

$$W_{\alpha_2 \Omega_3}^{\circ} = \frac{8a_3 \sqrt{S}}{(t+S)}, \quad W_{\Omega_2 \Omega_3}^{\circ} = \frac{2a_3^2 (t-S)^2}{St(t+S)}$$

$$A_1 = S \int_0^1 \frac{1}{(1-z+Sz)} F(S, t, z) dz,$$

$$A_2 = t \int_0^1 \frac{1}{(1-z+tz)} F(S, t, z) dz, \quad A_3 = \int_0^1 F(S, t, z) dz$$

$$A_{11} = \frac{S^2}{a_3^2} \int_0^1 \frac{(1-z)}{(1-z+Sz)^2} F(S, t, z) dz, \quad A_{22} = \frac{t^2}{a_3^2} \int_0^1 \frac{(1-z)}{(1-z+tz)^2} F(S, t, z) dz$$

$$A_{33} = \frac{1}{a_3^2} \int_0^1 (1-z) F(S, t, z) dz, \quad A_{12} = \frac{St}{a_3^2} \int_0^1 \frac{(1-z)}{(1-z+Sz)(1-z+tz)} F(S, t, z) dz$$

$$A_{13} = \frac{S}{a_3^2} \int_0^1 \frac{1-z}{(1-z+Sz)} F(S, t, z) dz, \quad A_{23} = \frac{t}{a_3^2} \int_0^1 \frac{(1-z)}{(1-z+tz)} F(S, t, z) dz$$

$$F(S, t, z) = \sqrt{\frac{(1-z)}{(1-z+Sz)(1-z+tz)}}$$

При расчетах на ЭВМ индексные символы A_i , A_{ij} , B_{12} после замены $u = a_3^2 z / (1-z)$ привелись к интегралам с конечными пределами 0 и 1. Вычисление Δ_9 и Δ_{12} на ЭВМ показало, что они положительны в точках кривой BC . Устойчивость эллипсоидов Дедекинда доказана.

Автор благодарит В. В. Румянцеву за предложенную тему.

Поступила 20 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Риман Б. Сочинения. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
2. Basset A. B. A treatise on hydrodynamics, vol. 2, chapter 15. Cambridge, Deigrion Bell., 1888.
3. Lebovitz N. R. On Riemann's criterion for the stability of liquid ellipsoids. *Astro-phys. J.*, 1966, vol. 145, No. 3.
4. Chandrasekhar S. Ellipsoidal figures of equilibrium. New Hafer and London, Yale University Press, 1969 (Рус. перев.: Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. М., «Мир», 1973).
5. Рубановский В. Н., Степанов С. Я. О теореме Рауса и методе Четаева построения функции Ляпунова из интегралов уравнений движения. *ПММ*, 1969, т. 33, вып. 5.
6. Аппель П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Л.—М., Гостехиздат, 1936.
7. Румянцев В. В. Об устойчивости эллипсоидов Маклорена вращающейся жидкости. *ПММ*, 1959, т. 23, вып. 3.

УДК 532.3 : 538.6

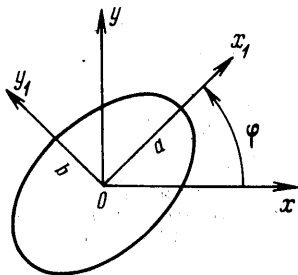
О МОМЕНТЕ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩЕМ НА ТЕЛО В НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Б. Э. КАШЕВСКИЙ

(Минск)

Указывается на значительную величину момента сил, действующего при наложении поля в феррожидкости на немагнитное тело. Рассмотрен вклад в момент внешней неоднородности поля и вносимого телом возмущения. Показано, что в практических полях они могут быть соизмеримы. Рассмотрена методика вычисления результирующей силы и результирующего момента. Вычислен момент сил, действующий в однородном и неоднородном полях на цилиндр эллиптического сечения. Выполнено экспериментальное исследование, подтверждающее теоретические расчеты

После создания феррожидкостей было обращено внимание на значительную величину силы, действующей в неоднородном поле на погруженные в них тела, были обнаружены явления всплытия в феррожидкости тяжелых ($\rho_b > \rho_f$) немагнитных тел и левитации тяжелых магнитов [1, 2]. Позднее силы исследовались теоретически [3, 4] и экспериментально [5]. Действующие на тело в феррожидкости моменты сил



Фиг. 1

ранее не исследовались. В случае немагнитного тела и неподвижной жидкости момент сил может быть вычислен по формуле

$$(1) \quad G = - \int P[r \times n^0] ds$$

где n^0 — внешняя нормаль к поверхности тела, P — давление, которое определяют из уравнений статики намагничивающейся жидкости (M — намагниченность, H — напряженность поля):

$$(2) \quad -\nabla P + M \nabla H = 0, \quad \text{rot } H = 0, \quad \text{div } B = 0$$

Если давление однородно, то момент сил равен нулю. Неоднородность давления связана с внешней неоднородностью поля и с возмущениями поля при внесении тела. Причем, если в силу возмущения вносят поправки второго порядка [3], то в момент, как будет показано ниже, вклад возмущений может быть соизмерим с вкладом внешней неоднородности, а в почти однородных полях он доминирует. Если возмущения поля не учитывать, интеграл (1) для модельных тел и несложных конфигураций поля берется без большого труда. Например, для цилиндра эллиптического сечения в поле $H^{(1)} = H_0 + K_1 x$, используя уравнение состояния $M = M_0 + \chi(H - H_0)$ и геометрию фиг. 1, можно найти

$$(3) \quad G_z^{(1)} = 2\pi h a b (a^2 - b^2) K_1^2 \varphi \sin 2\varphi$$

Здесь h — высота цилиндра. Как видим, устойчивой является ориентация длинной оси эллипса перпендикулярно градиенту напряженности поля.

Учет возмущения поля значительно усложняет задачу, поскольку требует решения уравнений поля, которое имеет возле тела сложную конфигурацию. Вместо того чтобы делать это, представляется интересным рассмотреть другой подход к вычислению результирующего момента сил и результирующей силы, основанный на варьировании полных термодинамических функций системы поле — намагничивающаяся жидкость — тело.

Будем исходить из интегрального термодинамического уравнения (F_0 — плотность свободной энергии без поля) [6]

$$(4) \quad \delta F_1 = \int \left(\delta F_0 - \frac{B \delta H}{4\pi} \right) d\tau$$

которое в изотермических условиях и при неизменных источниках поля (токах) определяет изменение полной свободной энергии F_1 системы при виртуальном перемещении тела δR .

Перемещение δR представим как сумму плоскопараллельного переноса и вращения относительно центра инерции

$$(5) \quad \delta R = \delta R_0 + [\delta \varphi \times r]$$

Действующие на тело сила и момент определяются соотношениями

$$(6) \quad F = - \frac{\partial F_1}{\partial R_0}, \quad G = - \frac{\partial F_1}{\partial \varphi}$$

Предположим, что имеется объем V , ограниченный поверхностью Σ , целиком лежащий в области, занимаемой жидкостью, за пределами которого возмущение поля телом отсутствует. Используя зависимость $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ в жидкости и в теле, проинтегрируем соотношение (4) по H . Представим \mathbf{H} в виде суммы поля в жидкости без тела и возмущения, вносимого телом: $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'$ ($H' \ll H_0$), вычисляем F_1 , сохранив члены первого порядка по \mathbf{H}' :

$$(7) \quad F_1 = \int_{V-V_0} F_0 d\tau - \frac{\mu}{8\pi} \int_{V-V_0} H_0^2 d\tau - \frac{\mu^0}{8\pi} \int_{V_0} H_0^2 d\tau - \\ - \frac{\mu}{4\pi} \int_{V-V_0} \mathbf{H}_0 \mathbf{H}' d\tau - \frac{\mu^0}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{H}_0 \mathbf{H}' d\tau$$

Здесь учтено, что изменение энергии F_0 в объеме тела не влияет на его макроскопическое движение. Верхним индексом градус помечены величины, относящиеся к телу. Поскольку $H' \sim |M^0 - M| \sim |\chi^0 - \chi| H_0$, использованное приближение означает $|\chi^0 - \chi| \ll 1$.

Вводя потенциал возмущения $H' = \nabla \psi$, используя затем тождество $\mathbf{H}_0 \nabla \psi = \text{div}(\mathbf{H}_0 \psi) - \psi \text{div} \mathbf{H}_0$, уравнение $\text{div} \mathbf{H}_0 = 0$, а также теорему Остроградского, два последних интеграла в правой части (7) преобразуем в поверхностные. После этого, пренебрегая интегралом по Σ и принимая во внимание непрерывность потенциала ψ и поля \mathbf{H}_0 на границе тела σ , представим их в виде

$$(8) \quad F_1' = \frac{\mu - \mu^0}{4\pi} \int_{\sigma} \psi \mathbf{H}_0 \mathbf{n}^0 ds = \frac{\mu - \mu^0}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{H}_0 \mathbf{H}' d\tau = \frac{\mu - \mu^0}{4\pi} \langle \mathbf{H}_0 \mathbf{H}' \rangle V^0$$

Вычислим изменение δF_1 при виртуальном перемещении тела $\delta \mathbf{R}$. Поскольку \mathbf{H}_0 не зависит от положения тела, то

$$(9) \quad \delta F_1 = \delta \int_{V-V_0} F_0 d\tau + \delta \int_{V_0} \frac{\mu - \mu^0}{8\pi} H_0^2 d\tau + \delta F_1'$$

Уменьшение первого интеграла в (9) равно работе, выполненной жидкостью над телом при его перемещении в отсутствие поля. Так как на элементарной площадке ds жидкость действует на тело с силой $\sigma_{ik}^h n_k^0 ds$, где σ_{ik}^h — тензор напряжений в жидкости без поля, выполняя при перемещении тела $\delta \mathbf{R}_i$ работу $\sigma_{ik}^h n_k^0 \delta \mathbf{R}_i ds$, то

$$(10) \quad \delta \int_{V-V_0} F_0 d\tau = - \int_{\sigma} \sigma_{ik}^h n_k^0 \delta \mathbf{R}_i ds = \\ = - \delta R_{0i} \int_{\sigma} \sigma_{ik}^h n_k^0 ds - \delta \varphi_i \int_{\sigma} \varepsilon_{ikl} r_k \sigma_{lm}^h n_m^0 ds$$

Вариация второго слагаемого в (9) есть приток энергии $(\mu - \mu^0) H_0^2 / 8\pi$ через поверхность тела, т. е.

$$(11) \quad \delta \int_{V_0} \frac{\mu - \mu^0}{8\pi} H_0^2 d\tau = \int_{\sigma} \frac{\mu - \mu^0}{8\pi} H_0^2 (\delta \mathbf{R} \mathbf{n}^0) ds = \\ = \delta R_0 \int_{\sigma} \frac{\mu - \mu^0}{8\pi} H_0^2 \mathbf{n}^0 ds + \delta \varphi \int_{\sigma} \frac{\mu - \mu^0}{8\pi} H_0^2 [\mathbf{r} \times \mathbf{n}^0] ds$$

Используя (10), (11) и (6), находим для действующих на тело силы и момента выражения

$$(12) \quad F_i = \int_{\sigma} \frac{\mu^0 - \mu}{8\pi} H_0^2 n_i^0 ds + \int_{\sigma} \sigma_{ik}^h n_k^0 ds + F_i' \\ G_i = \int_{\sigma} \frac{\mu^0 - \mu}{8\pi} H_0^2 \varepsilon_{ikl} r_k n_l^0 ds + \int_{\sigma} \varepsilon_{ikl} r_k \sigma_{lm}^h n_m^0 ds + G_i' \\ (13) \quad F_i' = - \frac{\partial F_1'}{\partial R_{0i}}, \quad G_i' = - \frac{\partial F_1'}{\partial \varphi_i}$$

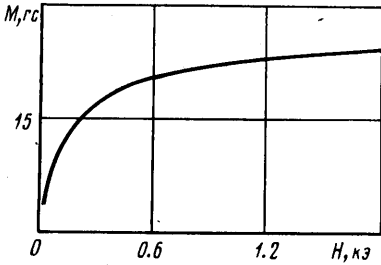
Заметим, что простое выражение для F_i' , подобное (8), в случае произвольной зависимости $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ получить не удастся. А поскольку у феррожидкости нелинейность

проявляется рано (см. фиг. 2), с практической точки зрения полезно рассмотреть зависимость

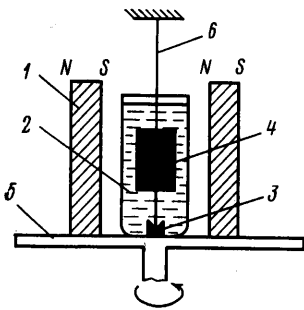
$$V = V_* + \mu(H - H_*), \quad V^\circ = V_*^\circ + \mu^\circ(H - H_*)$$

где V_* , V_*° , H_* — однородные поля. Рассмотрение, аналогичное проведенному выше, приводит к следующему результату для «магнитных» составляющих силы и момента:

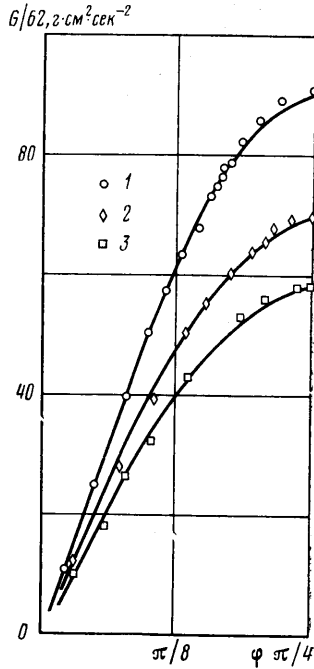
$$(14) \quad \begin{aligned} F_m &= \int_{\sigma} \frac{\mu^\circ - \mu}{8\pi} H_0^2 n^\circ ds + \int_{\sigma} \left(\left(\frac{\mu - \mu^\circ}{4\pi} H_* + M_*^\circ - M_* \right) H_0 \right) n^\circ ds + F' \\ G_m &= \int_{\sigma} \frac{\mu^\circ - \mu}{8\pi} H_0^2 [r \times n^\circ] ds + \int_{\sigma} \left(\left(\frac{\mu - \mu^\circ}{4\pi} H_* + M_*^\circ - M_* \right) H_0 \right) [r \times n^\circ] ds + G' \end{aligned}$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

где $M_*^\circ - M_* = (V_*^\circ - V_*)/4\pi$, а F' и G' определяются соотношением (13), в которых

$$(15) \quad \begin{aligned} F_1' &= - \int_{\sigma} \left(\frac{\mu - \mu^\circ}{4\pi} H_* + M_*^\circ - M_* + \frac{\mu^\circ - \mu}{4\pi} H_0 \right) \psi n^\circ ds = \\ &= - \left(\frac{\mu - \mu^\circ}{4\pi} H_* + M_*^\circ - M_* \right) \int_{V_0} H' d\tau + \int_{V_0} \frac{\mu - \mu^\circ}{4\pi} H_0 H' d\tau \end{aligned}$$

В однородном поле, когда $H_* = H_0$:

$$(16) \quad F_1' = (M_* - M_*^\circ) \int_{V_0} H' d\tau = (M_* - M_*^\circ) V^\circ \langle H' \rangle$$

Напомним, что M_* — намагниченность жидкости при наличии в ней однородного поля H_* , а M_*° — намагниченность в поле H_* тела, не имеющего границы.

Заметим также, что в принятом приближении рассчитывать H' следует исходя из невозмущенного распределения намагниченности.

Вернемся к рассматривавшемуся в начале работы немагнитному эллиптическому цилиндру. Размагничивающие факторы длинного эллиптического цилиндра определяются соотношениями [7] $D_a = b/(a+b)$, $D_b = a/(a+b)$. Используя их, получим для

перпендикулярного полю цилиндра

$$(17) \quad G_z^{(0)} = -4\pi V^0 M_*^2 \frac{a-b}{a+b} \sin 2\varphi$$

Равновесной, согласно (17), является ориентация длинной оси эллипса вдоль поля.

Сравнивая формулы (17) и (3), имеем $|G_z^{(0)}/G_z^{(1)}| = \pi M_*^2 / (a+b)^2 \chi K_1^2$. В частности, для кривой фиг. 2 $\chi \approx 0.04$ при $M_* = 13$ гс, используя $a+b = 2.5$ см, $K_1 = 40$ э/см (примерно такие значения реализованы в описанном ниже эксперименте), получаем $|G_z^{(0)}/G_z^{(1)}| \approx 1.3$.

Таким образом, как уже отмечалось, вклад в момент сил возмущения поля может быть соизмерим с вкладом его внешней неоднородности.

Отметим, что в поле с постоянным градиентом напряженности (см. выражение (3)) в намагниченной жидкости ($\chi = 0$, $M = M_0$) момент сил на эллиптический цилиндр равен нулю. Легко убедиться, что это справедливо для тела произвольной формы, если момент сил определять по отношению к его геометрическому центру. Действительно:

$$G = -M_0 \int [Hr \times n^0] ds = -M_0 \left[\nabla H \times \int r d\tau \right] = 0$$

На фиг. 3 представлена схема установки, на которой момент сил, действующий в феррожидкости на эллиптический цилиндр, был измерен. Однородное поле создавалось с точностью 5–10% между противоположными полюсами постоянных редкоземельных магнитов 1 — пластин $16 \times 80 \times 120$ мм. Исползованная феррожидкость, кривая намагничивания которой изображена на фиг. 2, приготовлена на основе керосина, магнетита и олеиновой кислоты. Устойчивость жидкости характеризует полное отсутствие осадка после месячного отстаивания. Измерительная ячейка представляла собой стеклянный стакан 2, в котором с помощью опоры и оси часового механизма 3 устанавливался исследуемый образец 4: Э1 ($a = 10.7$; $b = 2.5$; $h = 29$ мм) и Э2 ($a = 10.7$; $b = 5.3$; $h = 29$ мм). Стакан вместе с магнитами закреплялся на вращающемся столике 5. Момент сил, с которым залитая в стакан феррожидкость действовала на образец при повороте магнитов, измерялся по закручиванию нити 6. Результаты измерений (образец Э1) представлены на фиг. 4. Обозначения 1–3 соответствуют напряженности поля 375, 315 и 275 э. Сплошные линии на фигуре — графики функции $A \sin 2\varphi$, которая в соответствии с теоретическим результатом (17) удовлетворительно аппроксимирует экспериментальную зависимость. Хорошо согласуется с теорией не только характер, но и величина эффекта: подстановка измеренной амплитуды момента сил в формулу (17) дает для намагниченности жидкости в полях $H = 375$, 315 и 275 э значения $M_* = 17.5$, 15.2, 13.7 гс в сравнении с непосредственно измеренной величиной (см. фиг. 2) $M_* = 18.5$, 17.5, 16.5 гс. На втором образце получены аналогичные результаты.

Автор выражает благодарность В. Б. Самойлову за измерение намагниченности жидкости.

Поступила 16 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Rosenzweig R. E. Fluidmagnetic buoyancy. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 10.
2. Rosenzweig R. E. Buoyancy and stable levitation of a magnetic body immersed in a magnetizable fluid. Nature, 1966, vol. 210, No. 5036.
3. Curtis R. A. Second order effects in fluidmagnetic buoyancy. Appl. Sci. Res., 1974, vol. 29, No. 5.
4. Цебер А. О. Левитация постоянного цилиндрического магнита в ФЖ. 9-е Рижское совещ. по магнитной гидродинамике, т. 1. Рига, 1978.
5. Барков Ю. Д., Фергман В. Е. Экспериментальное исследование плавания магнитных тел в намагничивающей жидкости. Магнитная гидродинамика, 1978, № 1.
6. Landau Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
7. Stoner E. C. The demagnetizing factors for ellipsoids. Philosoph. Mag., 1945, vol. 36, No. 263.