в этом смысле нет принципиальной разницы между возбуждением пограничного слоя на передней кромке [1], или ниже по потоку звуковым пучком [7], или локальным изменением скорости вне пограничного слоя.

Поступила 27 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я.* Возникновение волн Толлмина – Шлихтинга в пограничном слое при воздействии внешних возмущений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 5.
2. *Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я.* Генерация и развитие возмущений малой амплитуды в ламинарном пограничном слое при наличии акустического поля. Изв. СО АН СССР, Сер. техн. наук, вып. 3, 1975, № 13.
3. *Reshotko E.* Boundary-layer stability and transition. Ann. Rev. Fluid Mech., vol. 8, Palo Alto, Calif., 1976.
4. *Mungur P.* On the sensitivity of shear layers to sound. AIAA Paper, 1977, No. 1369.
5. *Rogler H., Reshotko E.* Disturbances in a boundary-layer introduced by a low intensity array of vortices. SIAM J. Appl. Math., 1975, vol. 28, No. 2.
6. *Fasel H.* Reaktion von zweidimensionalen, laminaren, inkompressiblen Grenzschichten auf periodische Störungen in der Aussenströmung. Z. Angew. Math. und Mech., 1977, dB 57, H. 5.
7. *Tam C. K. W.* Excitation of instability waves in a two-dimensional shear layer by sound. J. Fluid Mech., 1978, vol. 89, pt 2.
8. *Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я., Максимов В. П.* Преобразование внешних возмущений в волны пограничного слоя. Числ. методы механики сложной среды, 1978, т. 9, № 2.
9. *Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я.* Экспериментальное исследование влияния охлаждения на устойчивость ламинарного пограничного слоя. Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, вып. 2, 1974, № 8.
10. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.

УДК 532.543:519.3

ОБ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ГИДРОДИНАМИКИ ОТКРЫТЫХ РУСЛ

Г. А. АТАНОВ, С. Т. ВОРОНИН

(Донецк)

Решена задача об управлении неустановившимся движением воды в открытом русле канала, ограниченного насосной станцией. Определяется закон изменения расхода насосной станции, обеспечивающий наименьшие затраты на подачу воды из канала. Решение приводится методом неопределенных множителей Лагранжа. Приводятся примеры расчета.

1. Рассмотрим длинный горизонтальный канал без трения с прямоугольным сечением русла, ограниченный справа насосной станцией. В этом случае движение воды описывается системой уравнений [1]

$$L_1\equiv\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(gb\frac{H^2}{2}+\frac{Q^2}{bH}\right)=0,\qquad L_2\equiv\frac{\partial(bH)}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{1.1}$$

где Q – расход потока; g – ускорение силы тяжести; b – ширина поперечного сечения потока; H – глубина потока. Начало отсчета находится в створе насосной станции.

Система (1.1) гиперболическая и имеет два семейства характеристик со следующими условиями на них:

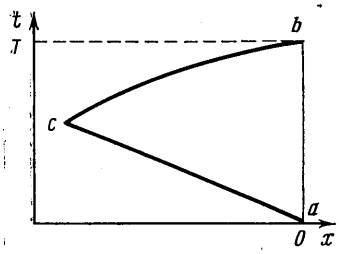
$$L_3\equiv\frac{dx}{dt}-(V\pm c)=0 \tag{1.2}$$

$$L_4\equiv dQ-b(V\mp c)\,dH=0 \tag{1.3}$$

Здесь $V=Q/bH$ – средняя скорость потока; $c=\sqrt{gH}$ – скорость распространения малых возмущений; верхний знак здесь и дальше относится к характеристикам I семейства, а нижний – к характеристикам II семейства.

В момент времени $t=0$ задаются $Q(x, 0)$ и $H(x, 0)$. Необходимо также задавать расход насосной станции $Q(0, t)=u$.

С учетом заявленной мощности в часы пик стоимость единицы электроэнергии, которую потребляет насосная станция, представляет собой функцию времени $a(t)$.



Фиг. 1

Затраты I на подачу воды из канала за время T определяются следующим образом:

$$I=\int_0^T N(u, H, a)\,dt \tag{1.4}$$

Функция N зависит от мощностной характеристики насосной станции и стоимостной функции.

За время T станция должна перекачать определенный объем воды, так что должно выполняться условие

$$\int_0^T u\,dt=\text{const} \tag{1.5}$$

При постоянной стоимостной функции и постоянном режиме работы условие (1.5) удовлетворяется таким образом, что затраты на перекачку воды минимальны. При переменной стоимостной функции этого можно добиться, выбирая определенный режим работы. Возникает задача управления режимом работы насосной станции для минимизации затрат. Аналогичная задача была поставлена в [2] для регулирования стока водохранилища ГЭС, однако решена она не была.

Для решения задачи применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Этим методом решено большое количество задач стационарной газовой динамики о нахождении оптимальных форм тел при сверх- и гиперзвуковых как внешних, так и внутренних течениях. Основы метода изложены в книге [3], в приложении к ней, выполненном А. Л. Гонором и А. Н. Крайко, приведен обзор работ, в которых использовался этот метод, основные результаты, дана обширная библиография. К нестационарной задаче газовой динамики общий метод множителей Лагранжа применен в [4].

Примем длину канала такой, что возмущения, вызванные изменениями режима работы насосной станции, за время T не достигают левого конца канала. Тогда диаграмма x, t процесса будет иметь вид, показанный на фиг. 1.

Здесь ac – характеристика II семейства, на которую переносятся начальные условия; ab – линия насосной станции, на которой определен функционал (1.4); cb – характеристика I семейства, замыкающая область влияния на ab S. В [5] показано, что в общем случае в функционал Лагранжа необходимо включать условия на замыкающей характеристике.

Сформулируем вариационную задачу. Необходимо найти функцию u, доставляющую экстремум функционалу (1.4) при дифференциальных связях (1.1)–(1.3) и изопериметрическом условии (1.5).

2. Составим функционал Лагранжа

$$J=\int_{t_a}^{t_b}(N+\lambda Q)\,dt+\iint_S (h_1L_1+h_2L_2)\,dx\,dt+\int_{t_a}^{t_b}(f_1L_3+f_2L_4)\,dt=\sum_{i=1}^{3}J_i \tag{2.1}$$

Здесь λ – постоянный, а $h_1(x, t)$, $h_2(x, t)$, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – переменные множители Лагранжа. Функция u, доставляющая минимум функционалу (2.1), минимизирует и функционал (1.4).

Вычислим первую вариацию функционала (2.1)

$$\delta J=\sum_{i=1}^{3}\delta J_i$$

$$\delta J_1=\int_{t_a}^{t_b}\left[\left(\frac{\partial N}{\partial Q}+\lambda\right)\delta' Q+\frac{\partial N}{\partial H}\delta' H\right]dt \tag{2.2}$$

$$\delta J_2=\oint_l\left[(2Vh_1+h_2)\delta^* Q+h_1 b(c^2-V^2)\delta^* H\right]dt-\left[h_1\delta^* Q+h_2 b\delta^* H\right]dx- \tag{2.3}$$

$$-\iint_S\left\{\left(\frac{\partial h_1}{\partial t}+2V\frac{\partial h_1}{\partial x}+\frac{\partial h_2}{\partial x}\right)\delta^* Q+b\left[\frac{\partial h_2}{\partial t}+(c^2-V^2)\frac{\partial h_1}{\partial x}\right]\delta^* H\right\}dx\,dt$$

$$\delta J_3=f_1\delta' x|_c{}^b+f_2\delta' Q|_c{}^b-f_2 b(V-c)\delta' H|_c{}^b+ \tag{2.4}$$

$$+\int_{t_a}^{t_b}\left\{-\frac{df_1}{dt}\delta' x-\left(\frac{df_2}{dt}+\frac{\partial V}{\partial Q}f_1+\frac{\partial V}{\partial Q}b\frac{dH}{dt}f_2\right)\delta' Q+\right.$$

$$\left.+\left[b(V-c)\frac{df_2}{dt}-\left(\frac{\partial V}{\partial H}+\frac{dc}{dH}\right)f_1+f_2 b\frac{\partial V}{\partial Q}\frac{dQ}{dt}\right]\delta' H\right\}dt$$

Здесь δ' – вариация, вычисленная при постоянном значении t, а δ^* – вычисленная при постоянных значениях x и t; δ' и δ^* связаны с вариацией δ, согласующейся с граничными условиями задачи, следующими соотношениями:

$$\delta'=\delta-\frac{d}{dt}\delta t,\qquad \delta^*=\delta-\frac{\partial}{\partial x}\delta x-\frac{\partial}{\partial t}\delta t \tag{2.5}$$

Производные от вариаций функций в двойном интеграле (2.3) исключены при помощи формулы Грина, а в интервале вдоль cb – путем интегрирования по частям.

Выберем множители h_1 и h_2 так, чтобы выражения перед вариациями $\delta^* Q$ и $\delta^* H$ в двойном интеграле (2.3) были равны нулю. Получим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial h_1}{\partial t}+2V\frac{\partial h_1}{\partial x}+\frac{\partial h_2}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial h_2}{\partial t}+(c^2-V^2)\frac{\partial h_1}{\partial x}=0 \tag{2.6}$$

Система (2.6) – гиперболического типа и имеет два семейства характеристик, совпадающих с характеристиками (1.2) системы (1.1). На характеристиках выполняются условия

$$(V\pm c)dh_1+dh_2=0 \tag{2.7}$$

Согласуем вариации на линиях. Группируя соответствующие члены из (2.2) – (2.4), используя (2.5) и приравнивая нулю выражения при вариациях δH, δQ, δx и δt, получим условия на ab и три линейно-независимых условия на cb:

$$\frac{df_2}{dt}+\frac{\partial V}{\partial Q}f_1+\frac{\partial V}{\partial Q}b\frac{dH}{dt}f_2+(V-c)h_1+h_2=0 \tag{2.8}$$

$$b(V-c)\frac{df_2}{dt}-\left(\frac{\partial V}{\partial H}+\frac{dc}{dH}\right)f_1+f_2 b\frac{\partial V}{\partial Q}\frac{dQ}{dt}+b(V+c)\left[(V-c)h_1+h_2\right]=0 \tag{2.9}$$

$$\frac{df_2}{dt}-\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-b(V+c)\frac{\partial H}{\partial x}\right]\left[(V-c)h_1+h_2\right]=0$$

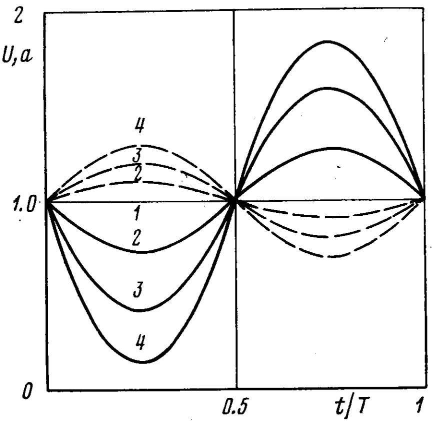
Получим условия в точках b и c. При этом учтем, что положение точек a и b — фиксированно, а точка c может смещаться по характеристике ac. Тогда из (2.4), используя (2.5) и приравнивая нулю выражения при вариациях δH, δQ, δx и δt, получаем условия в точках b и c:

(2.10) $\quad f_2|_b=0, \quad f_1|_c=0$

Из системы (2.9) можно получить однородные уравнения для f_1 и f_2, которые при условиях (2.10) имеют тривиальное решение. Условия (2.6) – (2.10) позволяют определить множители h_1, h_2, f_1 и f_2 и привести первую вариацию функционала (2.1) к виду

(2.11) $$\delta J=\int_0^T E(t)\delta Q\,dt$$

$$E=\frac{\partial N}{\partial Q}+\lambda+2Vh_1+h_2$$



Фиг. 2

Действительно, для заданных начальных и граничных условий можно рассчитать течение в области S. Из (2.7) и (2.9) находим значения множителей h_1 и h_2 на характеристике cb. Используя эти значения как начальные, решаем сопряженную задачу для h_1 и h_2 по всей области S, условие (2.8) выступает при этом в качестве граничного. Множитель λ выбираем таким образом, чтобы выполнялось изопериметрическое условие (1.5). Найденные значения h_1, h_2 и λ позволяют определить E. При оптимальном управлении $E=0$.

3. В качестве иллюстрации применения метода ниже приводятся результаты расчета следующей задачи. Стоимостная функция постоянна, режим работы насосной станции также постоянен. Таким образом, начальные условия заключаются в постоянстве расхода и уровня во всем канале. В момент времени $t=0$ стоимостная функция начинает изменяться по закону

$$a=1+z\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\qquad(0\leqslant t\leqslant T)\qquad(z=\text{const})$$

Мощностная характеристика насосной станции представлена линейной функцией уровня и расхода: $(8-H)Q$.

Оптимальное управление ищем методом итерации [6, 7] в следующем порядке. Вначале задаем $u=\text{const}$, удовлетворяющее условию (1.5). Для расчета параметров течения и множителей h_1 и h_2 применяем метод характеристик. Сетка характеристик разбивает отрезок ab на n частей с ординатами t_k ($k=0, 1,\ldots, n$). В этих точках определяем E по (2.11). Если $\max|E_k|\leqslant\varepsilon$, где ε — заданная величина, то управление u удовлетворяет условиям экстремума и счет прекращается. В противном случае u уточняется в соответствии с формулой

(3.1) $\quad u_{i+1}(t_k)=u_i(t_k)+\alpha E_i(t_k)$

где i — номер итерации, α — некоторое число, определяемое экспериментально, и все расчеты проводятся заново.

Множитель λ, входящий в (2.11), находим из (1.5), согласно которому

$$\int_0^T u_{i+1}\,dt=\int_0^T u_i\,dt=\text{const}$$

Используя (3.1), получаем

$$\lambda_i=-\frac{1}{T}\int_0^T E_i^\circ(t)\,dt$$

где E_i° — значение E_i, вычисленное при $\lambda_i=0$.

На фиг. 2 показаны оптимальные управления $u=u/u_0$ при $z=0$, 0.1, 0.2, 0.3 (кривые *1–4* соответственно). Эти кривые близки к функции $1-M\sin(2\pi t/T)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$. Здесь $M\geqslant 0$ – масштабный множитель, постоянный для определенного значения z. Значение функционала (1.4) изменяется на 0, 1.56; 3.84 и 8.6% соответственно.

Штриховыми линиями на фиг. 2 показаны стоимостные функции $a(t)$ для $z=0$, 0.1, 0.2 и 0.3.

Поступила 29 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев О. Ф., Гладышев М. Т.* О расчете прерывных волн в открытых руслах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
2. *Картвелишвили Н. А.* Неустановившиеся открытые потоки. Л., Гидрометеоиздат, 1968.
3. Theory of optimum aerodynamic shapes. New York – London, Acad. Press., 1965 (Рус. перев.: «Теория оптимальных аэродинамических форм». М., «Мир», 1969).
4. *Атанов Г. А., Уланова Т. Д., Шипилин А. В.* Сопло для получения максимальной скорости втекания жидкости. Тез. докл. Второй Всес. конф. по оптимальному управлению в механических системах. Казань, 1977.
5. *Крайко А. Н.* К решению вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики. ПММ, т. 30, вып. 2, 1966.
6. *Шипилин А. В.* Оптимальные формы тел с присоединенными ударными волнами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
7. *Борисов В. М.* О системе тел с минимальным волновым сопротивлением. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 6.

УДК 532.546

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДОБАВОК ПОЛИМЕРА В ВОДУ НА ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПОРИСТЫХ СРЕД

Г. Г. ВАХИТОВ, В. Г. ОГАНДЖАНЯНЦ, А. М. ПОЛИЩУК

(Москва)

Разработана методика исследования относительных проницаемостей пористых сред для нефти и водных растворов полимеров и создана экспериментальная установка для определения фазовых проницаемостей стационарным методом. Проведены исследования влияния добавок полиакриламида на изменение относительных проницаемостей при совместной фильтрации воды и неполярной углеводородной жидкости. Установлено, что добавка полимера может приводить к одновременному снижению относительной проницаемости для смачивающей жидкости и возрастанию для несмачивающей. Получены фазовые проницаемости для нефти и воды, движущихся вслед за оторочкой полимерного вещества. Установлено, что фазовая проницаемость для водной фазы является функцией насыщенности и количества сорбированного вещества.

Проведен цикл экспериментальных исследований влияния скорости закачки и концентрации растворенного полимера на изменение относительных проницаемостей.

При расчетах технологических показателей разработки нефтяных месторождений широко применяется схема Баклея – Леверетта и ее модификации. Одной из важнейших эмпирических характеристик, необходимых для проведения вычислений по этой схеме, являются зависимости относительных проницаемостей для воды и нефти от насыщенности, от вида которых существенно зависят текущие и конечные результаты расчетов. Поэтому определение представительных указанных функций для каждого конкретного случая – одно из основных условий получения достоверных расчетных данных.