

5. Авдусевский В. С., Галицейский Б. М., Глебов Г. А. и др. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. М., «Машиностроение», 1975.
 6. Reshotko E., Beckwith J. Compressible laminar boundary layer over a yawed infinite cylinder with heat transfer and arbitrary Prandtl number. NACA Rep., 1958, No. 1379.

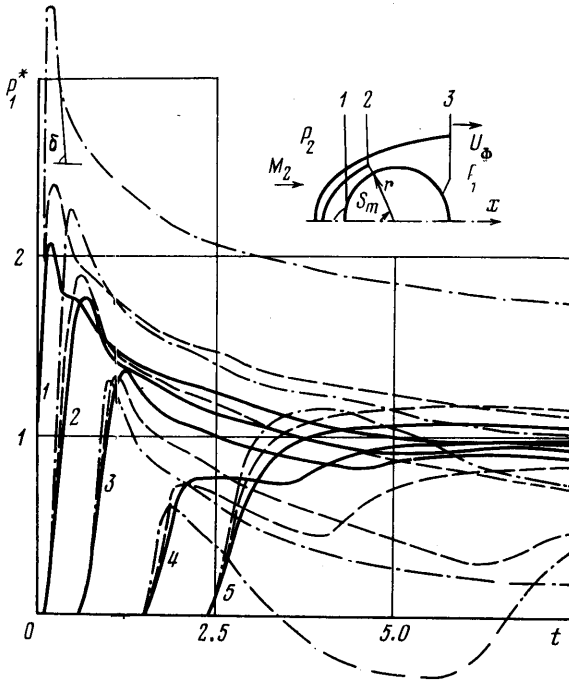
УДК 533.6.011.72+534.24+517.962.8

АПРОКСИМАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЗДЕЙСТВИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ЦИЛИНДР

В. Н. ЛЯХОВ

(Москва)

Представлены результаты конечно-разностного счета, дополняющие известные ранее данные и позволяющие вместе с результатами [1, 2] провести аппроксимацию изменяющихся во времени величин давления на поверхности цилиндра для случая, когда фронт ударной волны параллелен оси цилиндра. Построенная аппроксимация пригодна в интервале времени от момента касания волной цилиндра до тех пор, пока возмущение не достигнет задней критической точки цилиндра. Полученные фор-



Фиг. 1

мулы могут быть использованы в инженерных расчетах для определения нестационарного распределения давления по поверхности цилиндра и силы, действующей в направлении движения волны. Интенсивность волны и показатель адиабаты при этом могут меняться в достаточно широких пределах.

1. При построении аппроксимирующих формул воспользуемся результатами работ [1, 2], в которых изложена постановка краевой задачи с начальными условиями и метод решения с помощью конечно-разностной схемы второго порядка точности. В этих работах достаточно подробно описан процесс воздействия ударной волны на цилиндр. На фиг. 1 (вверху) изображены три момента отражения: регулярное 1, маховское 2 и режим 3 при $S_m > 90^\circ$, где S_m — угловая координата, характеризующая

точку поверхности цилиндра (отсчет ведется от передней критической точки), в окрестности которой находится пристеночная часть дифрагированной волны (на фиг. 1 показана для момента 2). В области, где текущая угловая координата S больше S_m , газ около поверхности цилиндра покоится. Расчеты показывают, что максимальное давление отражения P_m реализуется либо в окрестности точки S_m [2] (для волн слабой и умеренной интенсивности), либо в том месте, где образовавшийся при маховском отражении контактный разрыв приходит на поверхность цилиндра [1] (в случае сильных волн $S \sim S_m - 15^\circ$).

В рамках теории идеального газа исследуемый процесс определяется интенсивностью волны, характеризуемой отношением величин давления за и перед ударной волной $P_{21} = P_2/P_1$ и показателем адиабаты $\gamma = c_p/c_v$.

В дополнение к результатам [1, 2] на фиг. 1 (внизу) приведены группы кривых 1—5, характеризующие изменение давления соответственно в точках $S_* = 0, 48, 84, 132$ и 180° . Сплошная, пунктирная и штрихпунктирная кривые представляют величину $P_1^* = (P_* - P_1)/(P_2 - P_1)$ и соответствуют параметрам $P_{21} = 1.1, 1.5$ и 3.0 . Величина P_* — давление, изменяющееся во времени t , которое отсчитывается от момента касания волной цилиндра. Масштабом времени является отношение r/U_Φ , где r — радиус цилиндра, U_Φ — скорость волны относительно цилиндра. При анализе подобных кривых принято считать, что моментом прихода волны в данную точку S_* является время $t = t_m$, которое определяется серединой возрастающего участка сильного градиента. Этот участок характеризует приход «размазанного» (на 2—3 ячейки) фронта ударной волны. Например, $t_m \sim 0.8$ для группы кривых с номером 3.

Каждая серия этих кривых (а также в [1, 2]) получается в результате трудоемкого счета на ЭВМ. Поэтому, чтобы использовать результаты для практических приложений, необходимо аппроксимировать их аналитическими функциями. Аппроксимацию проведем в два этапа: сначала получим формулу величины максимального давления P_m (в точке S_m), а затем с помощью P_m зависимость от времени t давления P_* в точке S_* .

2. Для аппроксимации величины P_m воспользуемся формулой [1]:

$$(2.1) \quad \frac{P_m}{P_2} = P_{32} = 1 + \frac{z}{2} + \sqrt{z \left(\mu + \frac{z}{4} \right)} \operatorname{sign}(\cos S_\Sigma)$$

$$z = \frac{(P_{21} - 1)^2 \cos^2 S_\Sigma}{P_{21} (\nu P_{21} + 1)}, \quad \mu = \frac{2\gamma}{\gamma + 1}, \quad S_\Sigma = \sum_{i=1}^3 b_i S_m^i$$

$$P_m = P_m(P_{21}, \gamma, S_m), \quad \operatorname{sign}(\cos S_\Sigma) = \begin{cases} +1, & \cos S_\Sigma \geq 0 \\ -1, & \cos S_\Sigma < 0 \end{cases}$$

Формула (2.1), полученная при рассмотрении физического процесса, зависит от основных параметров P_{21} , γ , S_m и справедлива до тех пор, пока возмущение не дошло до точки $S = 180^\circ$. Она достаточно хорошо описывает давление P_m при $S < 90^\circ$ вблизи точки отражения для сильных волн [1]. Чтобы распространить ее на случаи отражений слабых волн и $S > 90^\circ$, введем три коэффициента b_i ($i = 1, 2, 3$), которые определим следующим образом. На фиг. 2 из работы [2] видно, что все кривые P_m для $P_{21} \leq 3$ имеют близкие значения при $S_m = 66$ и 180° (разброс ± 3 и $\pm 10\%$ соответственно). Если эти кривые перестроить в других координатах $P_2^* = (P_m - P_2)/(P_0 - P_2)$ (фиг. 2), то можно видеть еще две узловые точки при $S_m = 0$ и 130° (разброс 0 и $\pm 5\%$ соответственно). Используемое здесь значение P_0 является величиной, до которой повышается давление при лобовом отражении ударной волны от плоской стенки [3]:

$$(2.2) \quad P_0 = P_2 [(2\nu + 1)P_{21} - \nu] / (1 + \nu P_{21}), \quad \nu = (\gamma - 1) / (\gamma + 1)$$

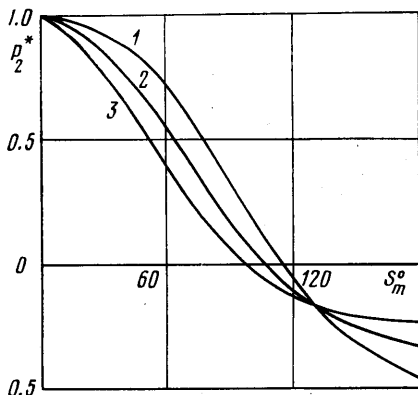
Таким образом, кривые, определяющие величину максимального давления P_m , имеют четыре узловые точки, причем разброс уменьшается от ± 10 до 0% при S_m , изменяющемся от 180° до 0. Свойство формулы (2.1) таково, что $P_m = P_0$ при $S = 0$ [1]. Воспользуемся оставшимися тремя узловыми точками для нахождения неизвестных коэффициентов b_i :

$$(2.3) \quad \begin{aligned} S_{m1} = 66^\circ, & \quad (P_{m1} - P_1) / (P_2 - P_1) = 1.71, \text{ фиг. 2 из [2]} \\ S_{m2} = 130^\circ, & \quad (P_{m2} - P_2) / (P_0 - P_2) = -0.17, \text{ фиг. 2} \\ S_{m3} = 180^\circ, & \quad (P_{m3} - P_1) / (P_2 - P_1) = 0.5, \text{ фиг. 2 из [2]} \end{aligned}$$

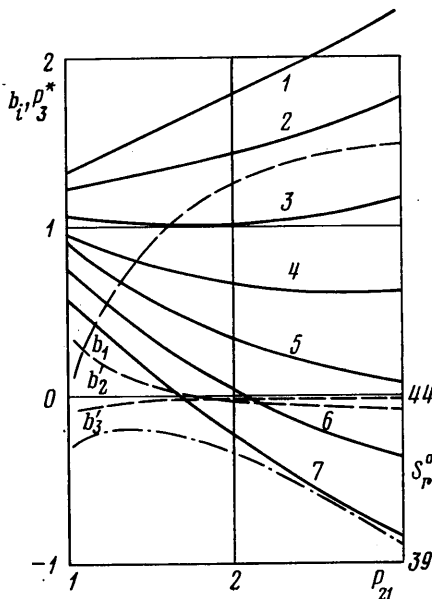
Формула (2.1) получена из соотношения

$$(2.4) \quad \frac{(P_{32}-1)^2}{P_{32}+\nu} = z = \frac{(P_{21}-1)^2}{P_{21}(\nu P_{21}+1)} \cos^2 S_z$$

Считая теперь величину $P_{32}=P_{mj}/P_2$ известной из (2.3) в точках S_{mj} ($j=1, 2, 3$), выразим явно аргумент косинуса и получим систему из трех алгебраических урав-



Фиг. 2



Фиг. 3

нений для определения b_i :

$$(2.5) \quad \sum_{i=1}^3 b_i S_{mj}^i = S_{zj}, \quad j=1, 2, 3$$

$$S_{zj} = \arccos \left(\frac{P_{32}-1}{P_{21}-1} \sqrt{\frac{P_{21}(P_{21}\nu+1)}{P_{32}+\nu}} \right)$$

На фиг. 3 пунктиром нанесены значения коэффициентов b_i . Видно, что $b_1 \rightarrow 1$, а b_2 и $b_3 \rightarrow 0$ при увеличении P_{21} . Это согласуется с выводами работы [1], в которой рекомендуется при $S < 90^\circ$ и для больших значений P_{21} оценивать максимальное давление отражения по формуле (2.1) при $b_1=1$ и $b_2=b_3=0$. В этом случае имеем следующие значения: $P_m=P_0$ при $S_m=0$, $P_m=P_1$ при $S_m=180^\circ$.

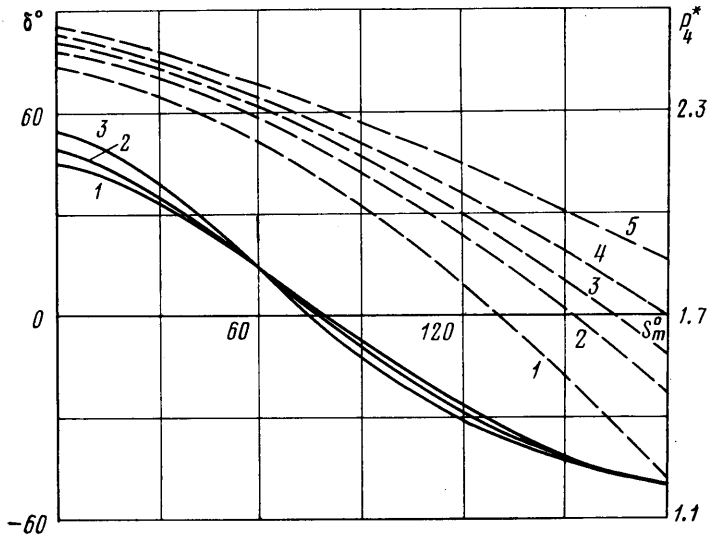
Полученные соотношения (2.1) — (2.5) дают аналитическое представление величины максимального давления P_m в точке S_m . В работе [1] отмечается, что эта оценка максимального давления справедлива не только на цилиндрической поверхности, но и для сферической, по крайней мере для лобовой части (отличие между ними по величине P_m при изменении S_m от 0 до 70° возрастает всего от 0 до 20%), а также [4] для оценки максимального давления P_m при отражении взрывной волны (криволинейной) от плоскости. Величина S_m в этом случае характеризует местный угол падения волны.

3. Получим теперь аппроксимацию функции $P^*=P^*(P_{21}, \gamma, S_*, t)$, которая определяет изменение давления во времени t в фиксированной точке (S_*) поверхности цилиндра. В физическом эксперименте это аналогично получению осциллограммы давления $P(t)$ датчиком, установленным в точке S_* . Используем для этого экспоненциальную зависимость:

$$(3.1) \quad P^* = P_1 + \{P_m[1 + (t-t_m)\alpha e^{-(t-t_m)\beta}] - P_1\}H$$

$$H=H(t-t_m)=\begin{cases} 0, & t < t_m \\ 1, & t \geq t_m \end{cases}$$

Предполагая, что коэффициенты α и β не зависят от времени, определим их в момент $t=t_m$ по углу δ , характеризующему наклон экспоненциальной кривой в точке $S_* = S_m$ (фиг. 1) и в момент $t=t_m+2$, когда волна удалится от точки S_* на рас-



Фиг. 4

стояние $2r$ вдоль x :

$$\alpha = \alpha(P_{21}, \gamma, S_m) = P_t' / P_m, \quad t = t_m$$

$$(3.2) \quad \beta = \beta(P_{21}, \gamma, S_*) = -0.5 \ln \left(\frac{1 - P_4 / P_m}{2\alpha} \right), \quad t = t_m + 2$$

$$P_t' = \frac{\partial P}{\partial t} = -\operatorname{tg} \delta (P_{21}, \gamma, S_m)$$

По результатам математического эксперимента величины $P_3^* = (P_4 - P_1) / (P_2 - P_1)$ для $\gamma = 1.4$ (где $P_4 = P_4(P_{21}, \gamma, S_*, t)$ при $t = t_m + 2$) нанесены на фиг. 3 сплошными линиями. Номерам кривых 1-7 соответствуют значения $S_* = 0-180^\circ$ с шагом 30° .

Следует отметить, что нахождение требуемой величины P_4 в момент $t = t_m + 2$ при больших значениях S_* ($S_* \approx 140^\circ$) затруднено, так как появляется сигнал от отраженной в точке $S = 180^\circ$ волны (см. фиг. 1, $P_{21} = 1.1$, $S_* = 132^\circ$ — сплошная кривая 4 при $t \sim 3.75$). В этом случае для слабых волн проводилась экстраполяция по времени убывающего участка кривой до $t = t_m + 2$. Определение же величины P_m при $S_m = 180^\circ$ производилось с помощью формулы (2.2) следующим образом. По кривым, полученным в точке $S_* = 180^\circ$, определялось максимальное давление, характеризующее схлопывание волн в этой точке. Далее подсчитывалась интенсивность волны перед схлопыванием (величина P_m в этом случае аналогична P_2 , а максимум давления — величине P_0).

На основании гипотезы о том, что режим маховского отражения волны от цилиндра начинается со значения $S = S_r$ [4, 5] (где $S_r(P_{21}, \gamma)$ — угол, при котором осуществляется стационарная маховская конфигурация [3]), выберем величину $S = S_r$ в качестве угла перехода от регулярного отражения к маховскому. Зависимость $S_r(P_{21})$ для $\gamma = 1.4$ представлена штрихпунктирной кривой на фиг. 3.

Значения $\delta(P_{21}, \gamma, S_m)$ представлены на фиг. 4 пунктиром для $P_{21} = 1.05, 1.5, 2, 2.5, 3$ (номера кривых соответственно 1-5). Сплошными линиями нанесены кривые $P_m(P_{21}, \gamma, S_m) / P_1$ при $P_{21} = 1.5$ и $\gamma = 3, 5/3, 1.1$ (номера 1-3), по которым можно судить о сравнительно слабой зависимости от показателя γ .

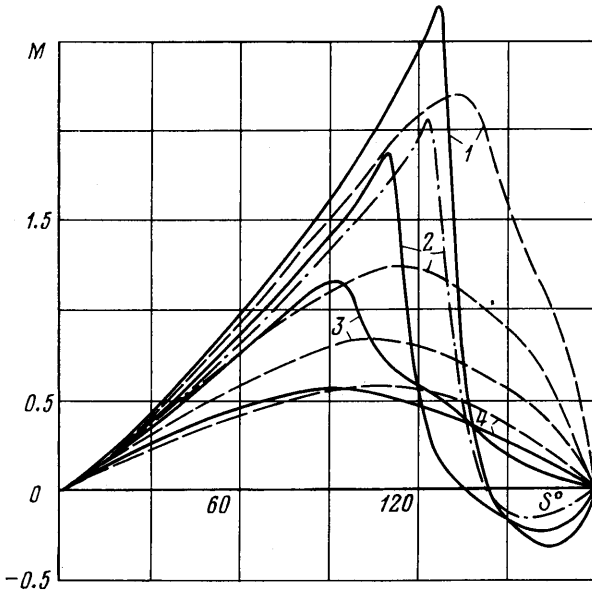
Время прихода волны в рассматриваемую точку S_* определим как $t_m = r \int_0^{S_*} dS/U_\tau$,

где $U_\tau = U_\tau(P_{21}, \gamma, S)$ — скорость волны вдоль касательной к поверхности цилиндра. Эту скорость запишем в следующем виде:

$$(3.3) \quad U_\tau(P_{21}, \gamma, S) = \begin{cases} U_\infty/\sin S, & 0 < S < S_r \\ \omega a_1 \sqrt{(P_m/P_1 + \nu)/\mu}, & S_r < S \leq 180^\circ \end{cases}$$

где $a_1 = \sqrt{\gamma P_1/\rho_1}$ — скорость звука перед волной.

Первое представление $U_\infty/\sin S$ в (3.3) следует из геометрической картины процесса регулярного отражения. Второе — есть скорость перемещения вдоль поверх-



Фиг. 5

ности цилиндра фронта ударной волны с перепадом давления, равным P_m/P_1 . При этом предполагается, что фронт перпендикулярен поверхности цилиндра, а максимальное давление P_m достигается во фронте маховской волны, что характерно для волн слабой и умеренной интенсивности [5, 6]. Коэффициент ω выбирается таким, чтобы время t_h прихода волны в точку $S=180^\circ$ соответствовало экспериментальным данным. В частности, по результатам математического эксперимента $t_h=2.6 \div 2.8$ для $P_{21}=1.01 \div 3$ соответственно.

Полученная совокупность формул (3.1) — (3.3) определяет изменение давления в фиксированной точке $S=S_*$ поверхности цилиндра при $t < t_h$. После момента $t=t_h$ схлопнувшиеся в точке $S=180^\circ$ ударные волны начинают двигаться навстречу потоку и занимают некоторое стационарное положение при $S=90 \div 130^\circ$ [2]. На кривых (Фиг. 1) это проявляется дополнительным подъемом давления (см., например, $S_*=132^\circ$ — кривые 4 при $t \sim 3.5, 4.5$ и 6.5 для $P_{21}=1.1, 1.5$ и 3.0 — сплошная, пунктирная и штрихпунктирная кривые соответственно).

Развитие отрыва потока от поверхности цилиндра и наличие зоны возвратного течения в области $S > 90^\circ$ демонстрирует фигура 5, на которой представлены зависимости числа Маха M потока вдоль поверхности цилиндра от угла S в различные моменты времени. Пунктирные, штрихпунктирная и сплошные кривые соответствуют временам $t \sim 3.9, 7.7$ и 11.9 . $P_{21}=5, 2.5, 1.9$ и 1.5 соответственно для кривых 1—4. Схлопывание волн в точке $S=180^\circ$ происходит в момент $t_h=2.7 \pm 0.1$. Видно, что для всех режимов при $S \leq 90^\circ$ происходит разгон потока (при $P_{21} \approx 1.9$ — до сверхзвука). Далее, при углах $S \approx 90 \div 120^\circ$ наблюдается торможение, причем вначале плавное ($t \approx 3.9$, пунктирные кривые), а затем с образованием скачка уплотнения ($t \approx$

≈ 7.7 , штрихпунктирная и сплошные кривые, кроме 4-й, для которой $P_{21}=1.5$). При определенной скорости набегающего потока (M_2) возникает возвратное течение ($M < 0$ при $S=130 \div 180^\circ$). Данные проводимого машиносчетного эксперимента говорят о том, что стационарный скачок в окрестности $S=90 \div 130^\circ$ образуется при $P_{21} \approx 1.84$ [2], а возвратное течение — при $P_{21} \approx 1.9$. Исследование влияния схемной вязкости на полученные значения параметра P_{21} не проводилось, поскольку это не являлось целью работы, а также из-за отсутствия по этому вопросу данных физического эксперимента, по которым можно было бы сделать какие-либо выводы.

В заключение отметим, что в настоящее время имеется определенное количество данных, характеризующих величину P_m . Можно полагать, что максимальное давление P_m определено формулой (2.1) с достаточной степенью точности (см. сравнение в [1, 2]). Для обоснования величин α и β данных значительно меньше, и в этом направлении, по-видимому, в дальнейшем будет проводиться основная работа по уточнению величины $P_*(P_{21}, \gamma, S^*, t)$.

Автор благодарен Л. Е. Тараскиной за помощь в проведении расчетов и обработке результатов.

Поступила 14 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляхов В. Н. Нестационарные нагрузки при дифракции ударной волны. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 4.
2. Ляхов В. Н. Взаимодействие ударных волн умеренной интенсивности с цилиндром. Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, № 2.
3. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
4. Ляхов В. Н. К вопросу об оценке давления при нестационарном отражении ударной волны. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 2.
5. Грудницкий В. Г., Прохорчук Ю. А. Расчет взаимодействия ударной волны с затупленным телом. В сб. Численные методы механики сплошной среды, т. 6, № 4. Новосибирск, 1975.
6. Ляхов В. Н., Рыжов О. С. О законе подобия при нелинейном отражении ударной волны от жесткой стенки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 3.

УДК 533.601.18

СФЕРИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ДВУХАТОМНОГО ГАЗА ПРИ ИСПАРЕНИИ КАПЛИ

И. Н. ЛАРИНА, В. А. РЫКОВ

(Москва)

На основе численного решения модельного кинетического уравнения для газа с вращательными степенями свободы исследуется сферическое расширение газа при испарении капли. Рассматривается стационарное испарение капли с заданной температурой в вакуум и испарение капли в затопленное пространство при условии энергетического баланса на поверхности капли.

Различные аспекты задачи испарения одноатомных газов исследовались в работах [1-3]. Численное рассмотрение сферического расширения газа при испарении капли на основе S -модельного кинетического уравнения для одноатомного газа проведено в [4]. Влияние вращательных степеней свободы молекул на температуру расширяющегося газа рассматривалось в работе [5] при моделировании молекул шероховатых сферами.

Рассмотрим каплю двухатомного вещества радиуса r_0 в парах того же вещества. Процессы испарения или конденсации, вообще говоря, являются нестационарными процессами, но из-за малой скорости изменения радиуса капли их можно рассматривать как квазистационарные и рассчитывать параметры течения в каждый момент времени в предположении стационарности процесса. Движение пара исследуется при помощи системы модельных кинетических уравнений работы [6] для функций распределения по фазовому пространству числа частиц $f_0(x, \xi)$ и вращательной энергии частиц $f_1(x, \xi)$. Плотность n , скорость U , температура поступательных степеней свободы T_t и поток тепла поступательной энергии q^t являются моментами функции f_0 , а температура вращательных степеней свободы T_r .