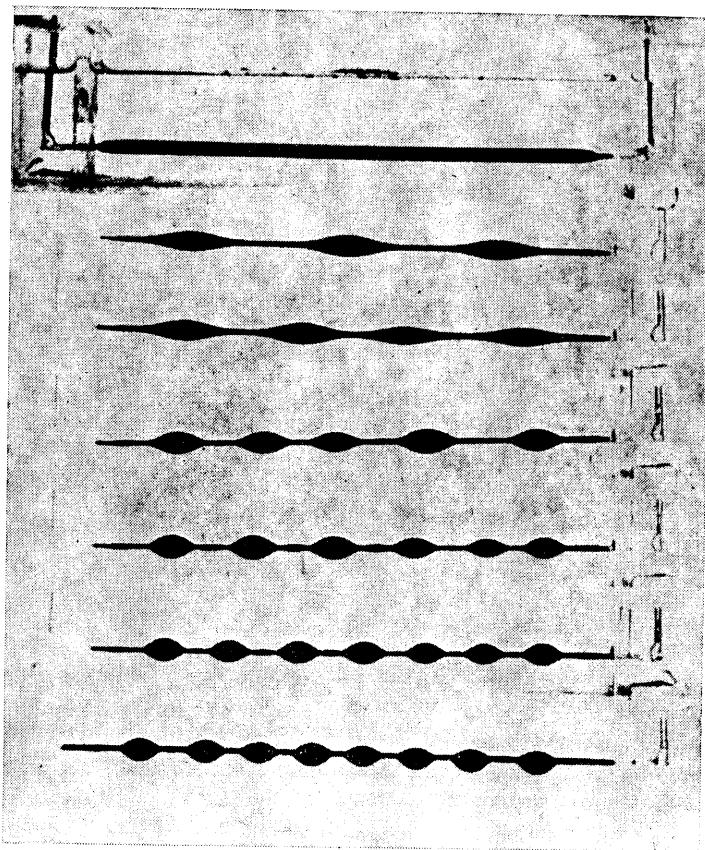
Фиг. 2

используемых в экспериментах. Эксперименты, результаты которых представлены в настоящей работе, выполнялись при длинах столба 180 и 500 мм.

В качестве намагничивающейся жидкости применялись ферроэмульсии, синтезированные в Институте тепло- и массообмена АН БССР, в которых в качестве жидкости-носителя использовался керосин, магнитной фазы — магнетит  $Fe_3O_4$ , а для повышения коллоидной устойчивости в раствор добавлялась олеиновая кислота. В экспериментах были использованы две ферроэмульсии с плотностями  $\rho_1 = 1.22 \cdot 10^3$  и  $\rho_2 = 1.157 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, магнитными восприимчивостями  $\chi_1 = 1.2$  и  $\chi_2 = 2.5$ , намагниченостями насыщения 27 и 23 кА/м. Исключение действия силы тяжести осуществлялось путем помещения проводника с током, окруженного слоем ферроэмульсии, в водный раствор глицерина с плотностью, равной плотности используемой в данном эксперименте ферроэмульсии. Ферроэмульсия на основе керосина и водный раствор глицерина — несмешивающиеся жидкости и прозрачность последней позволяет осуществлять визуальные наблюдения формы поверхности и производить ее фотографирование и киносъемку. Коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела ферроэмульсия — глицерин составлял соответственно для указанных ферроэмульсий  $\sigma_1 = 9.2 \cdot 10^{-3}$  и  $\sigma_2 = 1.1 \cdot 10^{-2}$  н/м.

Методика экспериментального исследования состояла в следующем. Предварительно устанавливалось такое значение тока в проводнике, которое соответствовало закритическим значениям числа Бонда  $Bo_m > 1$ . При этом ферроэмульсия располагалась вокруг проводника в виде устойчивого цилиндрического столба. Затем ток через проводник путем подключения шунтов скачкообразно уменьшался до значения, соответствующего определенному значению  $Bo_m < 1$ . Столб жидкости становился неустойчивым и начинался процесс распада его на капли. Таким образом, одной из варьируемых величин в эксперименте являлось нижнее значение тока в проводнике. Второй изменяемый параметр — внешний диаметр столба. Диапазон изменения числа  $Bo_m$  при этом составлял  $0 < Bo_m \leq 3$ . Процесс распада столба на капли регистрировался на кинопленку, а стационарное состояние фиксировалось фотографированием. Обработка фотокиноматериалов с помощью измерительного микроскопа МИР-12 дала возможность получить информацию о длине волны наиболее опасных возмущений и временах их развития при разных значениях  $Bo_m$  и  $\delta$ . Измерение равновесного радиуса столба осуществлялось непосредственно в процессе проведения экспериментов катетометром КМ-8.

На фиг. 1 наряду с теоретической кривой нанесены данные измерений. Точки 1 соответствуют экспериментальным результатам, полученным на коротком столбе ферро жидкости (180 мм), а точки 2 — на длинном (500 мм). Отклонение экспериментальных точек от кривой связано с влиянием конечной длины столба. Для короткого столба присущее наличие серий по длинам волн с неизменной  $\Lambda_*$  в определенном диапазоне



Фиг. 3

значений числа  $Bo_m$ . Изменение числа  $Bo_m$  за границы этого диапазона приводит к скачкообразному изменению  $\Lambda_*$ . Вблизи границ этого диапазона возможно на конечной стадии процесса слияние двух соседних капель. Для длинного столба характерно более равномерное распределение экспериментальных точек по длинам волн, что приводит к лучшему согласию с теоретическими результатами. Указанные особенности, как уже отмечалось, связаны с конечной длиной столба, допускающей только дискретное изменение числа капель, на которые распадается столб, т. е. дискретное изменение  $\Lambda_*$ . Очевидно, что с увеличением длины столба дискретность становится менее заметной. На расположение экспериментальных точек несколько выше теоретической кривой влияют также нелинейные эффекты, возникающие, в частности, как результат влияния конечного радиуса проводника с током, а также вязкость жидкостей.

Наглядная демонстрация зависимости длины волны  $\Lambda_*$  от числа  $Bo_m$  представлена серией фотографий на фиг. 3. Верхняя фотография соответствует значению числа  $Bo_m > 1$  (цилиндрический столб ферроожидкости), а нижняя  $Bo_m = 0$ , при котором число капель максимально, а длина волны минимальна. Число капель сверху вниз увеличивается от трех до восьми, что соответствует изменению числа  $Bo_m$  от 0.89 до 0. Следует отметить,

что при достаточной толщине слоя на конечной фазе развития неустойчивости в промежутках между соседними каплями наблюдается возникновение сателлитов, представляющих собой капли, поперечный размер которых составляет 0.15–0.3 от размера основных.

На фиг. 4 показаны экспериментальные зависимости инкремента  $\omega$ , определяемого как  $\omega = [\ln(A_2/A_1)]/(t_2 - t_1)$  (где  $A_1$  и  $A_2$  – амплитуды возмущений, соответствующие моментам времени  $t_1$  и  $t_2$  на начальной стадии процесса распада), от числа  $Bo_m$  для двух значений диаметра столба: 1 –  $2R = 4.2$  мм, 2 –  $2R = 5.6$  мм. Временной масштабный множитель, использованный во второй части настоящей работы  $\sqrt{\rho a^3/\alpha}$  в данном случае составляет 0.04 сек. Как и следовало,  $\omega$  уменьшается с увеличением  $Bo_m$ , однако экспериментальные значения на порядок отличаются от теоретических, т. е. времена развития неустойчивости значительно превышают теоретические, что главным образом связано с сильным влиянием вязкости, не учитываемой при теоретическом рассмотрении.

Вязкость используемой в эксперименте ферроожидкости составляла 6 спз, а окружающей среды – водного раствора глицерина – 170 спз. Результаты по распаду сплошных струй обычной вязкой жидкости [9] свидетельствуют о том, что при таких соотношениях вязкостей время распада увеличивается примерно на порядок по сравнению с распадом невязкой струи в невязком окружении. Это соответствует приведенным в настоящей работе экспериментальным данным.

Авторы признательны Г. И. Петрову и участникам руководимого им семинара за полезное обсуждение работы.

Поступила 29 I 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

- Сутырин Г. Г., Тактаров Н. Г. Об устойчивости тангенциального разрыва в намагничивающейся среде. ПММ, 1975, т. 39, № 3.
- Баштовой В. Г. Неустойчивость неподвижного тонкого слоя намагничивающейся жидкости. ПМТФ, 1978, № 1.
- Барков Ю. Д., Баштовой В. Г. Экспериментальное исследование неустойчивости плоских слоев намагничивающейся жидкости. Магнитная гидродинамика, 1977, № 4.
- Баштовой В. Г., Краков М. С. Устойчивость течения тонкого слоя вязкой магнитной жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 5.
- Баштовой В. Г., Краков М. С. Устойчивость осесимметричной струи намагничивающейся жидкости. ПМТФ, 1978, № 4.
- Cowley M. D., Rosensweig R. E. The interfacial stability of ferromagnetic fluid. J. Fluid Mech., 1967, vol. 39, pt. 4.
- Тактаров Н. Г. Распад струи магнитной жидкости. Магнитная гидродинамика, 1975, № 2.
- Стретт Дж. Теория звука, т. 2. М., Гостехиздат, 1955.
- Лыщевский А. С. Закономерности дробления жидкостей механическими форсунками давления. Новочеркасск, Новочеркасск. политехн. ин-т, 1961.