

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЛИПСОИДОВ ДЕДЕКИНДА

Н. Г. ДОНИН

(Москва)

Устойчивость эллипсоидов Дедекинда, которые характерны тем, что неподвижны в пространстве и сохраняют свою форму за счет внутреннего движения жидкости при эллипсоидальных возмущениях поверхности, рассматривались Риманом и Чандрасекхаром [1–4]. В работе Римана на основании энергетического критерия о минимуме потенциальной энергии было показано, что эти эллипсоиды устойчивы, но при возмущении только части переменных. В работе Чандрасекхара устойчивость рассматривалась на основе линеаризованных вириальных уравнений. Было показано, что эллипсоиды Дедекинда устойчивы при условии, что на возмущающую частоту  $\sigma$  накладываются ограничения в виде некоторых уравнений.

В данной работе устойчивость изучается в точной постановке, без линеаризации уравнений, на основе теоремы Рауса [5] по отношению ко всем переменным в предположении, что эллипсоид после возмущения должен сохранять свою форму. Показано, что эллипсоиды Дедекинда устойчивы при эллипсоидальных возмущениях по отношению ко всем переменным без каких-либо ограничений на частоту  $\sigma$ .

1. Уравнения движения самогравитирующей жидкости, сохраняющей все времена форму эллипсоида, допускают интегралы [4]

$$\begin{aligned} U_0 &= \sum_{i=1}^3 v_i^2 + \sum_{i \neq j \neq k} (\Lambda_i^2 + \Omega_i^2) (a_j^2 + a_k^2) - 4 \sum_{i \neq j \neq k} a_i a_j \Lambda_k \Omega_k - 4\pi G \rho I = C_0 \\ U_1 &= \sum_{i \neq j \neq k} [2a_i a_j \Omega_k - (a_i^2 + a_j^2) \Lambda_k]^2 = C_1 \\ U_2 &= \sum_{i \neq j \neq k} [2a_i a_j \Lambda_k - (a_i^2 + a_j^2) \Omega_k]^2 = C_2, \quad U_3 = a_1 a_2 a_3 = C_3 \end{aligned}$$

Здесь  $U_0$  — интеграл энергии;  $U_1, U_2$  — интегралы, выражающие сохранение циркуляции и величины вектора момента количества движения;  $U_3$  — соотношение, характеризующее постоянство массы;  $v_i$  — скорости изменения длин полуосей эллипсоида;  $a_i$  — полуоси эллипсоида;  $\Omega_i$  — компоненты угловой скорости вращения подвижных осей;  $\Lambda_i$  — компоненты некоторого вектора;  $G$  — постоянная тяготения;  $\rho$  — плотность жидкости;  $I$  — некоторый интеграл.

2. Кривая равновесных положений эллипсоидов Дедекинда описывается уравнением [4]

$$a_1^2 a_2^2 A_{12} = a_3^2 A_3, \quad a_1^2 = a_3^2 / S, \quad a_2^2 = a_3^2 / t$$

и имеет вид дуги  $ABC$  [6] (фигура).

Точка  $B$  соответствует эллипсоидам вращения ( $a_2 = a_3$ ). Устойчивость этих эллипсоидов изучена в работе [7]. Эллипсоиды Дедекинда характерны тем, что для них

$$\begin{aligned} \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = v_1 = v_2 = v_3 = \Lambda_1 = \Lambda_2 = 0, \quad \Lambda_3 \neq 0, \quad a_1 \neq 0, \quad a_2 \neq 0, \quad a_3 \neq 0 \\ \Lambda_3^2 = 2\pi G \rho B_{12}, \quad B_{12} = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{u du}{\Delta(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)}, \end{aligned}$$

$$\Delta = \sqrt{(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u)}$$

Здесь  $B_{12}$  — индексный символ.

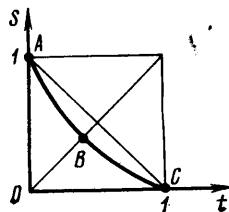
Для выяснения устойчивости остальных эллипсоидов ( $a_2 \neq a_3$ ) достаточно выяснить наличие у интеграла энергии  $U_0$  условного экстремума в точках кривой  $BC$ . Для этого достаточно установить положительность диагональных миноров определи-

теля [5]

$$\Delta = (-1)^k \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \dots 0 & b_{11} & b_{12} \dots b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 0 & b_{k1} & b_{k2} \dots b_{kn} \\ b_{11} & b_{21} \dots b_{k1} & a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & b_{2n} \dots b_{kn} & a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

В задаче  $k=3$  (число связей  $U_1, U_2, U_3$ ,  $a_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j}$  ( $W$  — функция Лагран-

жа в задаче о нахождении условного экстремума)  $b_{rj} = \partial U_r / \partial x_j$  ( $r=1, 2, 3$ ;  $j=1, 2, 3, \dots, 12$ ). Переменные  $x_i$  соответствуют переменным  $\Omega_i, \Lambda_i, a_i, v_i$ .



3. В рассматриваемой задаче порядок наименьшего минора равен 7, порядок наибольшего — 12. Эти миноры с точностью до некоторого положительного множителя имеют вид

$$\Delta_7 = (t-S)^2 + (t+S)(1-S) > 0$$

$$\Delta_8 = (t-S)^2 + (t+S)(1-t) > 0$$

$$\Delta_{10} = (t+S)(1-t)^2 \Delta_9, \quad \Delta_{11} = (t+S)(1-S)^2 \Delta_9$$

Миноры  $\Delta_9$  и  $\Delta_{12}$  с точностью до положительного множителя приводятся к виду

$$\Delta_9 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sqrt{\frac{B_{12}}{S}} & \sqrt{\frac{B_{12}}{t}} & -\frac{1}{\sqrt{St}} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{\frac{B_{12}}{t}} & 2\sqrt{\frac{B_{12}}{S}} & -\frac{(t+S)}{St} \\ \sqrt{\frac{B_{12}}{S}} & 2\sqrt{\frac{B_{12}}{t}} & 2\alpha & 2\beta & W_{a_1 \Omega_3}^\circ \sqrt{B_{12}} \\ \sqrt{\frac{B_{12}}{t}} & 2\sqrt{\frac{B_{12}}{S}} & 2\beta & 2\gamma & W_{a_2 \Omega_3}^\circ \sqrt{B_{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{St}} & -\frac{(t+S)}{St} & W_{a_1 \Omega_3}^\circ \sqrt{B_{12}} & W_{a_2 \Omega_3}^\circ \sqrt{B_{12}} & W_{a_3 \Omega_3}^\circ \end{vmatrix}$$

$$\alpha = W_{11}^\circ - 2\sqrt{S}W_{13}^\circ + SW_{33}^\circ, \quad \beta = W_{12}^\circ - \sqrt{t}W_{13}^\circ - \sqrt{S}W_{23}^\circ + \sqrt{St}W_{33}^\circ,$$

$$\gamma = W_{22}^\circ - 2\sqrt{t}W_{23}^\circ + tW_{33}^\circ$$

$$W_{11}^\circ = 3A_1 - \frac{3a_3^2}{s} A_{11} - B_{12} \frac{(5t+S)}{(t+S)}, \quad W_{13}^\circ = \frac{1}{\sqrt{S}} A_1 - \frac{a_3^2}{\sqrt{S}} A_{13},$$

$$W_{33}^\circ = 3A_3 - 3a_3^2 A_{33}$$

$$W_{12}^\circ = \sqrt{\frac{S}{t}} A_2 + \sqrt{\frac{t}{S}} A_1 - \frac{a_3^2}{\sqrt{St}} A_{12} - \frac{4\sqrt{St}}{(t+S)} B_{12} - \sqrt{St} A_{32},$$

$$W_{23}^\circ = \frac{1}{\sqrt{t}} A_2 - \frac{a_3^2}{\sqrt{t}} A_{23}$$

$$W_{22}^\circ = 3A_2 - \frac{3a_3^2}{t} A_{22} - \frac{(t+5S)}{(t+S)} B_{12}, \quad W_{a_2 \Omega_3}^\circ = \frac{8a_3 \sqrt{t}}{(t+S)},$$

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix}
0 & 0 & 2\sqrt{\frac{B_{12}}{S}} & 2\sqrt{\frac{\bar{B}_{12}}{t}} & 0 & 0 & 0 & \frac{(t+S)}{St} \\
0 & 0 & 2\sqrt{\frac{B_{12}}{t}} & 2\sqrt{\frac{B_{12}}{S}} & 0 & 0 & -\frac{(S+t)}{St} & \frac{2}{V\bar{S}t} \\
\sqrt{\frac{B_{12}}{S}} & \alpha & \beta & 0 & 0 & \frac{4\sqrt{tB_{12}}}{(S+t)} & 0 & -2\sqrt{\frac{B_{12}}{S}} \\
\sqrt{\frac{B_{12}}{t}} & \sqrt{\frac{B_{12}}{S}} & \beta & 0 & 0 & \frac{4\sqrt{SB_{12}}}{(S+t)} & 0 & -2\sqrt{\frac{B_{12}}{t}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t+S+t^2-3St}{t} & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & t+S+S^2-3St & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4\sqrt{t}(1-S) & 0 \\
& & & & & & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4\sqrt{S}(1-t) & 0 \\
& & & & & & 0 & 0 \\
-\frac{2}{V\bar{S}t} & -\frac{(S+t)}{St} & \frac{8\sqrt{tB_{12}}}{(S+t)} & \frac{8\sqrt{SB_{12}}}{(S+t)} & 0 & 0 & \frac{2(t-S)}{St(S+t)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -V\bar{t} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -V\bar{S} & 0 & 0 \\
\frac{(t+S)}{St} & \frac{2}{V\bar{S}t} & -4\sqrt{\frac{B_{12}}{S}} & -4\sqrt{\frac{B_{12}}{t}} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

$$W_{a_2 \Omega_3}^{\circ} = \frac{8a_3 \sqrt{S}}{(t+S)}, \quad W_{\Omega_3 \Omega_3}^{\circ} = \frac{2a_3^2(t-S)^2}{St(t+S)}$$

$$A_1 = S \int_0^1 \frac{1}{(1-z+Sz)} F(S, t, z) dz,$$

$$A_2 = t \int_0^1 \frac{1}{(1-z+tz)} F(S, t, z) dz, \quad A_3 = \int_0^1 F(S, t, z) dz$$

$$A_{11} = \frac{S^2}{a_3^2} \int_0^1 \frac{(1-z)}{(1-z+Sz)^2} F(S, t, z) dz, \quad A_{22} = \frac{t^2}{a_3^2} \int_0^1 \frac{(1-z)}{(1-z+tz)^2} F(S, t, z) dz$$

$$A_{33} = \frac{1}{a_3^2} \int_0^1 (1-z) F(S, t, z) dz, \quad A_{12} = \frac{St}{a_3^2} \int_0^1 \frac{(1-z)}{(1-z+Sz)(1-z+tz)} F(S, t, z) dz$$

$$A_{13} = \frac{S}{a_3^2} \int_0^1 \frac{1-z}{(1-z+Sz)} F(S, t, z) dz, \quad A_{23} = \frac{t}{a_3^2} \int_0^1 \frac{(1-z)}{(1-z+tz)} F(S, t, z) dz$$

$$F(S, t, z) = \sqrt{\frac{(1-z)}{(1-z+Sz)(1-z+tz)}}$$

При расчетах на ЭВМ индексные символы  $A_i$ ,  $A_{ij}$ ,  $B_{12}$  после замены  $u=a_3^2 z/(1-z)$  привелись к интегралам с конечными пределами 0 и 1. Вычисление  $\Delta_9$  и  $\Delta_{12}$  на ЭВМ показало, что они положительны в точках кривой BC. Устойчивость эллипсоидов Дедекинда доказана.

Автор благодарит В. В. Румянцева за предложенную тему.

Поступила 20 X 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Риман Б. Сочинения. М.-Л., Гостехиздат, 1948.
2. Basset A. B. A treatise on hydrodynamics, vol. 2, chapter 15. Cambridge, Deighton Bell, 1888.
3. Lebovitz N. R. On Riemann's criterion for the stability of liquid ellipsoids. Astrophys. J., 1966, vol. 145, No. 3.
4. Chandrasekhar S. Ellipsoidal figures of equilibrium. New Haven and London, Yale University Press, 1969 (Рус. перев.: Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. М., «Мир», 1973).
5. Рубановский В. Н., Степанов С. Я. О теореме Рауса и методе Четаева построения функции Ляпунова из интегралов уравнений движения. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
6. Аппель П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Л.-М., Гостехиздат, 1936.
7. Румянцев В. В. Об устойчивости эллипсоидов Маклорена вращающейся жидкости. ПММ, 1959, т. 23, вып. 3.

УДК 532.3 : 538.6

#### О МОМЕНТЕ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩЕМ НА ТЕЛО В НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Б. Э. КАШЕВСКИЙ

(Минск)

Указывается на значительную величину момента сил, действующего при наложении поля в ферроэлектрике на немагнитное тело. Рассмотрен вклад в момент внешней неоднородности поля и вносимого телом возмущения. Показано, что в практических полях они могут быть соизмеримы. Рассмотрена методика вычисления результирующей силы и результирующего момента. Вычислен момент сил, действующий в однородном и неоднородном полях на цилиндр эллиптического сечения. Выполнено экспериментальное исследование, подтверждающее теоретические расчеты.